Robin G.

Colle de la semaine 6

Dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$, montrer que
$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\} : \text{dom}(P) = 1\}$, ensemble
des polynômes unitaires, est un fermé.

Solution : Par caractérisation séquentielle.
Soit $(P_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tq $P_n \to P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que
P est unitaire.

- Supposons d'abord $P \neq 0$.

On pose $d := \deg(P)$, $c := \text{dom}(P)$.

Montrons que $c = 1$, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \quad |1 - c| \leq \varepsilon$
Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N_\varepsilon \; \forall n \geq N_\varepsilon \; \|P_n - P\|_\infty \leq \varepsilon$.
Montrons qu'à partir d'un certain rang, $\deg(P_n) = d$.
Soit $n \geq N_\varepsilon$ fixé. On a $\|P_n - P\|_\infty \leq \varepsilon$.

- si $d > \deg(P_n)$: $|\text{dom}(P) - 0| \leq \|P_n - P\|_\infty \leq \varepsilon$
soit $|c| \leq \varepsilon$

- si $d < \deg(P_n)$: $|\underbrace{\text{dom}(P_n)}_{1} - 0| \leq \|P_n - P\|_\infty \leq \varepsilon$
$1 \leq \varepsilon$

Ainsi pour tout $0 < \varepsilon < \dfrac{\min(|c|, 1)}{2}$,
si $n \geq N_\varepsilon$, $d = \deg(P_n)$ sinon $|c| \leq \varepsilon$ ou $1 \leq \varepsilon$

Donc $\forall n \geq N_\varepsilon \quad |[P_n]_d - [P]_d| \leq \varepsilon$
i.e. $|\text{dom}(P_n) - \text{dom}(P)| \leq \varepsilon$
i.e. $|1 - c| \leq \varepsilon$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $1 - c = 0$.

Donc $C = 1$ et $P \in F$.

F est un fermé.

- Supposons $P = 0$.

$\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2}$

si $n \geq N_\varepsilon$, $\quad \left| \underbrace{[P_n]_{dom(P_n)}}_{=1} - \underbrace{[P]_{dom(P_n)}}_{=0} \right| \leq \|P_n - P\|_\infty \leq \frac{1}{2}$

soit $1 \leq \frac{1}{2}$, contradiction.

2/2

Pierre V. Colle de la semaine 9

Espaces vectoriels normés Colle S9 MPI*

Exercice 1 :
Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$, montrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont aussi des parties convexes de E.

Solution

*) Soit $(x,y) \in \overline{A}^2$. Montrons que $[x,y] \subset \overline{A}$

Soit $z \in [x,y]$, $\exists \lambda \in [0,1]$ $z = \lambda x + (1-\lambda) y$

$\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ $x_n \to x$

$\exists (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ $y_n \to y$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in [x_n, y_n] \subset A$ car A est convexe

Par opérations sur les limites $\underbrace{\lambda x_n + (1-\lambda) y_n}_{\in A} \longrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y = z$

Ainsi $z \in \overline{A}$, $\overline{A}$ est un convexe de E

*) Soit $(x,y) \in \mathring{A}^2$ Montrons que $[x,y] \subset \mathring{A}$

Soit $z \in [x,y]$, $\exists \lambda \in [0,1]$ $z = \lambda x + (1-\lambda) y$

$\exists r_x > 0$ $B(x, r_x) \subset A$

$\exists r_y > 0$ $B(y, r_y) \subset A$

Posons $r = \min(r_x, r_y)$ et $a \in B(z, r)$

$$\begin{aligned} a &= a - z + z \\ &= \lambda(a-z) + (1-\lambda)(a-z) + \lambda x + (1-\lambda) y \\ &= \lambda \underbrace{(x + a - z)}_{= b} + (1-\lambda) \underbrace{(y + a - z)}_{= c} \end{aligned}$$

Montrons que $b \in B(x,r) \subset A$ et $c \in B(y,r) \subset A$

$\|b - x\| = \|z - a\| < r$ et $\|b - y\| = \|z - a\| < r$

donc $b \in A$ et $c \in A$

or $a = \lambda b + (1-\lambda) c \in [b, c] \subset A$ car A est convexe

Ainsi $\mathring{A}$ est un convexe de E

Louis Pelion

Semaine n°9 de colle

Enoncé :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ evn et $a \in E \setminus \{0\}$

Soit $f \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \|x-a\| \text{ si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

1) Montrer que f est continue en a
2) Montrer que f n'est pas continue en $-a$

Solution :

1) Montrons que $\|f(x) - \underbrace{f(a)}_{0}\| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $x \in E$ tel que $\|x - a\| < \varepsilon$

- Si $\|x\| \leq \|a\|$, $\|f(x)\| = \|x - a\| < \varepsilon$
- Si $\|x\| > \|a\|$, $\|f(x)\| = \|0\| < \varepsilon$

Alors on a bien $\|f(x)\| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

2) Construisons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \longrightarrow -a$ et $f(x_n) \not\longrightarrow f(-a)$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = -a \dfrac{(\|a\| + 1/n)}{\|a\|}$

On a bien $x_n \longrightarrow -a$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|x_n\| = \|a\| + 1/n > \|a\|$

Ainsi $\underset{\underset{0 \text{ car } \|x_n\| > \|a\|}{\|}}{f(x_n)} \not\longrightarrow f(-a) = 2\|a\| \neq 0$

$\square$

Timothée. F

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé,

$$f \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{si } \|x\| > 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

2. Si $x \in E$, montrer que $f(x)$ est le point de $B_f(0;1)$ le plus proche de x.

1. Soit $(x;y) \in E^2$,

si $\|x\|, \|y\| \leq 1$: $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$
$\leq 2\|x-y\|$ $\square$

si $\|x\|, \|y\| > 1$:

$$\|f(x)-f(y)\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$
$$= \frac{1}{\|x\|\|y\|} \big\| \|y\|x - \|x\|y \big\|$$
$$= \frac{1}{\|x\|\cdot\|y\|} \big\| \|y\|(x-y+y) - \|x\|y \big\|$$
$$= \frac{1}{\|x\|\cdot\|y\|} \big\| \|y\|(x-y) - \|x-y\|y \big\|$$

$$\leq \frac{1}{\|x\|\cdot\|y\|}\left(\big\|\,\|y\|(x-y)\big\| + \big\|\,\|x-y\|\,y\,\big\|\right)$$

$$\leq \frac{1}{\|x\|\cdot\|y\|}\, 2\|y\|\cdot\|x-y\|$$

$$\leq \frac{1}{\|x\|}\, 2\|x-y\|$$

$$\leq 2\|x-y\| \qquad \left(0 < \frac{1}{\|x\|} < 1\right) \ \square$$

Si $\|x\| \leq 1$, $\|y\| > 1$:

$$\|f(x)-f(y)\| = \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

$$= \frac{1}{\|y\|}\big\|\,\|y\|x - y\,\big\|$$

$$= \frac{1}{\|y\|}\big\|\,\|y\|(x-y) - (1-\|y\|)\,y\,\big\|$$

$$\leq \frac{1}{\|y\|}\left(\|y\|\|x-y\| + (\|y\|-1)\|y\|\right)$$

$$\leq \|x-y\| + \underbrace{\|y\| - 1}$$

$$\leq \|x-y\| + \|y\| - \|x\| \qquad (0 \leq \|x\| \leq 1)$$

$$\leq \|x-y\| + \|y-x\|$$

$$\leq 2\|x-y\| \quad \square$$

Par symétrie, le cas $\|y\| \leq 1$, $\|x\| > 1$ est aussi traité.

2. Soit $x \in E$,

si $x \in B_f(0,1)$, $\|x\| \leq 1$

donc $\|f(x) - x\| = \|x - x\| = 0$ $\square$

si $x \notin B_f(0,1)$, $\|x\| > 1$

donc
$$\|f(x) - x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - x \right\|$$
$$= \|x\| \cdot \left| \frac{1}{\|x\|} - 1 \right|$$
$$= \|x\| \cdot \left(1 - \frac{1}{\|x\|} \right)$$
$$= \|x\| - 1$$

Soit $y \in B_f(0;1)$, $\|y\| \leq 1$

donc
$$\|y - x\| \geq \|x\| - \|y\|$$
$$\geq \|x\| - 1 \quad (\|y\| \leq 1)$$
$$\geq \|f(x) - x\| \quad \square$$

Rapport de Colle, semaine n° 9

Wassim M.

Exercice : $E = M_n(\mathbb{R})$ $\quad \|A\| = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$

Determiner si les ensembles suivants sont ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre.

1. F, ensemble des matrices diagonales
2. G ensemble des matrices inversibles

Solution :

1. Montrons que F fermé

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists A \in E$ $\quad A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$

Montrons que $A \in F$:

on a $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ $[A_n]_{i,j} \longrightarrow [A_{i,j}]$

or $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ $i \neq j \Rightarrow [A_n]_{i,j} = 0$

donc $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ $i \neq j \Rightarrow [\cancel{A_{i,j}}]_{i,j} = 0$

donc $A \in F$

Par la caractérisation séquentielles de l'adhérence,

F est fermé

2. Montrons que G ouvert.

Cela revient à montrer que $E \setminus Gl_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Soit $(A_m) \in G^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists A \in E$ $A_m \longrightarrow A$

Montrons que $A \in F$:

On sait que $\forall m \in \mathbb{N}$ $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} [A_m]_{k,\sigma(k)} = 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $[A_m]_{ij} \longrightarrow [A]_{ij}$

Par combinaison linéaire de suites convergentes :

$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} [A]_{k,\sigma(k)} = 0$

donc $A \in F$ et G est ouvert

Lina A.   Colle de la semaine 9 :

Exercice 3. Pour tout polynôme réel P, écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$||P|| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1/2} |P(x)| \qquad \text{et} \qquad N(P) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

a. Prouver que $|| \ ||$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement à ces deux normes.

c. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X.

