Lina. A

Colle de la semaine 8.

Exercice 103. Soit E l'espace des suites bornées tq $u_0 = 0$. On pose pour toute $u \in E$,

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n| \text{ et } N(u) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que ce sont des normes.
2. Montrer que $N \leqslant 2N_\infty$. Trouver une suite non nulle réalisant l'égalité.
3. Mq ces deux normes ne sont pas équivalentes

Solution :

1. Montrons que N_∞ est une norme:

· Séparation: Soit $u \in E$.

Supposons $N_\infty(u) = 0$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq |u_n| \leq N_\infty(u) = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$.

D'où $u = 0$.

D'autre part on sait que $\|0_E\| = 0$

Ainsi, on a prouvé la séparation de N_∞.

· Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in E$

Si $\lambda = 0$, l'assertion est claire

Si $\lambda \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$|\lambda u_n| = |\lambda| |u_n| \leq |\lambda| N_\infty(u)$.

Par passage au sup : $N_\infty(\lambda u) \leq |\lambda| N_\infty(u)$ (*)

En spécifiant à $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ et $u = \lambda u$ il vient que

$N_\infty(u) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| N_\infty(\lambda u)$.

D'où $|\lambda| N_\infty(u) \leq N_\infty(\lambda u)$ (**)

De (*) et (**) nous déduisons $|\lambda| N_\infty(u) = N_\infty(\lambda u)$.

· Inégalité triangulaire: Soit $(u, v) \in E$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq N_\infty(u) + N_\infty(v)$

Par passage au sup $N_\infty(u+v) \leq N_\infty(u) + N_\infty(v)$

Donc N_∞ est une norme.

N est une norme :

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se prouvent de manière analogue que pour N_∞, montrons la séparation.

On sait que $N(0_E) = 0$

Soit $u \in E$ tel que

$N(u) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant |u_{n+1} - u_n| \leqslant N(u) = 0.$

Donc

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 0.$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante avec $u_0 = 0$.

Donc

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0$

D'où $u = 0$

2. Soit $u \in E$

on sait que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant N_\infty(u)$ et $|u_{n+1}| \leqslant N_\infty(u)$

Donc $|u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n|$

$\leqslant 2 N_\infty(u)$

Par passage au sup : $N(u) \leqslant 2 N_\infty(u)$.

On peut prendre comme exemple la suite définie :

$u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = (-1)^n$

$N_\infty(u) = 1$ et $N(u) = 2$.

Ainsi on obtient : $2 N_\infty = N$.

3. Considérons la suite $u^{(p)}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^{(p)} = \begin{cases} n & \text{si } n \leqslant p \\ p & \text{sinon} \end{cases}$ avec $p \in \mathbb{N}$

Ainsi on a $u_0^{(p)} = 0$ et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n^{(p)} \leqslant p$ donc $u^{(p)} \in E$

Et $N_\infty(u^{(p)}) = p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.

Or

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}^{(p)} - u_n^{(p)} \begin{cases} 1 & n \leq p \quad (\text{et } n+1 \leq p) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc $N_\infty(u^{(p)}) = 1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$.

Ainsi N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Alexandre M.

Colle semaine 8

Enoncé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé

$\mathcal{O} \subset E$ tel que $\mathcal{O}$ convexe, borné et symétrique

Soit $N \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0_E \\ \inf \underbrace{\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* : \frac{x}{\lambda} \in \mathcal{O}\}}_{=:A} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

Montrer que N est une norme sur E.

Résolution :

Comme $\mathcal{O}$ est borné : $\exists M \in \mathbb{R}_+^* \ \forall y \in \mathcal{O} \ \|y\| \leq M$ (*)

on remarque que $\forall x \in E \ N(x) \geq 0$

- Séparation :

Si $x = 0_E$ $N(x) = 0$

Supposons maintenant, par l'absurde qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $N(x) = 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in \mathcal{O}$

on a $M \geq \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|$ [par (*)]

donc $\underbrace{M}_{>0} \geq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|x\|$ [homogénéité]

d'où $\underbrace{|\lambda|}_{=\lambda} \geq \underbrace{\frac{\|x\|}{M}}$ indépendant de λ

par passage à l'inf : $N(x) \geq \frac{\|x\|}{M} > 0$ car $x \neq 0_E$ et séparation de $\|\cdot\|$ Σ

(contredit $N(x) = 0$)

donc $\boxed{\forall x \in E \quad N(x) = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E}$

- **Homogénéité** : Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ (si $x = 0_E$ clair)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\frac{x}{\lambda} \in \mathcal{O}$.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$