Solution :

a. Montrons que $\|.\|$ est une norme.

Séparation : $\|0_{\mathbb{R}[X]}\| = 0$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|P\| = 0$.

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] \qquad 0 \leq |P(x)| \leq \|P\| = 0$

Donc $P(x$

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] \qquad P(x) = 0$

Donc $P = 0$ sinon le polynome aurait une infinité de racine.

Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons : $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$

Si $\lambda = 0$, l'assertion est vraie

Si $\lambda \neq 0$,

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] \quad |\lambda P(x)| = |\lambda| |P(x)| \leq |\lambda| \|P\|$.

Par passage au sup : $\|\lambda P\| \leq |\lambda| \|P\|$. $(*)$

En spécifiant l'inégalité à $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$ et $P \leftarrow \lambda P$,

$\|P\| \leq |\frac{1}{\lambda}| \|\lambda P\|$

Donc $|\lambda| \|P\| \leq \|\lambda P\|$ $(**)$

De $(*)$ et $(**)$ on déduit $|\lambda| \|P\| = \|\lambda P\|$.

Inégalité triangulaire. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] \quad |P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\| + \|Q\|$

Par passage au sup $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.

$\boxed{\text{Finalement, } \|.\| \text{ est une norme sur } \mathbb{R}[X]}$

Montrons que N est une norme.

Séparation : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N(P) = 0$.

Alors

$$\underbrace{\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right|}_{\geq 0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{|a_k|}{k}}_{\geq 0} = 0$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_k = 0.$

D'où

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| = |a_0| = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Donc

$$P = 0.$$

D'autre part : $N(0_{\mathbb{R}[X]}) = 0.$

Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$

$$N(\lambda P) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\lambda a_k|}{k} =$$

$$= |\lambda| \left(\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} \right) = \lambda N(P).$$

Inégalité triangulaire : Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

$$N(P+Q) = \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k + [Q]_k\right|}_{\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |[P]_k + [Q]_k|} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|[P]_k + [Q]_k|}{k}}_{\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|[P]_k|}{k} + \frac{|[Q]_k|}{k}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |[P]_k| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|[P]_k|}{k} + \sum_{k=0}^{+\infty} |[Q]_k| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|[Q]_k|}{k}$$

Donc

$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$. $\boxed{\text{Ainsi } N \text{ est une norme sur } \mathbb{R}[X]}$

b. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|X^n\| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Donc $\underline{X^n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|.\|} 0}$

$N(X^n) = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ on ne peut pas conclure quant à la convergence de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mais $N(X^n - 1) = |1 - 1| + \frac{1}{n} \to 0$. Donc $\underline{X^n \xrightarrow[n \to +\infty]{N} 1}$

2/3

Lina.A

c. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ Posons

$$N'(P) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} + |a_0|.$$

Vérifions que N' est une norme, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire étant analogue que pour N montrons la séparation.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N'(P) = 0$

Alors

$$\underbrace{\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right|}_{\geq 0} + \sum_{k=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{|a_k|}{k}}_{\geq 0} + \underbrace{|a_0|}_{\geq 0} = 0$$

Donc $a_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $a_k = 0$.

Ainsi $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| = |a_1| = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

Donc $P = 0$.

Et on sait que $N'(0) = 0$.

Donc $\boxed{N' \text{ est bien une norme}}$.

Et.

$$N'(X^n - X) = |1-1| + \frac{1}{n} + 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{N'(\cdot)} X$.

Raphaël Mouchonnet colle semaine n° 9

1. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe un voisinage de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice diagonalisable.

solution :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par d'Alembert-Gauss nous savons que A est trigonalisable.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$

où

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & d_1 & & \\ & & & d_p & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & d_p \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\qquad}_{m_1} \cdots \underbrace{\qquad}_{m_p}$$

avec
- $p \in \mathbb{N}$ et $\{d_1, \dots, d_p\} = \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$
- $\forall i \in [\![1, p]\!]\ m_i = \mathrm{mult}(d_i, \chi_A)$

(on suppose que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]$ $i \neq j \Rightarrow d_i \neq d_j$)

On pose :

$$M = \max(\{m_i : i \in [\![1,p]\!]\}) > 0$$

$$m = \min(\{|d_i - d_j| : (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\}) > 0$$

Soit $0 < \varepsilon < \frac{m}{M}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$

On pose $\forall i \in [\![1,p]\!]\ \forall j \in [\![1, m_i]\!]\ \mu_{m,i,j} = d_i + j\frac{\varepsilon}{m}$

On pose

$$D_m = \begin{pmatrix} \mu_{m,1,1} & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & \mu_{m,1,m_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \mu_{m,p,1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mu_{m,p,m_p} \end{pmatrix}$$

on soit $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $\forall (j,k) \in [\![1,m_i]\!]^2$ tel que $j \neq k$

$\mu_{m,i,j} \neq \mu_{m,i,k}$.

et soit $(a,b) \in [\![1,p]\!]$ tel que $a \neq b$.

Soit $i \in [\![1,m_a]\!]$, $j \in [\![1,m_b]\!]$ tel que $i \neq j$

Par l'absurde supposons $\mu_{m,a,i} = \mu_{m,b,j}$

Alors $d_a + \frac{\varepsilon i}{m} = d_b + \frac{\varepsilon i}{m}$

alors $\frac{d_a - d_b}{j-i} = \frac{\varepsilon}{m} \leq \varepsilon < \frac{m}{M}$ $\lightning$

De même si $i=j$ $\mu_{n,a,i} \neq \mu_{n,b,j}$

Donc D_n possède m valeurs propre distinctes et est donc diagonalisable.

$(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de matrice diagonalisable

et $D_n \longrightarrow D$

donc $\underbrace{P D_n P^{-1}}_{\sim \text{ à } D_n \text{ donc diagonalisable}} \longrightarrow \underline{A}$

Ainsi par caractérisation séquentielle de la densité on conclut.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ et $\|A - M\|_\infty < \frac{1}{4}$ ⊕.

On a $\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$

⊕ livre $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} \leq c \leq \frac{5}{4}$ et $-\frac{5}{4} < b < -\frac{3}{4}$
$-\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}$

De $\Delta_{\chi_M} = (a+b)^2 - 4(ab-bc)$ on obtient

$\Delta_{\chi_M} < \frac{1}{4} - 2 < 0$ donc M n'est pas diagonalisable

Ainsi $\boxed{B(A, \frac{1}{4}) \text{ convient}}$.

Pave C. Semaine de colle 9

Enoncé

> Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel
>
> 1) on munit E d'une norme $\|\cdot\|$, montrer que
> $\forall (x,y) \in E^2, \ \|x\|+\|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.
> montrer que le cas d'égalité est possible si $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
>
> 2) on munit E de la norme $\|\cdot\|_2$ euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$
> montrer que $\forall (x,y) \in E^2, \ \|x\|+\|y\| \leq \sqrt{2} \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$
> et que cette inégalité est optimale.

Solution

Q1) Soient $(x,y) \in E^2$.

$$\|x\| = \frac{1}{2}\|x-y+x+y\| \underbrace{\leq}_{\text{inégalité triangulaire}} \frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|) \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

de même, $\|y\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.

d'où $\|x\|+\|y\| \leq 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.

Pour $E = \mathbb{R}^2$, $x=(0,1)$ et $y=(1,0)$, on a $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty = 1+1 = 2$

et $\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 1$, d'où $\|x\|+\|y\| = 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.

Q2) Soient $(x,y) \in E^2$, $\|x+y\|_2^2 = |\langle x+y, x+y\rangle| = 2|\langle x,y\rangle| + \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$

de même, $\|x-y\|_2^2 = -2|\langle x,y\rangle| + \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$.

d'où $\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2)$

$$\leq 2 \cdot \frac{1}{2}\max\{\|x+y\|_2^2, \|x-y\|_2^2\}$$

de plus, $\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \geq \frac{1}{2}(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$ d'où $(\|x\|_2+\|y\|_2)^2 \leq 2\max\{\|x+y\|_2^2, \|x-y\|_2^2\}$

$$= 2\left(\max\{\underbrace{\|x+y\|_2}_{\geq 0}, \underbrace{\|x-y\|_2}_{\geq 0}\}\right)^2$$

par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\underbrace{\|x\|_2}_{\geq 0} + \underbrace{\|y\|_2}_{\geq 0} \leq \sqrt{2}\max\{\|x+y\|_2, \|x-y\|_2\}$.

Pour $E = \mathbb{K}^2$, $x=(1,0)$, $y=(0,1)$, on a $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$, et $\|x+y\|_2 = \|x-y\|_2 = \sqrt{2}$.

donc $\|x\|_2 + \|y\|_2 = 2 = \sqrt{2}\|x+y\|_2 = \sqrt{2}\|x-y\|_2$. l'inégalité est donc optimale

MANGIACOMINI
Amélia

Rapport de Colle

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$$

$$N \left| \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \inf\limits_{x \in [0;1]} |3f(x) + f'(x)| \end{array} \right.$$

tel que (E,N) espace vectoriel normé.

1) Mq $\exists \alpha > 0$ tq $\forall f \in E$ $\inf\limits_{x \in [0;1]} |f(x)| \leq \alpha N(f)$

2) Est-ce que $\|.\|_\infty$ et N sont équivalentes sur E ?

1) Soit $x \in [0;1]$, soit $t \in [0;x]$

On a ; $\frac{d}{dt}\left(e^{3t} f(t)\right)$

$= e^{3t}\left(3f(t) + f'(t)\right)$

d'où ; $\left|\int_0^x \underbrace{\frac{d}{dt}\left(e^{3t} f(t)\right)} dt\right| \leq \int_0^x e^{3t} \overbrace{|3f(t) + f'(t)|}^{\leq N(f)} dt$

$\mathcal{E}^0$ car $\left| \begin{array}{l} t \longmapsto e^{3t} \\ t \longmapsto f(t) \end{array} \right.$ sont $\mathcal{E}^0$

1

donc $\left| \underbrace{e^{3x}f(x)} - 1 \times \cancel{f(0)}_{0} \right| \leq \left(\int_0^x e^{3t}\,dt \right) N(f)$

$\left(\begin{array}{l} \text{La primitive de } t \mapsto \frac{d}{dt}\left(e^{3t} f(t)\right) \\ \text{qui s'annule en } 0 \end{array} \right)$

donc $|f(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{e^{3x}}\right]}_{\leq \frac{1}{3} \text{ pour } x \in [0;1]} N(f)$

d'où $|f(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{3}}_{\alpha} N(f)$ puis on conclut

en passant à l'inf.

2) Non, par l'absurde on suppose $\exists\, \beta > 0$

tel que $\left| \begin{array}{l} \forall f \in E \\ N(f) \leq \beta \, \|f\|_\infty \end{array} \right.$

On prend $f \in x^n$ où $n \geq 1$ on a,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |x^n| = 1$$

d'où $\left| \begin{array}{l} \forall x \in [0;1] \\ |3x^n + n x^{n-1}| \leq \beta \end{array} \right.$

pour $\left| \begin{array}{l} x = 1 \\ n > \beta \end{array} \right.$ on a $|3 + \overbrace{n}^{> \beta}| \leq \beta$ ↯

Mehdi B. Colle de la semaine 9

Exercice 107. On note E l'ensemble des suites réelles bornées et $F = \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ le sev constitué des suites nulles à partir d'un certain rang.

1. On munit E de la norme définie par
$$\forall u \in E, \quad N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |u_n| .$$
Montrer que cette norme est bien définie et montrer que F est dense dans E.
2. On munit E de la norme définie par
$$\forall u \in E, \quad N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n| .$$
Montrer que F n'est pas dense dans E.
3. Dans le deuxième cas, déterminer l'adhérence de F.

Solution 1) N_1 est bien définie

Soit $u \in E$. Montrons que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}|u_n|$ converge.

- $u \in E$ donc : $\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \leq M$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $0 \leq \frac{1}{2^n}|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n M$

Or $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.
Par théorème de domination :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}|u_n| \text{ converge}}$$

F est dense dans E

Soit $u \in E$. $\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \leq M$. On considère la suite (v_m) de suites de F définie par :
$\forall m \in \mathbb{N} \ (v_m) = (u_1, u_2, \dots, u_m, 0, \dots 0, \dots) \in F$

Montrons que $(v_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{N_1} u$.
On montre :

$$N_1(u-(v_m)) \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{R}} 0$$

$$N_1(u-(v_m)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |u_n - (v_m)_n|$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} \underbrace{|u_n - (v_m)_n|}_{0} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \overbrace{|u_n - (v_m)_n|}^{0}$$

$$= \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{|u_n|}_{\leq M}$$

$$\leq \underbrace{M \sum_{n=m+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{reste d'ordre } m \text{ de } \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= M\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= M\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2}} \right) = \frac{M}{2^m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

Comme $N_1(u-v_m) \geq 0$, par théorème d'encadrement pour les suites réelles, $N_1(u-v_m) \longrightarrow 0$ et donc $v_m \longrightarrow u$.

Pour toute suite $u \in E$, on a exhibé une suite $(v_m) \in F^{\mathbb{N}}$ de suites de F qui tend vers u. Ainsi par caractérisation séquentielle de la densité :

$$\boxed{F \text{ est dense dans } E}$$

Mehdi B.

2/ Par l'absurde supposons F dense dans E pour N_∞. Alors :

$$\forall u \in E \ \exists (v_m) \in F^{\mathbb{N}} \ (v_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{N_\infty} u$$

Considérons $u = (1, \dots 1, \dots) \in E$, $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$

$$\exists M \in \mathbb{N} \ \forall m \geq M \ \underbrace{N_\infty(v_m - u)}_{\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |(v_m)_n - u_n|} \leq \frac{1}{2}$$

Or, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n_m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_m \ (v_m)_n = 0$$

Soit $m \geq M$, $n \geq n_m$. Alors :

$$|(v_m)_{n_m} - u_{n_m}| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |(v_m)_n - u_n| \leq \frac{1}{2}$$

Donc :

$$|\overbrace{(v_m)_{n_m}}^{0} - \overbrace{u_{n_m}}^{1}| \leq \frac{1}{2}$$

Ce qui livre : $1 \leq \frac{1}{2}$. Contradiction. Ainsi :

$$\boxed{F \text{ n'est pas dense dans } E \text{ pour } N_\infty}$$

3/ On pose $A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)$ converge vers $0\}$.
Montrons $\bar{F} = A$.

• On a $F \subseteq A$

• Montrons que A est fermé.

Soit $(v_m) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $(v_m) \to u \in E$. Montrons $u \in A$.
Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists M \in \mathbb{N}\ \forall m \geq M\quad N_\infty(v_m - u) \leq \varepsilon$. Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}\quad |(v_m)_n - u_n| \leq \varepsilon$.

Comme $(v_m)_n \to 0$, si $m \geq M$, alors :

$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\quad |(v_m)_n| \leq \varepsilon$.

Soit $m \geq M$, $n \geq N$.

$|u_n| = |u_n - (v_m)_n + (v_m)_n| \leq |(v_m)_n - u_n| + |(v_m)_n| \leq 2\varepsilon$.

Donc $u_n \to 0$, donc $u \in A$ et $\underline{A \text{ fermé}}$

Eliott S.V. SEMAINE 9.

Enoncé :

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $K \subset E$ une partie convexe, bornée, symétrique par rapport à 0. Démontrer que :

$$N : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \begin{cases} \inf\{|\lambda| : \frac{x}{\lambda} \in K\} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est une norme sur E.

Solution :

Tout d'abord, N est bien défini car $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$.

- Séparation :

Montrons $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Clair par définition de N

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \in E$ tq $N(x) = 0$.

$N(x) := \inf\{|\lambda| : \frac{x}{\lambda} \in K\} = \inf\{|\lambda| : x \in \lambda K\} = 0.$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0$, $|N(x) - \lambda| \leqslant \varepsilon$.

i.e. $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.

soit $\lambda = 0$.

Or $x \in \lambda K = 0 \cdot K$, ce qui implique $x = 0_E$ par absorbance de $0_{\mathbb{R}}$.

- Homogénéité

Montrons $\forall (x, \mu) \in E \times \mathbb{R}$, $N(\mu x) = |\mu| N(x)$. μ est fixé.

$N(\mu x) = \inf\{|\lambda| : \frac{\mu}{\lambda} x \in K\} = \inf\{|\frac{\lambda}{\mu}| : \frac{\mu}{\lambda} x \in K\} = |\mu| \inf\{|\lambda| : \frac{x}{\lambda} \in K\}$.

K centré en 0.

$= |\mu| N(x)$.

• Inégalité triangulaire :

Montrons $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

si $x=0$ ou $y=0$, c'est clair

si $x \neq$ et $y \neq 0$.

Alors $\frac{x}{N(x)}$ et $\frac{y}{N(y)}$ sont dans K.

Par convexité de K, on a aussi :

$$\frac{N(x)}{N(x)+N(y)} \frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} \frac{y}{N(y)} = \frac{x+y}{N(x)+N(y)} \in K.$$

$$\left(\frac{N(x)}{N(x)+N(y)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} = 1 \right)$$

Donc $(N(x)+N(y)) \in \{ |\lambda| : \frac{x+y}{\lambda} \in K \}$.

Par passage à l'inf, $N(x)+N(y) \geqslant \underbrace{\inf \{ |\lambda| : \frac{x+y}{\lambda} \in K \}}_{=N(x+y)}$

Donc N est une norme sur E.

De plus, K est la boule unité ouverte pour cette norme.

Youssef B — Colle de la semaine 9

Soit E un espace vectoriel normé,
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue
On a $\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
Determinez f :

Solution :

soit $x \in E$

On veut arriver à montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$

On peut procéder par étapes sur la nature de α :

- si $\alpha = 0$:

  $f(0x) = f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$

  Donc $f(0x) = f(0) = 0$

- si $\alpha \in \mathbb{N}$:

  on montre par récurrence évidente que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

- si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$:

  $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$

  Donc $f(-x) = -f(x)$

  Donc $f(\alpha x) = -f(-\alpha x) = -(-\alpha) f(x) \quad (-\alpha \in \mathbb{N})$

  $= \alpha f(x)$

- si $\alpha \in \mathbb{Q}$:

  on pose $\alpha = \frac{n}{m}$ avec $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

  $f(\alpha x) = f\left(\frac{n}{m} x\right) = f\left(n \times \frac{1}{m} x\right) = n f\left(\frac{1}{m} x\right)$

$f(\alpha x) = n\, f(\frac{1}{m} x) = n \frac{m}{m} f(\frac{1}{m} x)$

$= \frac{n}{m} f(\frac{m}{m} x) \quad (m \in \mathbb{N}$

$= \frac{n}{m} f(x)$

$= \alpha f(x)$

- si $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Par caractérisation de la densité :

$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists (q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \quad q_n \to r$

f est continue, donc

$$\begin{array}{ccc} f(q_n x) & \longrightarrow & f(rx) \\ \parallel & & \\ q_n f(x) & \longrightarrow & r f(x) \end{array}$$

Par unicité de limite : $f(rx) = r f(x)$

Donc on a $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in E \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Martin
Vimiler-Liben

Rapport de colle, semaine 9.

Soit $q \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$. On pose

$$E_q := \{A \in Gl_n(\mathbb{C}) \mid A^q = I_n\}.$$

1). Que dire de $A \in E_q$ vérifiant $Spec_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$?