- si $\mu = 0$ claire
- si $\mu \neq 0$

on a $\frac{x}{\lambda} = \frac{\mu x}{\mu \lambda} \in \mathcal{O}$

et par symétrie $\frac{\mu x}{-\mu \lambda} \in \mathcal{O}$

donc $\frac{\mu x}{|\mu| \lambda} \in \mathcal{O}$ $\quad |\mu|\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ donc $|\mu|\lambda \in A$

donc $0 \leq N(\mu x) \leq |\mu| \lambda$ [$|\mu| > 0$] [$N(\mu x)$ est un minorant de A]

donc $\underbrace{\frac{N(\mu x)}{|\mu|}}_{\text{indépendant de } \lambda} \leq \lambda$

par passage à l'inf

$$\frac{N(\mu x)}{|\mu|} \leq N(x)$$

donc $\boxed{N(\mu x) \leq |\mu| N(x)}$

en spécialisant à $\mu \leftarrow \frac{1}{\mu}$; $x \leftarrow \mu x$

on a $\boxed{|\mu| N(x) \leq N(\mu x)}$ $\square$

Alexandre M.

- Inégalité triangulaire

Soit $(x,y) \in E^2$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_{>0}^2$

tel que $\frac{x}{a} \in \mathcal{O}$ et $\frac{y}{b} \in \mathcal{O}$

Par convexité de $\mathcal{O}$ on a $[\frac{x}{a}; \frac{y}{b}] \subset \mathcal{O}$

on remarque $\frac{a}{a+b} \in [0,1]$

donc $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} + \underbrace{\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)}_{\frac{b}{a+b}} \cdot \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} \in [\frac{x}{a}; \frac{y}{b}] \subset \mathcal{O}$

[convexité]

donc $\frac{x+y}{a+b} \in \mathcal{O}$

donc $a+b \geq N(x+y)$

donc $a \geq N(x+y) - b$

par passage à l'inf : $N(x) \geq N(x+y) - b$

De même $b \geq N(x+y) - N(x)$

par passage à l'inf $N(y) \geq N(x+y) - N(x)$

d'où $\boxed{N(x+y) \leq N(x) + N(y)}$ $\square$

Sophie G.

Semaine de colle n°8.

Exercice 2 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

1. Montrer que ces suites sont adjacentes.
2. Montrer que la limite commune est un irrationnel.

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

- $v_n - u_n = u_n + \dfrac{1}{(4n+4)!} - u_n = \dfrac{1}{(4n+4)!} \longrightarrow 0$

- $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$

$= \dfrac{1}{(2(2n+2))!} + \dfrac{(-1)}{(2(2n+3))!} = \dfrac{1}{(4n+4)!} - \dfrac{1}{(4n+6)!}$

$= \dfrac{(4n+6)! - (4n+4)!}{(4n+4)!(4n+6)!}$ >0 >0

>0 Donc (u_n) strictement croissante

- $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(4n+8)!} - \dfrac{1}{(4n+4)!}$

$= \cancel{\dfrac{1}{(4n+4)!}} - \dfrac{1}{(4n+6)!} + \dfrac{1}{(4n+8)!} - \cancel{\dfrac{1}{(4n+4)!}}$

$= \dfrac{(4n+6)! - (4n+8)!}{(4n+6)!(4n+8)!}$ <0 >0

donc (v_n) strictement décroissante

D'où $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ adjacentes}}$

2. Supposons par l'absurde $u_n \to \ell$, $v_n \to \ell$; où ℓ rationnel

On pose $\ell = \dfrac{p}{q}$ où $\begin{cases} (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < \dfrac{p}{q} < v_n$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < \dfrac{p}{q} < u_n + \dfrac{1}{(4n+4)!}$

Pour $n < q$

$$u_q (4q+4)! < \underbrace{p \frac{(4q+4)!}{q}}_{\substack{p(4q+4)(4q+3)(4q+2)(4q+1) \\ \times 4 \times (4q-1)! \\ \in \mathbb{N}}} < u_q (4q+4)! + 1$$

d'où $p \frac{(4q+4)!}{q} \in \mathbb{N}$ et est compris strictement entre deux entiers consécutifs ($\oint$)

Donc

$u_n \longrightarrow l$ où $\boxed{l \text{ rationnel}}$
$v_n \longrightarrow l$

Rapport de colle, semaine n° 8

Wassim M.