2). Montrer que I_n est un point isolé de E_q, i.e.

$$\forall (X_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (E_q \setminus \{I_n\})^{\mathbb{N}}, \; X_k \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} I_n.$$

1) Soit $A \in E_q$ telle que $Spec_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$.

On sait $X^q - 1 = \prod_{r\in\mathbb{U}_q}(X-r) \in Ann(A)$.

Donc $\mu_A \mid X^q - 1$. Or $Spec_{\mathbb{C}}(\mu_A) = Spec_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$.
Par le théorème de d'Alembert-Gauss, on conclut que $\mu_A = X - 1$.

Donc $A = I_n$. Réciproquement $I_n \in E_q$ et $Spec_{\mathbb{C}}\{I_n\} = \{1\}$.

2). Par l'absurde, supposons

$$\exists (X_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (E_q \setminus \{I_n\})^{\mathbb{N}}, \; X_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_n.$$

On munit $M_n(\mathbb{C})$ d'une norme produit de telle sorte que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad [X_k]_{i,i} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1 \quad (1)$$

Puisque $Tr : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire sur $M_n(\mathbb{C})$ un espace de dimension finie, Tr est continue, donc de (1) il vient

$$Tr(X_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} n = Tr(I_n). \quad (2)$$

La convergence d'une suite de complexes équivalent à la convergence des parties réelles et imaginaires des termes de la suite, de (2) il vient

$$Re(Tr(X_k)) \xrightarrow[k\to+\infty]{} n.$$

Or par (1),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}, \quad r \in Spec_{\mathbb{C}}(X_k)$$

Or puisque cos est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Re(Tr(X_k)) \leq n-1+\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) < n = Tr(I_n)$$

Cela contredit la convergence vers I_n de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors I_n est un point isolé de E_q.

Rapport de colle - semaine 9.

Énoncé :

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degrée $n \geq 1$
Démontrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Im(z)|^n \leq |P(z)|$
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont unitaires de degré n et scindé sur $\mathbb{R}$.
Montrer que U_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1.1 $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

$\exists (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$

$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad |Im(z)| = |Im(z - a_k)| \leq |z - a_k|$

Donc, $|Im(z)|^n \leq \prod_{k=1}^{n} |z - a_k| = |P(z)|$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Im(z)|^n \leq |P(z)|$

P est scindé sur $\mathbb{C}$ par Alembert-Gauss,

Donc $\exists (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{C}^n$ tq $P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.

$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad |Im(a_k)|^n \leq |P(a_k)| = 0$

Donc $Im(a_k) = 0$, $a_k \in \mathbb{R}$

Donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(P_m) \in U_n^{\mathbb{N}}$ tq $\exists P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} P$

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] < \infty$, tout les normes de $\mathbb{R}_n[X]$ sont équivalents, donc $P_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P$.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad [P_m]_k \xrightarrow{|\cdot|} [P]_k$.

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$| P_m(z) - P(z) | \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{|[P_m]_k - [P]_k|}_{\to 0} |z|^k}_{\to 0}$$

Donc par théorème d'encadrement, $P_m(z) \xrightarrow{|\cdot|} P(z)$

Comme $|\cdot|$ est 1-lipschitzienne, $|\cdot|$ est continue donc $|P_m(z)| \to |P(z)|$

Par passage au limite on obtient, $|I_n(z)|^n \leq |P(z)|$

D'après 1), P est scindé sur $\mathbb{R}$.

De plus, $1 = [P_n]_n \xrightarrow{\text{l.i}} [P]_n$, donc $[P]_n = 1$

Donc P est unitaire.

Ainsi $P \in U_n$.

Soit $A = \{(x;y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Montrons que A est fermé et calculer l'intérieur de A

Solution :

$A = S_{\|\cdot\|_2}(0;1)$ donc est fermé.

Montrons que $\mathring{A} = \emptyset$

~~Dans $\mathbb{R}^2$ les normes sont équivalentes donc montrons pour $S_{\|\cdot\|_2}(0;1)$~~ Soit $a \in \mathring{A}$, $\varepsilon > 0$ tel

que $B(a;\varepsilon) \subset S_{\|\cdot\|_2}(0;1)$,

$z = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|a\|}\right) a \in B_{\|\cdot\|_2}(a;\varepsilon)$

$$\|z\|_2 = \left(1+\frac{\varepsilon}{2\|a\|}\right)^2 a_x^2 + \left(1+\frac{\varepsilon}{2\|a\|}\right)^2 a_y^2$$

$$= \underbrace{a_x^2 + a_y^2}_{1} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{\|a\|}}_{>0}\underbrace{(a_x^2 + a_y^2)}_{1} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{\|a\|^2}}_{>0}\underbrace{(a_x^2+a_y^2)}_{1}$$

donc $\|z\|_2 > 1$

donc $z \notin S_{\|\cdot\|_2}(0;1)$ contradiction.

<u>Énoncé</u> : Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés

Soit $f : E \longrightarrow F$ telle que $\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Supposons que f est bornée sur $B(0_E, 1)$

<u>Montrez que f est linéaire</u>

<u>Solution</u> :

① Commençons par montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

Soit $x \in E$.

- $f(x+0) = f(x) + f(0) = f(x)$. Donc $\underline{f(0) = 0}$
- $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$. Donc $\underline{f(-x) = -f(x)}$.
- Par récurrence immédiate nous pouvons montrer que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(nx) = nf(x)}$
- Soit $q \in \mathbb{N}^*$ $\quad q f(\frac{1}{q}x) = f(x)$. Donc $\underline{f(\frac{1}{q}x) = \frac{1}{q} f(x)}$

Nous en déduisons alors que $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ $\boxed{\frac{p}{q} f(x) = f(\frac{p}{q}x)}$

② Montrons que f est continue en 0.

Par hypothèse $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in B(0_E, 1) \quad \|f(x)\|_F \leq M$

D'après ① nous obtenons que $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in B(0_E, r) \quad \|f(x)\|_F \leq rM$

Et donc f est continue en 0.

③ Étudions la continuité de f sur E.

Considérons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

Ainsi $x_n - x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $f(x_n - x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0) = 0$

Alors $f(x_n) - f(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et finalement $\boxed{f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)}$

Ce résultat pouvant s'établir pour n'importe quel x dans E, il nous livre la continuité de f sur E.

$\boxed{\text{Ainsi ① et ③ nous permettent d'obtenir la linéarité de } f.}$

Rayan. G
MPI

Colle de la semaine n°10

Enoncé : Soit $p \in \mathbb{R}_{>0}$. On pose
$$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

1. On suppose $p < 1$. Montrer que $\|.\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. On suppose $p > 1$. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Solution :

Nous commençons par établir des propriétés de $\|.\|_p$ qui sont indépendantes des conditions posées en Q1 et Q2.

- Bien défini : La norme est bien défini car $p > 0$

- Positivité : Se déduit de la positivité de $|.|$ et des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Séparation : Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_p = 0$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|x_k|^p}_{\geq 0} = 0$$

Nous en déduisons la nullité de chaque $|x_k|^p$ et donc de x.

- <u>Homogénéité</u> : Soit $(\lambda, x=(x_1,\dots,x_n)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\Sigma\, lin}{=} |\lambda|\, \|x\|_p$$

Cette étude préliminaire nous livre que l'étude consistant à interroger le fait que $\|\cdot\|_p$ soit une norme peuvent se réduire à une étude ~~de~~ de l'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_p$.

En outre, nous établissons ainsi des inégalités qui nous serviront :

<u>Inégalité de Young</u> : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_{>0}$, $(p,q) \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

<u>Preuve</u> :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \underset{\ln \text{ concave}}{\geq} \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)$$

<u>Par propriété de ln</u> :

$$\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$$

Une composition par $\exp(\cdot)$ $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ nous livre

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

<u>Inégalité de Holder:</u> Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$(p, q) \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (*)

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

<u>Preuve:</u> Dans un premier temps, nous étudions le cas où $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ (où $\|\cdot\|_q$ est défini de manière analogue à $\|\cdot\|_p$) (:)

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité de Young livre

$$|x_k y_k| \leq \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q}$$

<u>En sommant sur k:</u>

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q$$

L'hypothèse (:) nous livre quitte à multiplier par une puissance que:

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \underset{(*)}{=} 1$$

L'inégalité est donc établie dans le cas cas $\|x\|_p \|y\|_q = 1$

(On suppose $x \neq 0$ et $y \neq 0$: clair sinon) Désormais, nous introduisons $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $y' = \frac{y}{\|y\|_q}$

Il est clair que $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$, par le cas précédent

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k' y_k'| \leq 1$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k' y_k'| = \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|$

On en déduit l'inégalité de Holder par positivité.

Désormais, nous pouvons répondre à q1 et q2.

q1. Supposons $p<1$. Le cas $x=(1,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$, $y=(0,1,\dots,0)$ livre que puisque $p<1$ alors $2^{\frac{1}{p}}>2$

Or

$$2^{\frac{1}{p}} = \|x+y\|_p \quad \text{et} \quad 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$$

L'inégalité triangulaire ayant un contre exemple, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$

q2 Supposons $p>1$, l'hypothèse livre l'existence de $q\in\mathbb{R}_{>0}$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (en prenant $q=\frac{p}{p-1}$)

Soit $(x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n))\in(\mathbb{R}^n)^2$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}\right)$$ (Inégalité triangulaire)

<u>En utilisant l'inégalité de Holder sur ces 2 sommes:</u>

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}}_{>0}$

On en déduit

$$\|x+y\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\|x\|_p+\|y\|_p$$

L'inégalité triangulaire étant vérifiée, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Jules R. Colle de la semaine 9

Énoncé :
On note E l'ensemble des suites réelles bornées et $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ le sev constituée des suites nulles à partir d'un certain rang.
On munit E de la norme définie par :

$$\forall u \in E \quad N_1(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{U_n}{2^n} \right|$$

Montrer que cette norme est bien définie.