Enoncé :

Montrer que l'application $N : P \longmapsto \sup\{|P(t) - P'(t)|,\ t \in [0,1]\}$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$

Solution :

. Bien définie : La fonction $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P - P' \end{array} \right.$ est continue (somme de 2 fonctions continues) sur $\mathbb{R}[X]$. f est donc bornée sur $\mathbb{R}[X]$

ainsi l'ensemble $\{P - P' : P \in \mathbb{R}[X]\}$ est fini et majoré

par la propriété de la borne supérieure $\{\sup |P(t) - P'(t)|,\ t \in [0,1]\}$ existe.

. Positivité : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ $\forall t \in [0,1]$, $|P(t) - P'(t)| \geq 0$ donc $\boxed{\sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)| \geq}$

. Séparation : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N(P) = 0$

on a $\sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)| = 0$ donc $\forall t \in [0,1]$ $P(t) - P'(t) = 0$

P a une infinité de racines donc $\boxed{P=0}$

. Homogeneité : Soit $(P,\lambda) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$

$\boxed{. \lambda = 0 : N(0.P) = 0.N(P)}$

~~on sait que~~

. $\lambda \neq 0$: on sait que $\forall t \in [0,1]$

$$|\lambda P(t) - \lambda P'(t)| = |\lambda|\,|P(t) - P'(t)| \leqslant \underbrace{|\lambda| N(P)}_{\text{indep de } t}$$

Par passage au sup sur $t \in [0,1]$:

$|\lambda N(P)| \leqslant |\lambda|\, N(P)$

$\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$ $\quad P \leftarrow \lambda P$: $|\lambda| N(P) \leqslant N(\lambda P)$

donc $\boxed{N(\lambda P) = |\lambda| N(P)}$

. Inegalité triangulaire : Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$

$\forall t \in [0,1] \qquad |P(t) - P'(t) + Q(t) - Q'(t)| \leqslant |P(t) - P'(t)| + |Q(t) - Q'(t)|$

et $|P(t) - P'(t)| + |Q(t) - Q'(t)| \leqslant N(P) + N(Q)$

Par passage au sup sur $t \in [0,1]$

$\cancel{N(P(t) - P'(t)} \ \cancel{N(P)}$ $\boxed{N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)}$

ainsi : $N : P \mapsto P(t) - P'(t)$ définie bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$

Youssef B

Colle de la semaine 8

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall (A,P) \in M_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) \quad \|A\| = \|P^{-1}AP\|$

Solution :

On étudie le cas de $n=2$:

on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On suppose par l'absurde que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse initiale.

On prend $P = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}, 1)$ et on sait que $A \sim B$

Donc $\|A\| = \|B\|$

Or, $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ (homogénéité)

Donc $\|A\| = 0$

Par séparation, $A = 0$

On a une contradiction car $A \neq 0$

Pour $n > 2$:

On applique le même raisonnement en prenant deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ tel que $A = KB$ avec $k \in \mathbb{N}$ et on procède par absurde en utilisant l'homogénéité et la séparation de la norme

Raphaël Trouchonnet colle semaine n°8

Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, dont on note $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base. On pose : $\forall f \in \mathrm{L}(E)$, $\|f\| = \sum_{i=1}^{p} \|f(\vec{e}_i)\|_E$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathrm{L}(E)$.
2. Montrer que si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs dans $\mathrm{L}(E)$, alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si, pour tout $\vec{x} \in E$, la suite $(f_n(\vec{x}))_{n\geqslant 0}$ converge.

1) Séparation :

• $\|0_{\mathcal{L}(E)}\| = \sum_{i=1}^{p} \|0_{\mathcal{L}(E)}(e_i)\|_E \overset{\|\cdot\|_E \text{ norme}}{=} 0$

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f\| = 0$

$\forall i \in [\![1,p]\!]$ $\quad 0 \leq \|f(e_i)\|_E \leq \|f\| = 0$

Par séparation de $\|.\|_E$ $\quad f(e_i) = 0$

Comme f est linéaire $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Donc $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Homogénéité :

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\|\lambda f\| = \sum_{i=1}^{p} \|\lambda f(e_i)\|_E \overset{\|\cdot\|_E \text{ norme}}{=} |\lambda| \sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|_E = |\lambda| \, \|f\|$.