Solution :
Soit $u = (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq U_n \leq M$$

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \underset{\max(U_n, -U_n)}{\underset{\shortparallel}{|U_n|}} \leq K$$

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{U_n}{2^n}\right| \leq \frac{K}{|2^n|} \leq K$$

$|2^n| > 0$

L'ensemble $\left\{ \left| \frac{U_n}{2^n} \right| : n \in \mathbb{N} \right\}$ est non vide et majorée donc la borne supérieure existe.

Celia A. Colle n°6.

énoncé :

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme définie par $\|A\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés, ouverts ou ni l'un, ni l'autre.

1. G l'ensemble des matrices inversibles
2. H l'ensemble des matrices de rang $\leq n-1$.
3. F l'ensemble des matrices diagonales.

Solution.

1. Montrons que G est ouvert. Pour cela, montrons que $E \setminus G$ est fermé par caractérisation séquentielle. Voir cours. (C6. 106)

2. H est l'ensemble des matrices non-inversibles, d'où $H = E \setminus G$. Ainsi, selon (1), H est fermé.

3. Montrons que F est fermé par caractérisation séquentielle.
Soit $(A_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et $A \in E$ tel que $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$.
Montrons que $A \in F$.
Par convergence des normes produits
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad [A_n]_{i,j} \xrightarrow{\mathbb{R}} [A]_{i,j}$$
Or, $(A_n) \in F^{\mathbb{N}}$, donc
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j \quad [A_n]_{i,j} = 0.$$
Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ $[A]_{i,j} = 0$.
$A \in F$ et F est fermé dans E.

Nicolas H — Colle de la semaine 9

Enoncé

Montrer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$ est dense dans $(\mathbb{U}, |\cdot|)$

Solution

• Montrons que $A = \{ e^{i2\pi q} : q \in \mathbb{Q} \}$

$\boxed{\subset}$ Soit $z \in A$. Il existe $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$. $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ donc $z \in \{ e^{i2\pi q} : q \in \mathbb{Q}\}$

$\boxed{\supset}$ Soit $z \in \{ e^{i2\pi q} : q \in \mathbb{Q}\}$, $q \in \mathbb{Q}$ tel que $z = e^{i2\pi q}$

Il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $q = \frac{a}{b}$

Divisons euclidiennement a par b, il existe $(s,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, b-1]\!]$ tels que $a = sb + r$

Ainsi, $z = \exp\left(i \times 2\pi \left(\frac{sb+r}{b}\right)\right)$

$= \exp\left(i2\pi \frac{sb}{b}\right) \times \exp\left(i2\pi \frac{r}{b}\right)$

$= e^{i2\pi \frac{r}{b}} \in \mathbb{U}_b \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$

• Soit $\exp \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|) \\ \theta \longmapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \end{array} \right.$ est continue car

$\mathrm{Re}(\exp) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta \longmapsto \cos(\theta) \end{array} \right.$ et $\mathrm{Im}(\exp) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta \longmapsto \sin(\theta) \end{array} \right.$

sont continues.

• Soit $z \in \mathbb{U}$. il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$

Montrons qu'il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $z_n \longrightarrow z$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $q_n \longrightarrow \frac{\theta}{2\pi}$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, posons $\theta_n = 2\pi q_n \in A$

Donc $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta$

Posons, $\forall n\in\mathbb{N}$ $z_n = e^{i\theta_n}$.

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$

et, par continuité de exp,

$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$

MATHEO.N

Rapport de colle Semaine 9

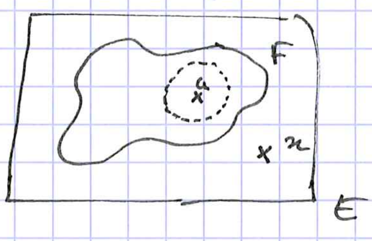
Exercice 1 :
Soient $(E, \| \, . \, \|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide. Montrer que $F = E$.

$\boxed{\subset}$

Comme F sev de E on a : $F \subset E$

$\boxed{\supset}$ Comme $\mathring{F} \neq \emptyset$, il existe $a \in F$, $r > 0$ tel que

$B(a,r) \subset F$



Supposons qu'il existe $x \in E \setminus F$

On pose $y = a + \frac{x-a}{\|x-a\|} \frac{r}{2}$

On a : $\|y-a\| = \left\| \frac{x-a}{\|x-a\|} \frac{r}{2} \right\| \underset{\text{[homogénéité de } \|\cdot\|]}{=} \frac{\|x-a\|}{\|x-a\|} \times \frac{r}{2} = \frac{r}{2} < r$

Ainsi : $y \in B(a,r) \subset F$

Or on a : $x \underset{r>0}{=} \underbrace{\frac{2}{r}(y-a) \times \|x-a\| + a}_{\in F \text{ sev de } E}$

Ainsi : $x \in F$ ⚡.

On a donc : $\underline{E \subset F}$

Ainsi : $\underline{F = E}$

Colle de la semaine 8

Adam M.:

Exercice 1. Soit (F,N) un espace vectoriel normé. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On suppose que u est injective.

1. Montrer que la fonction $\mathrm{N}_u : x \mapsto \mathrm{N}(u(x))$ est une norme sur E.

2. Dans cette question, on prend $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par

$$u : (x,y) \mapsto (x, x+2y, x-y)$$

et on choisit $\mathrm{N} = \|\ \|_\infty$.

Vérifier que u est effectivement injective puis dessiner la boule unité fermée relative à N_u.

Solution :

1. Soit $x \in E$ tel que $N_u(x) = 0$

$N(u(x)) = 0$ donc $u(x) = 0$ (N norme sur F)

donc $x \in \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ (u est injective)

Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$N_u(\lambda x) = N(u(\lambda x))$

$= N(\lambda u(x))$ (u linéaire)

$= |\lambda|\, N(u(x))$ (N norme sur F)

$= |\lambda|\, N_u(x)$

Soit $(x,y) \in E^2$

$N_u(x+y) = N(u(x+y))$

$= N(u(x)+u(y))$ (u linéaire)

donc $N(u(x)+u(y)) \leq N(u(x)) + N(u(y)) = N_u(x) + N_u(y)$

↳ N norme sur F

Donc $N_u(x+y) \leq N_u(x) + N_u(y)$

Donc N_u norme sur E

2. u est linéaire car linéaire par rapport à chacunes de ses composantes

$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(u)$

Soit $(x,y) \in \mathrm{Ker}(u)$ $\quad u(x,y) = 0$

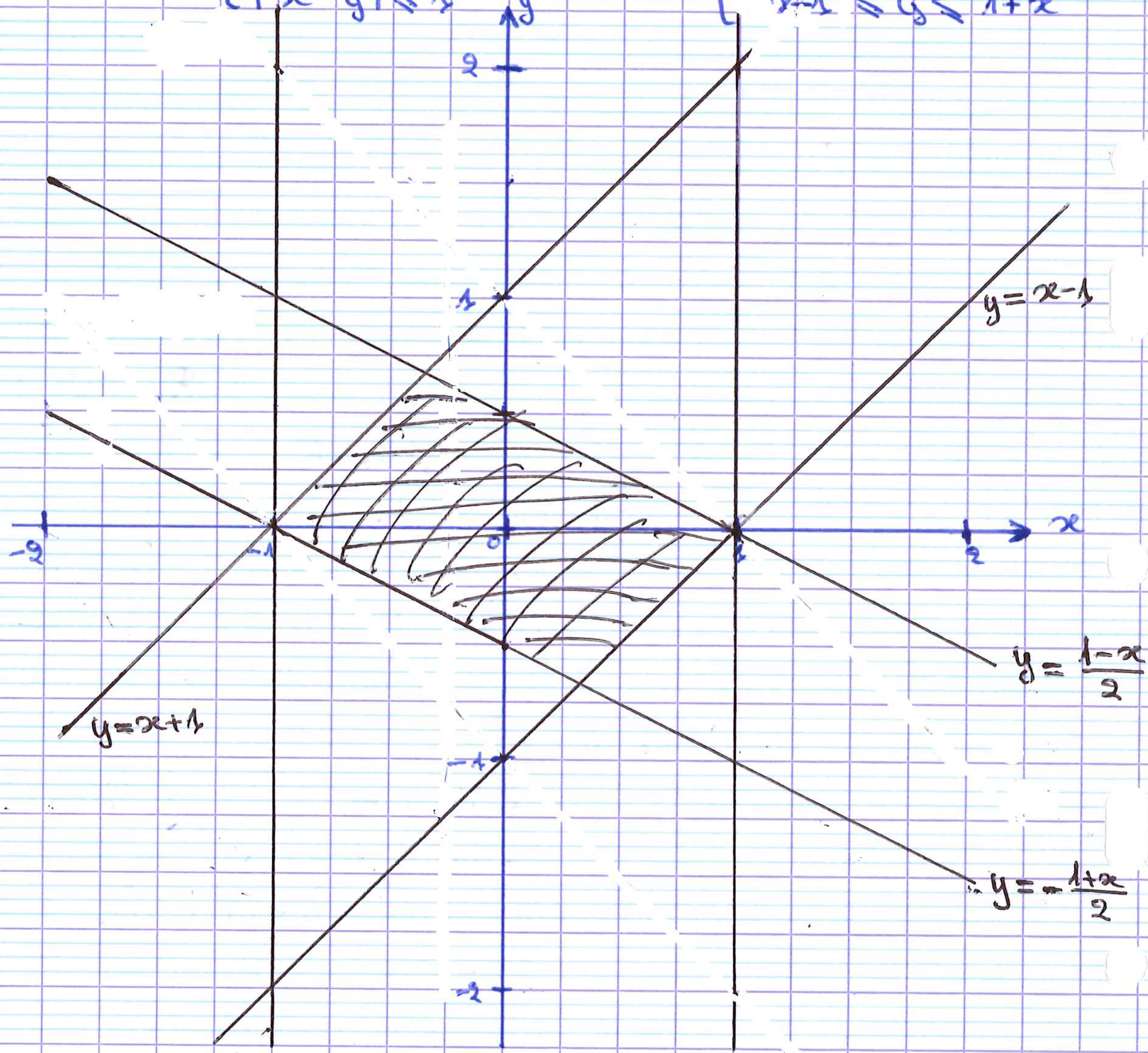
Donc $\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Donc $(x,y) \in \mathrm{Ker}(u)$ $\quad$ Donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$

Soit $(x,y) \in \overline{B_\infty(0,1)}$

Donc $\|u(x,y)\|_\infty \leqslant 1$

Donc $\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |x+2y| \leqslant 1 \\ |x-y| \leqslant 1 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{x+1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1-x}{2} \\ x-1 \leqslant y \leqslant 1+x \end{cases}$



Sophie G

Semaine de colle n° 9

Dans l'evn $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ montrer $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$ dense dans $\mathbb{U}$

Solution

Soit $x \in \mathbb{U}$

Montrons $\exists (x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ $x_p \xrightarrow{|\cdot|} x$

On a : $\exists \theta \in [0, 2\pi]$ $x = e^{i\theta}$

Analyse : Supposons $\exists (x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ $x_p \xrightarrow{|\cdot|} e^{i\theta}$

Soit $p \in \mathbb{N}$

$$x_p = e^{i \frac{2k_p\pi}{n_p}} \; ; \; k_p \in [\![0, n_p]\!]$$

alors $e^{i \frac{2k_p\pi}{n_p}} \longrightarrow e^{i\theta}$

d'où $\frac{k_p}{n_p} \longrightarrow \frac{\theta}{2\pi}$

Comme $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R} \; \exists (a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ $a_n \xrightarrow{|\cdot|} a$

En particulier $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R}$ d'où

$\exists (a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ $a_n \longrightarrow \frac{\theta}{2\pi}$

On choisit les k_p et n_p ($p \in \mathbb{N}$) tel que

$\left(\frac{k_p}{n_p}\right)_{p \in \mathbb{N}} = (a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ alors : $\boxed{e^{i 2a_p\pi} \xrightarrow{|\cdot|} e^{i\theta}}$

où $a_p \longrightarrow \frac{\theta}{2\pi}$

est candidat.

Synthèse :

Comme $a_p \longrightarrow \frac{\theta}{2\pi}$ et $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{C}$.

Donc $e^{i 2a_p\pi} \longrightarrow e^{i\theta}$

$2a_p\pi \longrightarrow \theta$

Conclusion

$$\boxed{A \text{ dense dans } \mathbb{U}}$$

Ternier Pierre

Colle de la semaine 9

Exercice. On dit qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ est *stochastique* si et seulement si ses coefficients sont tous positifs et la somme des coefficients de chaque ligne égale 1.

1. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. On note U le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que A est stochastique si et seulement si ses coefficients sont tous positifs et $AU = U$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie fermée, bornée et convexe de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ (qu'on munira de la norme de notre choix).

Solution :

1. On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A stochastique. Ses coefficients sont donc tous positifs.

$$AU = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j}\,[U]_{j,1}\right)E_{i,1}$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j}\cdot 1\right)E_{i,1}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} 1\cdot E_{i,1} \qquad (A \text{ stochastique})$$

$$= U$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que tous les coefficients de A sont positifs et que $AU = U$.

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j}\cdot 1\right)E_{i,1} = \sum_{i=1}^{p} 1\cdot E_{i,1}$

donc $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j} = 1$

donc A est stochastique.

2. Soit S l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Bornée : Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Soit $A \in S$.

$$0 \leq [A]_{i,j} \leq \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} = 1$$

par passage au max : $\|A\|_\infty \leq 1$.

Fermée : On note P l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. On note P_{ij} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficient de coordonnées (i,j) est positif.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tel que : $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P_{ij}^{\mathbb{N}}$ $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} A$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$[A_n]_{i,j} \geq 0$

par passage à la limite : $[A]_{i,j} \geq 0$ donc P_{ij} est une partie fermée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$P = \bigcap_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} P_{ij}$ est donc fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto XU \end{array} \right.$, linéaire donc continue.

$\{U\}$ est fermée donc $f^{-1}(U)$ est fermée dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

d'après la question 1 : $S = P \cap f^{-1}(U)$ est donc fermée dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Convexe : Soit $(A,B) \in S^2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$A \geq 0$ et $B \geq 0$ donc $\underbrace{\lambda A}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)B}_{\geq 0} \geq 0$.

$$(\lambda A + (1-\lambda)B)U = \lambda AU + (1-\lambda)BU \underset{(A,B)\in S^2}{=} \lambda U + (1-\lambda)U = U$$

donc $\lambda A + (1-\lambda)B \in S$.

S est donc une partie convexe de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Ibrahim. K

Colle de la semaine :)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé
Soit $U \in E$
montrer que

$$\overline{\left(\left(\overline{\mathring{U}}\right)\right)} = \overline{U}$$

$\boxed{\subset}$ on a $\overline{\mathring{U}} \subset \overline{U}$ ainsi $\overline{\overline{\mathring{U}}} \subset \overline{\overline{U}}$

or $\overline{U} \in E$ donc $\overline{\overline{U}} = \overline{U}$

donc

$\overline{\overline{\mathring{U}}} \subset \overline{U}$

$\boxed{\supset}$ on a $U \subset \overline{U}$

donc

$\mathring{U} \subset \mathring{\overline{U}}$ or $U \in E$ donc $\mathring{U} = U$.

donc

$U \subset \mathring{\overline{U}}$ donc

$\overline{U} \subset \overline{\mathring{\overline{U}}}$

Titouan

D

Rapport de colle semaine 9

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne

Q1 Demontrer que $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2}_{\geq 0} = \underbrace{1}_{\geq 0}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1} = 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_2 = 1\}$$

$$= S_{\|\cdot\|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$$

Ainsi $\mathbb{R}^2 \setminus F = B_{\|\cdot\|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus B_{f,\|\cdot\|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1))$ est un ouvert en tant que réunion de deux ouverts donc

$$\boxed{F \text{ est une partie fermée de } \mathbb{R}^2}$$

Q2 Determiner l'interieur de F

Par l'absurde, supposons $\mathring{F} \neq \emptyset$

Soit $(x,y) \in \mathring{F}$ $\quad \exists r > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_2}((x,y), r) \subset F$

On pose $v = (x + \frac{r}{2}, y)$

$\|v - (x,y)\|_2 = \frac{r}{2} < r$ donc $v \in B_{\|\cdot\|_2}((x,y), r)$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\left(x+\frac{r}{2}\right)^2 + y^2}$$

Comme $x + \frac{r}{2} > x$

$\|v\|_2 > \sqrt{x^2+y^2} = 1$ donc $v \notin F$

Il y a contradiction avec $v \in B_{\|\cdot\|_2}((x,y),r) \subset F$

donc $\boxed{\mathring{F} = \emptyset}$

REUTER
Robin
MPI

Rapport de colle

On munit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Q1. Démontrer que
$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$$
est une partie fermée de $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$

Q2. Déterminer l'intérieur de F.

Q1. Soit $\varphi \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,dt \end{array} \right.$

bien définie.

Montrons que φ est continue.

D'abord φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

Ensuite, soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.

Alors
$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right|$$
$$\leq \int_0^1 |f(t)|\,dt$$
$$\leq \|f\|_\infty \int_0^1 dt = \|f\|_\infty$$

Ce qui donne la continuité de φ.

Ainsi, puisque $\{0\}$ est un fermé, $\varphi^{-1}(\{0\}) = \boxed{F \text{ est un fermé}}$.

Q2. Montrons que F est un sous-espace vectoriel.

. $0 \in F$ Donc f est non vide et $F \subset E$.

. F est stable par combinaison linéaire par linéarité de l'intégrale.

Donc F est bien un sous-espace vectoriel de E.

Supposons que $\mathring{F}$ n'est pas vide.

Soit $f \in \mathring{F}$.

$\exists\, r_f > 0$ tel que $\mathcal{B}(f, r_f) \subset F$.

Soit $g \in E \setminus \{f\}$

$g = f + (g - f)$

Soit $h = \dfrac{g - f}{\|g - f\|_\infty} \times \dfrac{r_f}{2} + f$

On a $\|h - f\|_\infty = \left\| \dfrac{g-f}{\|g-f\|_\infty} \times \dfrac{r_f}{2} \right\|_\infty$

$= \dfrac{r_f}{2} \|g - f\|_\infty \times \dfrac{1}{\|g - f\|_\infty}$ par homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$

$= \dfrac{r_f}{2}$

Donc $h \in \mathcal{B}(f, r_f)$.

Or $f = h - \dfrac{g-f}{\|g-f\|_\infty} \times \dfrac{r_f}{2}$

donc $g = h - \dfrac{g-f}{\|g-f\|_\infty} \times \dfrac{r_f}{2} + (g - f)$

ce qui donne $g - f = \dfrac{2\|g - f\|_\infty}{r_f} (h - f)$

ce qui appartient à F car c'est un sous espace vectoriel.

De plus $g = f + (g - f) \in F$. Donc $F = E$.

c'est absurde. Ainsi, $\mathring{F} = \emptyset$.