Inégalité triangulaire :

• Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ Soit $i \in [\![1,p]\!]$ Comme $\|.\|_E$ norme

$\|f(e_i) + g(e_i)\|_E \leq \|f(e_i)\|_E + \|g(e_i)\|_E$

Donc $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\exists \ell \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_n \xrightarrow{\|.\|} \ell$

Soit $\|f_n - \ell\| \longrightarrow 0$

Soit $i \in [\![1,p]\!]$

$0 \leq \|f_n(e_i) - \ell(e_i)\| \leq \|f_n - \ell\|$

Donc par théorème d'encadrement

$\|f_n(e_i) - \ell(e_i)\| \longrightarrow 0$

Soit $x \in E$, comme (*), donc $\exists (x_1, \dots, x_n) \in E^p$

tel que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_n(e_i) \right)_{n \in \mathbb{N}}$

une somme de suites convergentes.

Donc $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\forall x \in E$ $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

alors en particulier $\exists (l_1, \dots, l_p) \in E^p$

tel que $\forall i \in [\![1, p]\!]$ $f_n(e_i) \longrightarrow l_i$

On peut donc définir $l \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$\forall i \in [\![1, p]\!]$ $l(e_i) = l_i$

Donc si $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n - l\| = \sum_{i=1}^{p} \|f_n(e_i) - \underbrace{l(e_i)}_{l_i}\|_E$$

Or $\|f_n(e_i) - l\|_E \longrightarrow 0$ où $i \in [\![1, p]\!]$

Donc $\|f_n - l\| \longrightarrow 0$

et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Paul C. Semaine de colle 8

Énoncé :

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$: $\begin{cases} (x_n) \text{ décroissante} \\ n(x_{n+1}+x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{cases}$

1) montrer que $(n x_n)_n$ a une limite

2) peut-on supprimer l'hypothèse de monotonie pour démontrer ce résultat

Solution :

1) • montrons $n(x_{n+2}+x_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

~~Soit $n\in\mathbb{N}$,~~ $(n+1)(x_{n+2}+x_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par hypothèse

donc $(x_{n+2}+x_{n+1}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $n(x_{n+2}+x_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

alors, par combinaison linéaire des suites convergentes $(n(x_{n+1}+x_n))$ et $(n(x_{n+2}+x_{n+1}))$: $n(x_{n+2}+x_{n+1}) - n(x_{n+1}+x_n) = n(x_{n+2}-x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$

L'hypothèse de croissance de (x_n) donne :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n+1} \geq x_{n+2}$

donc $0 \geq x_{n+1}-x_n \geq x_{n+2}-x_n$ $[-x_n]$

donc $0 \geq n(x_{n+1}-x_n) \geq \underbrace{n(x_{n+2}-x_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ $[\times n \geq 0]$

d'où, par théorème d'encadrement, $n(x_{n+1}-x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Soit $\varepsilon>0$: $\exists N_1\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}_{\geq N_1}, |n(x_{n+1}-x_n)| \leq \varepsilon$ (2)

par hypothèse : $\exists N_2\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}_{\geq N_2}, |n(x_{n+1}+x_n)-1| \leq \varepsilon$ (1)

~~(1) équiv~~ Soit $N=\max(N_1,N_2)$, $n\geq N$,

(1) se réécrit $1-\varepsilon \leq n(x_{n+1}+x_n) \leq 1+\varepsilon$

donc ($\cancel{+n(x_{n+1}-x_n)}$) $1-\varepsilon - n(x_{n+1}-x_n) \leq 2n x_n \leq 1+\varepsilon - n(x_{n+1}-x$

or, comme $n \geq N_2 \geq N_1$, on a par (2) $-\varepsilon \leq -n(x_{n+1} - x_n) \leq \varepsilon$

d'où $1 - 2\varepsilon \leq 2n\, x_n \leq 1 + 2\varepsilon$
donc $(\times \frac{1}{2} > 0)$ $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq n x_n \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |n x_n - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$
donc $n x_n$ converge vers $\frac{1}{2}$.

2) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_n = \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

clairement, (u_n) n'est pas décroissante.

notons que $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc, si $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\frac{n}{n+1} - 1| \leq \varepsilon$. (*)

Soit $n \geq N$, $n(u_n + u_{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n}{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$, alors $|1-1| \leq \varepsilon$, alors $|\frac{n}{n+1} - 1| \leq \varepsilon$ par (*)

donc $|n(u_n + u_{n+1}) - 1| \leq \varepsilon$
c'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |n(u_n + u_{n+1}) - 1| \leq \varepsilon$
donc $n(u_n + u_{n+1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

montrons que $(n u_n)$ ne converge pas

$\cdot$ $((2n)(u_{2n})) = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ donc $1 = 2n\, u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
$((2n+1)\, u_{2n+1}) = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ donc $0 = (2n+1)\, u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc, ~~comme $n u_n$~~ $(n u_n)$ ne converge pas.
On ne peut donc pas supprimer l'hypothèse de décroissance

REUTER
Robin

MPI

Rapport de Colle

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, décroissante.
On a $\lim_{n\to+\infty}((x_{n+1}+x_n)n) = 1$.
Montrer que nx_n à une limite.

~~On déduit $\lim_{n\to+\infty}((x_{n+2}+x_{n+1})n) = 1$~~
~~Par linéarité de l'application $\lim_{n\to+\infty}(\cdot)$:~~
~~$\lim_{n\to+\infty}((x_{n+2}-x_n)n) = 0$~~

$(x_n)_n$ est décroissante.
Puisqu'elle est à valeurs réelles positives,
elle est minorée par 0.
$(x_n)_n$ converge donc vers 0.

Par décroissance de $(x_n)_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$,
$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_{n-1}$
$n \geq 0$ donc
$0 \leq nx_{n+1} \leq nx_n \leq nx_{n-1}$
Ajoutons $nx_n \geq 0$
(*) $0 \leq n(x_{n+1}+x_n) \leq 2x_n n \leq n(x_{n-1}+x_n)$

Or on a, pour $\varepsilon > 0$.
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |(x_{n-1}+x_n)(n-1)-1| \leq \varepsilon$
donc
$\forall n \geq N, |(x_{n+1}+x_n)n - x_{n-1} - x_n - 1| \leq \varepsilon$
donc
$\forall n \geq N, -\varepsilon \leq (x_{n+1}+x_n)n - x_{n+1} - x_n - 1 \leq \varepsilon$
donc
$\forall n \geq N, \underbrace{x_{n+1}}_{\to 0} + \underbrace{x_n}_{\to 0} - \varepsilon \leq (x_{n+1}+x_n)n - 1 \leq \varepsilon + \underbrace{x_{n+1}}_{\to 0} + \underbrace{x_n}_{\to 0}$

Par linéarité de la limite,
$\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} + x_n = 0$.

Par théorème d'encadrement,
$\exists N_1 \geqslant N, \forall n \geqslant N_1, |(x_{n+1} + x_n)n - 1| \leqslant \varepsilon$.

Donc, $(x_{n+1} + x_n)n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Ainsi par théorème d'encadrement dans l'inégalité $(*)$:
$n2x_n \longrightarrow 1$.

Ainsi $(nx_n)_n$ admet une limite.
De plus par linéarité de la limite,
$nx_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$.

Rayon. 6

Colle de la semaine n°8

Énoncé : Dans $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$. Soit $w \in E$.
Pour tout $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_a^b |wf|$$

1. Si w ne s'annule pas sur $[a,b]$, montrer que N est une norme. Cette condition est-elle nécessaire ?
2. Si w ne s'annule pas sur $[a,b]$, montrer que N est équivalente à la norme usuelle
3. Que dire si w s'annule en (au moins) un point ?

Solution :

Tout d'abord, commençons par établir des résultats généraux sur $N(.)$:

- $N(.)$ bien défini : Soit $f \in E$
Nous f et w continue sur $[a,b]$ donc $|f w|$ est continue sur $[a,b]$ ce qui nous livre que l'intégrale est bien définie

- $N(.)$ positivité : Soit $f \in E$
$|fw| \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale
$N(f) = \int_a^b |fw| \geq 0$

- $N(.)$ homogénéité : Soit $(f,\lambda) \in E \times \mathbb{K}$

$$N(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f(x)| = \int_a^b |\lambda| |f(x)|$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$N(\lambda f) = |\lambda| \int_a^b |f(x)| = |\lambda| N(f)$$

- $N(.)$ inégalité triangulaire : Soit $(f,g) \in E^2$

$$N(f+g) = \int_a^b |(f+g)(x)| = \int_a^b |f(x)+g(x)|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|+|g(x)| = \int_a^b |f(x)| + \int_a^b |g(x)|$$

$$= N(f) + N(g)$$

Donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

Cette étude nous permet de justifier que prouver que $N(.)$ est une norme revient à démontrer la séparation de $N(.)$

Q1 On suppose que w ne s'annule pas sur $[a,b]$
Soit $f \in E$ tel que $N(f)=0$

Donc $|f(x)| \geq 0$ et $\int_a^b |f(x)| = 0$, par séparation de l'intégrale : $f(x) = 0$
La non-nullité de w sur $[a,b]$ donne $f=0$
La séparation étant vérifiée $N(.)$ est une norme

Montrons que la condition de non-annulabilité sur $[a,b]$ n'est pas nécessaire.