Louis B　　　　　　　　　　　　　　　　Colle de la semaine 9

On munit $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$

Démontrer que $F = \{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) : \int_0^1 f = 0 \}$ est une partie fermée de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$

tq $\exists f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

tq $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ i.e. $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$

Montrons que $f \in F$: $\forall n \in \mathbb{N}$

- $$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t) - f_n(t) + f_n(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 f(t) - f_n(t)\,dt + \underbrace{\int_0^1 f_n(t)\,dt}_{0}$$

Comme $\forall t \in [0,1]$ $0 \leq |f_n - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$

on en déduit $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 f(t) - f_n(t)\,dt\right|$

inégalité triangulaire $\leq \int_0^1 |f(t) - f_n(t)|\,dt$

croissance de l'intégrale $\leq \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty\,dt$

Donc $0 \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$

Donc par théorème d'encadrement

$\int_0^1 f(t)\,dt \xrightarrow{n} 0$

Comme $\int_0^1 f$ est constante

on en déduit $\int_0^1 f = 0$

Donc $f \in F$

Alexandre M.

Colle semaine 9

Enoncé

Soit $(E_1, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que

- $\forall (x,y) \in E_1^2 \quad \|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\| ; \|x-y\|\}$
- Montrer que le cas d'égalité est possible avec deux vecteurs non nuls

Soit $(E_2, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Montrer que

- $\forall (x,y) \in E_2^2 \quad \|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max\{\|x+y\| ; \|x-y\|\}$
- Montrer que le cas d'égalité est possible avec deux vecteurs non nuls.

Résolution

Soit $(x,y) \in E_1^2$.

On remarque que $x = \dfrac{x+y+x-y}{2}$ et $y = \dfrac{x+y-(x-y)}{2}$

on a donc $\|x\| = \left\|\dfrac{x+y+x-y}{2}\right\| \leq \dfrac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)$

et $\|y\| = \left\|\dfrac{x+y-(x-y)}{2}\right\| \leq \dfrac{1}{2}\Big(\|x+y\| + \underbrace{\|y-x\|}_{\|x-y\|}\Big)$

[inégalité triangulaire et homogénéité]

donc $\boxed{\|x\|+\|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\| \leq 2\max\{\|x+y\| ; \|x-y\|\}}$

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ avec $x = (1,0)$; $y = (0,1)$

$$\boxed{\underbrace{\|x\|_\infty}_{1} + \underbrace{\|y\|_\infty}_{1} = 2 = 2\max\{\underbrace{\|(1,1)\|_\infty}_{1} ; \underbrace{\|1;-1\|_\infty}_{1}\}}$$

On considère maintenant $(E_2, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associé au produit scalaire.

Soit $(x,y) \in E_2^2$

$$(\|x\|-\|y\|)^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \geqslant 0$$

donc $\frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \geqslant \|x\|\|y\|$

[$+\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$]

donc $\|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2)$

i.e. $\|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \frac{1}{2}(\|x\|+\|y\|)^2$ ①

De plus :

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 = \langle x+y ; x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ \text{et } \|x-y\|^2 = \langle x-y ; x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \end{cases}$$

[bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$]

donc $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ [somme]

ainsi $2\underbrace{\text{Max}\{\|x+y\|^2 ; \|x-y\|^2\}}_{(\text{Max}\{\|x+y\| ; \|x-y\|\})^2} \geqslant 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \overset{①}{\geqslant} (\|x\|+\|y\|)^2 \geqslant 0$

On a ainsi, grâce à la croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\sqrt{(\underbrace{\|x\|+\|y\|}_{\geqslant 0})^2} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{(\underbrace{\text{Max}\{\|x+y\| ; \|x-y\|\}}_{\geqslant 0})^2}$$

i.e. $\boxed{\|x\|+\|y\| \leqslant \sqrt{2}\,\text{Max}\{\|x+y\| ; \|x-y\|\}}$

Dans $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $x=(1,0)$, $y=(0,1)$

$$\underbrace{\|x\|}_{\sqrt{1^2+0^2}=1} + \underbrace{\|y\|}_{1} = 2 = \sqrt{2}\underbrace{\|(1,1)\|}_{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\text{max}\{\|x+y\| ; \|x-y\|\}$$

Anaë D.

Rapport de colle S9

Trouver les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $(x,y) \mapsto N_a(x,y) = \sqrt{x^2+2axy+y^2}$ est une norme de $\mathbb{R}^2$

Solution : Soit $a \in \mathbb{R}$

N_a est bien défini si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x^2+2axy+y^2 \geq 0$

ie $2axy \geq 0$

On en déduit que N_a bien défini si $a \in]-1,1[$

Montrons que pour $a \in]-1;1[$, N_a est une norme

On pose $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y),(x'y') \longmapsto xx'+yy'+axy'+ax'y \end{array} \right.$ où $a \in]-1;1[$

Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire.

- Comme $\times$ est commutative dans $\mathbb{R}$, φ est symétrique
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\forall ((x,y)(x',y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\varphi((\lambda x, \lambda y)(x',y')) = \lambda x x' + \lambda y y' + a\lambda x y' + a\lambda x' y$$
$$= \lambda \varphi((x,y),(x'y'))$$

Donc φ est linéaire à gauche et par symétrie on obtient φ linéaire à droite.

- $\forall ((x,y),(x',y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\varphi((x,y),(x,y)) = x^2+y^2+2axy \geq x^2+y^2-|2axy|$$
$$\geq x^2+y^2-|a|(x^2+y^2) \qquad (x^2+y^2 \geq |2xy|)$$
$$\geq (x^2+y^2)\underbrace{(1-|a|)}_{>0} \quad (*)$$
$$\geq 0$$

Donc φ est positive et de $(*)$ on en déduit que $\varphi((x,y),(x,y)) = 0$ si et seulement $x = 0 = y$. Donc φ est définie.

φ est donc un produit.

Or, on remarque de $N_2 = \sqrt{\varphi}$ donc N_2 est la norme associée au produit scalaire φ.

Ainsi, pour tout $a \in]-1;1[$, N_a définie une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Léa N.

Colle de la semaine n°9

Énoncé

Exercice 2 :
Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E.

1. Montrer que si F est un ouvert alors $F = E$.
2. Montrer que si F est d'intérieur non vide alors $F = E$.

Solution :

1/ Supposons que F est un ouvert.

On sait que $F \subset E$.

Montrons que $E \subset F$.

. $0 \in F$ donc $\exists r > 0$ $B(0, r) \subset F$.

Soit $x \in E$.

. Si $||x|| < r$ alors $x \in F$

. Sinon, on pose $y = \frac{x}{\underbrace{||x||}_{\neq 0}} \times \frac{r}{2}$

$||y|| = \frac{r}{2} < r$ donc $y \in F$

Or $x = 2 \times \frac{||x||}{r} \cdot y$

Comme F est un sous-espace vectoriel, $x \in F$.

On en déduit que $\boxed{E = F}$.

2/ Supposons $\mathring{F} \neq \emptyset$.

$\exists x \in F$, $\exists r > 0$ $B(x, r) \subset F$

Montrons que $B(0, r) \subset F$

Soit $y \in B(0, r)$, ie $||y|| < r$

$y = y + x - x$

or $||y + x - x|| < r$ donc $y + x \in B(x, r) \subset F$

Donc $y \in F$

On déduit comme en Q.1 que $\boxed{E = f}$

Exercice 4 :
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$.
On note N_φ l'application définie sur E par $N_\varphi(f) = ||f\varphi||_\infty$.
Montrer que N_φ est une norme sur E si et seulement si $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est dense dans $[0,1]$.

Solution

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ dense dans $[0,1]$

L'inégalité triangulaire, la positivité et l'homogénéité découle du fait que $||.||_\infty$ soit une norme.

Séparation Soit $f \in E$ tel que $||f\phi||_\infty = 0$ ie $f\phi = 0$
(Séparation de $||.||_\infty$)

Soit $x \in [0,1]$ alors $\exists (x_n) \in (\phi^{-1}(\mathbb{R}^*))^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to x$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n)\underbrace{\phi(x_n)}_{\neq 0} = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = 0$

$$\begin{array}{ccc} f(x_n) & = & 0 \\ \downarrow (f\ \mathcal{C}^0) & & \downarrow \\ f(x) & & 0 \end{array}$$

Par unicité de la limite il vient $f(x) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée. supposons $\phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ non dense dans $[0,1]$
montrons $\exists f \in E$ tel que $f \neq 0$ et $N_\phi(f) = 0$.

Comme $\phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ n'est pas dense dans $[0,1]$

$\exists x \in [0,1]$ $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \phi^{-1}(\mathbb{R}^*) = \emptyset$

i.e. $\forall z \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\quad \phi(z) = 0$ (On suppose $x \neq 0$, $x \neq 1$
et ε assez petit.

Le cas $x=0$ ou $x=1$
se traite de la même manière
en réduisant l'intervalle)

Cela nous invite à poser

$$f \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } z \in [0, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, 1] \\ (z-(x-\varepsilon))(z-(x+\varepsilon)) \text{ si } z \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\end{cases} \end{array} \right.$$

f est continue en $x+\varepsilon$ et $x-\varepsilon$ et sur $[0,1] \setminus \{x+\varepsilon, x-\varepsilon\}$

ainsi f est continue sur $[0,1]$ donc $f \in E$.

$f(x) \neq 0$ donc $f \neq 0$.

Soit $z \in [0,1]$ alors $\underbrace{\phi(z)}_{0 \text{ sur }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[} \underbrace{f(z)}_{0 \text{ sur } [0,1] \setminus]x-\varepsilon, x+\varepsilon[} = 0$

Ainsi

$f \neq 0$ et $N_\phi(f) = 0$.