On pose $c \in [a,b]$

Supposons que $w \in \{ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : f(c)=0$ et
$\exists N \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in ([a,b] \cap]c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}[\setminus \{c\})$
$f(x) \neq 0 \} := A$

On remarque que cet ensemble est non vide car

$$f \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x-c \end{array} \right. \in A$$

donc on peut supposer que w y appartient.

On pose :

$(x_n) = (a+\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ si $c=a$

$(x_n) = (c-\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sinon

Nous les avons car

$(x_n \underset{n \to +\infty}{\to} c)$ et $(\exists N_2 \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq N_2 \quad x_n \in [a,b]$ (car $c \in [a,b]$))

Par hypothèse sur w
$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq N_1$
$\forall x \in [a,b] \cap]c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}[\setminus \{c\}$
~~$f(x) \neq 0$~~ $w(x) \neq 0$
et $w(c)=0$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$
$\forall n \geq N \qquad w(x_n) \neq 0$

Soit $f \in E$ tel que $N(f)=0$

On étudie la réponse et on obtient :

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x)\,w(x)=0$$

Soit $x \in$ Π_n où $n \geq N$ nous avons donc :

$$f(x_n)=0$$

Or par continuité $f(x_n) \to f(c)$

Par unicité de la limite $f(c)=0$

Ainsi si w s'annule sur un nombre fini de points, cela ne remet pas en cause la réponse.

(Remarque : Nous aurions pu conclure par un contre-exemple tel que donné pour prouver ~~la non nullité de~~ le caractère non vide de A mais le raisonnement établi nous permet de tirer une propriété supplémentaire sur les points d'annulation de w)

Q2 On suppose que w ne s'annule pas sur $[a,b]$

Soit $f \in E$

$|w|$ est une fonction continue sur un segment donc

$$\exists (m,M) \in (\mathbb{R}^+)^2 \qquad m \leq |w| \leq M$$

et

$$\exists (x_1,y_1) \in [a,b]^2 \qquad m=|w(x_1)| \quad \text{et} \quad M=|w(x_2)|$$

L'hypothèse tirée donne $m > 0$ et $M>0$

$$N(f)=\int_a^b |wf| = \int_a^b |f|\,|w|$$

Donc

$$m\int_a^b |f| \leq N(f) \leq M\int_a^b |f| \quad \|f\|_1$$

On en déduit $N(.) \sim \|.\|_1$

Q3] Supposons que w s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

<u>Par disjonction de cas:</u>

- Si w s'annule sur un nombre fini de points, l'étude établie en Q1 fait que la séparation est démontrable (raisonnement analogue appliqué à chaque point d'annulation) donc $N_.$) est une norme
- Si w s'annule en une infinité de points

  On étudie le cas où w s'annule sur un segment:

  $\exists (c,d) \in [a,b]^2,\ c<d$

  $w([c,d]) = \{0\}$

Montrons que dans ce dernier cas, la séparation n'est pas vérifiée.

Par gain de temps, nous allons supposer $a \neq c$ et $d \neq b$ (cas analogue à des changements de définition près)

On pose

$$f \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a,c] \cup [d,b] \\ \frac{2}{d-c}(x-c) & \text{si } x \in \left]c, \frac{c+d}{2}\right] \\ \frac{2}{c-d}(x-d) & \text{si } x \in \left]\frac{c+d}{2}, d\right[\end{cases} \end{array} \right.$$

C'est une fonction continue par morceaux mais il est relativement clair qu'elle est continue sur $[a, b]$ (En étendant les limites gauches et droites en c et d)

On

$$N(f) = \int_a^b |f(t)| = \int_a^c \overbrace{|f(t)|}^{=0} + \int_c^d \overbrace{|f(t)|}^{=0} + \int_d^b \overbrace{|f(t)|}^{=0} = 0$$

Or $f \neq 0$, ainsi la séparation n'est pas vérifiée

Louis D. Semaine de colle n° 8

Enoncé :

Soit (E,N) un evn et $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_{>0}$

Déterminer $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}(a,r))$

Solution :

Si $x \in E$ on imagine pouvoir le "réduire" de manière à ce qu'il appartienne à $\mathcal{B}(a,r)$, puis pouvoir le multiplier par un scalaire pour lui redonner sa norme initiale.

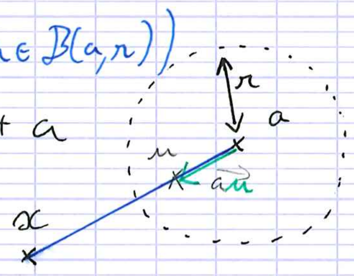
On conjecture $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}(a,r)) = E$

Montrons que : $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}(a,r))$

$\boxed{\supset}$ $\mathcal{B}(a,r) \subset E$

Par minimalité, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}(a,r)) \subset E$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in E \setminus \{a\}$ $(a \in \mathcal{B}(a,r))$



On pose $u = \dfrac{x-a}{N(x-a)} \dfrac{r}{2} + a$

$$N(u-a) = \frac{r}{2} < r$$

Donc $u \in \mathcal{B}(a,r)$

$$x - a = (u-a)\frac{N(x-a)}{N(u-a)}$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{(u-a)}_{\in \mathcal{B}(a,r)} \underbrace{\frac{N(x-a)}{N(u-a)}}_{\mathbb{R}} + \underbrace{a}_{\in \mathcal{B}(a,r)} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}(a,r))$$

Tipuin, David Colle de la semaine 8

Exercice 4 : Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||A|| = \underset{i\in[\![1,n]\!]}{max}(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|)$

1. Montrer que $||.||$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que cette norme est sous multiplicative ce qui signifie :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, ||AB|| \leqslant ||A|| \times ||B||$$

3. Pour X élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $N(X) = \underset{i\in[\![1,n]\!]}{max}(|x_i|)$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

   (a) Vérifier que $N(AX) \leqslant ||A||N(X)$.

   (b) En déduire que si λ est une valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant ||A||$.

1. $||0|| = 0_{\mathbb{R}}$ et $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $||A|| \geqslant 0$, elle est bien définie

• Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $||A|| = 0$ alors $\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2$

$0 \leqslant |a_{k,l}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| \leqslant \underset{i\in[\![1,n]\!]}{max}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) = 0$

coefficients de A   somme des coefs d'une ligne

donc $|a_{k,l}|$ bornée et $|a_{k,l}| = 0$ d'où $A = 0$

• Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\lambda = 0$ alors $||\lambda A|| = |\lambda|\,||A|| = 0$

Sinon $\lambda \neq 0$, on sait $\forall k \in [\![1,n]\!]$

$\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{kj}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \leqslant |\lambda|\,||A||$

par passage au max $||\lambda A|| \leqslant |\lambda|\,||A||$

On remplace $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$ et $A \leftarrow \frac{1}{\lambda}A$ donc on obtient $|\lambda|\,||A|| \leqslant ||\lambda A||$

D'après ce qui précède $||\lambda A|| = ||\lambda A||$

• Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, on sait $\forall k \in [\![1,n]\!]$

$\sum_{j=1}^{n} |a_{kj} + b_{kj}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \leqslant ||A|| + ||B||$

Par passage au max $||A+B|| \leqslant ||A|| + ||B||$

2. Premièrement $\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]$ le coefficient de AB est noté

$[AB]_{k,l} = \sum_{r=1}^{n} a_{kr} b_{rl}$, la somme de ses ~~lignes~~ colonne par colonne est

$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{kr} b_{rj}$, on obtient alors l'inegalité :

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{r=1}^{n} a_{k,r} b_{rj} \right| \underset{①}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} |a_{k,r} b_{r,j}| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} |a_{k,r}| |b_{r,j}|$$

Ce dernier terme est égal à $\sum_{r=1}^{n} |a_{k,r}| \sum_{j=1}^{n} |b_{r,j}|$

or $\sum_{r=1}^{n} |a_{k,r}| \overset{②}{\leq} \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$, de même pour b

ainsi par ① et ②

$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{r=1}^{n} a_{k,r} b_{rj} \right| \leq \|A\| \|B\|$ et par passage au max

$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

3) Premièrement $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$[AX]_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$ donc

$N(AX) = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \underset{①}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} x_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| |x_k|$

② Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \leq \|A\|$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$

$|x_k| \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} (|x_i|) = N(X)$ d'où par (1) et (2)

$N(AX) \leq \|A\| N(X)$

Soit λ une valeur propre de A alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$ alors comme

N est une norme (Norme N_∞ pour $\mathbb{R}^n$)

on obtient $N(AX) = N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$
homogeneité

De plus d'après (a) $|\lambda| N(X) \leq \|A\| N(X)$ et

comme $X \neq 0$ $N(X) \neq 0$ d'où

$|\lambda| \leq \|A\|$.

MATHEON

Rapport de colle Semaine 8.

EXERCICE 7

Q1. — Donner un exemple de matrice A non-nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit semblable à $2A$.