Stanislas G   Semaine de colle n°9

Enoncé : Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ouverts denses dans E montrer que $A \cap B$ est un ouvert dense dans E

Solution :

$A \cap B$ est ouvert car c'est l'intersection de deux ouverts
Soit $x \in E$, $\varepsilon > 0$ alors
$B(x, \varepsilon) \cap B$ est ouvert (intersection de 2 ouverts)
donc $\exists \varepsilon' > 0$ tel que $B(x, \varepsilon') \subset B \cap B(x, \varepsilon)$
~~Soit $x' \in B$~~ Or $\exists\, a \in A \cap B(x, \varepsilon')$ par densité de A
donc $a \in A$ et $B(x, \varepsilon') \subset B \cap B(x, \varepsilon)$
donc $a \in A$ et $a \in B$ donc $a \in A \cap B \cap B(x, \varepsilon^*)$

donc $\forall x \in E$ $\forall \varepsilon > 0$ $A \cap B \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$
donc $A \cap B$ dense dans E

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ deux ouverts denses dans } E \implies A \cap B \text{ est un ouvert dense dans } E}$$

Hugo D.

Semaine de colle n°9

Exercice 6 :
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on pose :

$$O = \{f \in E, f(1) > 0\} \qquad \text{et} \qquad F = \{f \in E, \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t \leq 0\}$$

1. Montrer que O est une partie ouverte de $(E, ||.||_\infty)$ mais pas de $(E, ||.||_1)$.
2. Montrer que F est une partie fermée de $(E, ||.||_\infty)$ et de $(E, ||.||_1)$.

Solution :

1) Montrons que $E \setminus O$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

Soit $(f_n) \in (E\setminus O)^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists f \in E$ $\quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

Montrons que $f \in E \setminus O$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad \underset{|f_n(1) - f(1)|}{\underset{\vee\!/}{\|f_n - f\|_\infty}} \leq \varepsilon$

Donc $f_n(1) \to f(1)$ Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(1) \leq 0$
On en déduit que $f(1) \leq 0$

Montrons que $E \setminus O$ n'est pas fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$
Par l'absurde, supposons que $E\setminus O$ est fermé
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - x^n \end{array} \right. \in E \setminus O$ et $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right.$

$0 \leq \|f_n - f\|_1 = \|x^n\|_1 = \int_0^1 |x^n| dx = \dfrac{1}{n+1}$

Par théorème d'encadrement $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$

Comme $E\setminus O$ fermé et f_n converge pour $\|\cdot\|_1$ on en déduit que $f \in E \setminus O$ Or $f(1) = 1 > 0$ donc $f \in O$ $\lightning$

2) Montrons que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

Soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists f \in E \quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

$$\int_0^{1/2} f = \int_0^{1/2} f - f_n + f_n = \int_0^{1/2} f(t) - f_n(t)\,dt + \underbrace{\int_0^{1/2} f_n(t)\,dt}_{\leq 0 \text{ car } f_n \in F} \quad \text{(Linéarité de } \textstyle\int)$$

$$\leq \int_0^{1/2} |f(t) - f_n(t)|\,dt$$

$$\leq \int_0^{1/2} \|f - f_n\|_\infty\,dt = \frac{1}{2}\|f - f_n\|_\infty$$

Par passage à la limite $\int_0^{1/2} f \leq 0$ donc $f \in F$

Montrons que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$

Soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$

$$\int_0^{1/2} f = \int_0^{1/2} f(t) - f_n(t)\,dt + \underbrace{\int_0^{1/2} f_n(t)\,dt}_{\leq 0}$$

$$\leq \int_0^{1/2} |f(t) - f_n(t)|\,dt = \|f - f_n\|_1 - \int_{1/2}^{1} |f(t) - f_n(t)|\,dt$$

$\leq \|f - f_n\|_1$ Par passage à la limite $\int_0^{1/2} f \leq 0$ donc $f \in F$.

Antoine B. colle de la semaine 9.

Soit $\mathcal{U} \underset{o}{\subset} E$ où $(E, \|\cdot\|)$ evn
$\mathcal{U} \neq \emptyset$

Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) = E$.

Une solution :

$\mathcal{U} \neq \emptyset$ donc $\exists u \in \mathcal{U}$.
$\mathcal{U} \underset{o}{\subset} E$ donc $\exists r_u > 0$, $B(u, r_u) \subset \mathcal{U} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$.
$\rightarrow u \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$

- Montrons que $B(0_E, r_u) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$:

Soit $z \in B(0_E, r_u)$, alors $\|z+u-u\| = \|z\| < r_u$.
donc $z+u \in B(u, r_u) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$

Ainsi $z = \underbrace{z+u}_{\in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})} - \underbrace{u}_{\in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ sev.

- montrons maintenant que $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) \supset E$. $\rightarrow$ (on a déjà $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) \subset E$ car c'est un sev de E)

Soit $e \in E$
- si $e = 0_E$: $e = 0_E \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ ✓
- sinon :

$t := \dfrac{r_u}{2\|e\|} \cdot e \in B(0_E, r_u)$ car $\|t\| = \dfrac{r_u}{2} < r_u$.

Ainsi $t \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$, donc $e = \dfrac{2\|e\|}{r_u} \cdot t \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ sev stable par combinaison linéaire.

d'où $\underline{\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) \supset E}$

Tiguin, David — Colle de la semaine 9

EXERCICE 1

Soient E un **R**-*espace vectoriel normé et f l'application définie par :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\max(1, \|x\|)} \end{array} \right. .$$

Q1. — Démontrer que f est 2-lipschitzienne.

On suppose à présent que la norme sur E est euclidienne, i.e. que la norme sur E est associée à un produit scalaire.

Q2. — Soit $x \in E$. Démontrer $f(x)$ est le point de $\overline{B(0_E, 1)}$ qui est le plus proche de x.

Q3. — Démontrer que f est 1-lipschitzienne dans ce cas.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $\left\| \frac{x}{\max(1,\|x\|)} - \frac{y}{\max(1,\|y\|)} \right\| \leq 2\|x-y\|$

Cas 1 : $\max(1, \|x\|) = 1$ et $\max(1, \|y\|) = 1$

Alors ok $\|x-y\| \leq 2\|x-y\|$

Cas 2 : $\max(1, \|x\|) = \|x\|$ et $\max(1, \|y\|) = \|y\|$

Premièrement on écrit

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|\|y\|} \| \|y\| x - \|x\| y \| = \frac{1}{\|x\|\|y\|} \| \|y\|(x-y+y) - \|x\| y \|$$

$$= \frac{1}{\|x\|\|y\|} \| \|y\|(x-y) - (\|x\| - \|y\|) y \|$$

On par inégalité triangulaire

$$\frac{1}{\|x\|\|y\|} \| \|y\|(x-y) - (\|x\| - \|y\|)y \| \leq \frac{1}{\|x\|\|y\|} \left(\|y\| \|x-y\| + \big| \|x\| - \|y\| \big| \|y\| \right) \circledast$$

$\circledast$ $-(\|x\| - \|y\|) \leq \|x\| - \|y\| \leq \big\| \|x\| - \|y\| \big\|$

Finalement comme $\big\| \|x\| - \|y\| \big\| \leq \|x-y\|$ alors

$$\frac{1}{\|x\|\|y\|} \left(\|y\| \|x-y\| + \big\| \|x\| - \|y\| \big\| \|y\| \right) \leq \frac{1}{\|x\|\|y\|} \left(\|y\| \|x-y\| + \|x-y\| \|y\| \right)$$

$$= \frac{2\|x-y\|}{\|x\|}$$

On $\|x\| \geq 1$ d'où $\frac{2\|x-y\|}{\|x\|} \leq 2\|x-y\|$

et $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\|x-y\|$

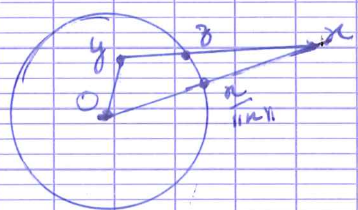
Pour le cas 3 et 4 il suffit de remplacer $\|x\|=1$ et $\|y\|=1$

2. Montrons premièrement que $f(x) \in \overline{B(0,1)}$

- Si $x \in \overline{B(0,1)}$ alors $f(x) = x \in \overline{B(0,1)}$
- Sinon $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \leq 1$ d'où $f(x) \in \overline{B(0,1)}$

Soit $y \in \overline{B(0,1)}$, montrons que $d(x, f(x)) \leq d(x,y)$

- Si $x \in \overline{B(0,1)}$ alors le vecteur le plus proche de lui est lui même
- Sinon



Montrons qu'il existe un $\lambda \in [0,1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

comme $\|\lambda(x-y)+y\|^2 - 1 = \lambda^2\|x-y\|^2 + 2\lambda\langle x-y, y\rangle + \|y\|^2 - 1$

et que $\Delta = 4(\langle x-y, y\rangle)^2 - \underbrace{4\|x-y\|^2(\underset{\leq 1}{\|y\|^2} - 1)}_{\geq 0} \geq 0$

Alors l'équation $\|\lambda(x-y)+y\|^2 = 1$ admet une solution.

Ainsi $\exists \lambda \in [0,1]$ tel que $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = 1$

Vérifions que $\|x-y\| \geq \|x-z\|$

- $\|x-z\| = \|(1-\lambda)x + (\lambda-1)y\| = \|\lambda(y-x) + (x-y)\|$

$$\leq \lambda \|y-x\| + \|x-y\| = \underset{\leq 1}{(\lambda-1)} \|x-y\| \leq \|x-y\|$$

Alors comme

- $\|x\| = \|x-z+z\| \leq \|z\| + \|x-z\| = 1 + \|x-z\|$

Et comme $x - \frac{x}{\|x\|} = \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right)x$ par le cas d'égalité triangulaire

$$\|x\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| + \left\|x - \frac{x}{\|x\|}\right\| = 1 + \left\|x - \frac{x}{\|x\|}\right\|$$

Finalement d'après ce qui précède

$$\left\|x - \frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \|x-z\| \leq \|x-y\|$$