Q2. — Existe-t-il sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une norme $||\cdot||$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $||PAP^{-1}|| = ||A||$?

Q. 1. Supposons A, une telle matrice, de la similitude de A et $2A$ nous tirons :

$Tr(A) = Tr(2A) = 2Tr(A)$ donc $Tr(A) = 0$

et $\det(A) = \det(2A) = 4\det(A)$ donc $\det(A) = 0$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, φ_A endomorphisme canoniquement associé à A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

on a. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = A$

posons $e_2' = 2e_2$

On a : $\varphi(e_2') = 2\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2')$ base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

On a alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi_A) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2') \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2' \end{array} \end{array} = 2A$

Ainsi : A est semblable à $2A$.

Q. 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$

On pose $M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{2}{\leftrightarrow} & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) & \updownarrow n-2 \\ \begin{array}{cc} & \underset{n-2}{\leftrightarrow} \end{array} & \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrons que M est semblable à $2M$:

Soit $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telque $A = P\,2A\,P^{-1}$ $(A \sim 2A)$

On pose $N = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$

on a : $N \times \left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right) = I_n$.

Ainsi : $N \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)$

On a alors : $N \times 2M \times N^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P\times 2A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \times N^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P\times 2A \times P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Ainsi $N \times 2M \times N^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = M$

donc $\underline{M \sim 2M}$.

• Supposons qu'il existe sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une norme $\|\cdot\|$ telle que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in GL_n(\mathbb{R})$:
$\|NMN^{-1}\| \underset{(*)}{=} \|M\|$

On aurait : $2\|M\| = \|2M\| = \|N2MN^{-1}\| = \|M\|$ [homogénéité de la norme + (*)]

Soit $\|M\| = 0 \Rightarrow M = 0$ ↯
[séparation de la norme]

Ainsi, il ne peut exister de telle norme.

Ibrahim. K.

Colle de la semaine

on se place sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

Soit $\Omega \in E$.

$\forall f \in E \quad N(f) = \int_0^1 |\Omega f|$.

- montrer que si Ω s'annule pas N est une norme, cette condition est elle nécessaire ?
- Si Ω s'annule pas montrer que N est équivalente à $\|.\|_1$.

→ 1 – Séparation.

Soit $f \in E$ tq $N(f) = 0$ ainsi

$\int_0^1 |\Omega f| = 0$ or $|\Omega f| \in E$ et $|\Omega f| \geq 0$.

par séparation de l'$\int$ on a

$\forall x \in [0,1] \quad |\Omega(x) f(x)| = 0$

donc $\forall x \in [0,1] \quad \Omega(x) f(x) = 0$ or Ω s'annule pas

donc $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0 : f = 0$.

Homogénéité

Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$:

$N(\lambda f) = \int_0^1 |\Omega(\lambda f)| = |\lambda| \int_0^1 |\Omega f|$ (linéarité de l'$\int$).

Inégalité triangulaire.

Soit $(f,g) \in E^2$

$N(f+g) = \int_0^1 |\Omega(f+g)| = \int_0^1 \underbrace{|\Omega f + \Omega g|}_{\leq |\Omega f| + |\Omega g|}$

par croissance de l'intégrale

$N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

→ Supposons que α s'annule en un seul point x_0
ainsi comme l'homogénéité et l'inégalité triangulaire ne font pas intervenir l'annulité de Ω on s'intéresse à la séparation.

Soit $f \in E$ tq $N(f) = 0$

$\forall x \in [0,1]$ $\alpha(x) f(x) = 0$

ainsi $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$

ainsi on pose $u_n = x_0 + \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$

$u_n \longrightarrow x_0$ et par continuité de f

$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(u_n)} \longrightarrow f(x_0)$ donc $f(x_0) = 0$.

→ par le théorème des bornes atteintes comme $|\alpha|$ est C^0 sur un segment)
alors $\exists (m, M) \in (\mathbb{R}^*_{>0})$

$m \leq |\alpha| \leq M$

donc

$m|f| \leq |\alpha||f| \leq M|f|$

donc par croissance de l'intégrale

$m\|f\|_1 \leq N(f) \leq M\|f\|_1$

Anaë D.

Rapport de colle S8

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+nx^2} \end{array} \right.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad x_1 = a$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f_n(x_n)$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $\quad nx_n \leq 1$
- Montrer que nx_n est croissante après le rang 2

Solution :

- On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Définition du prédicat : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $P(n) =$ " $nx_n \leq 1$ "

Initialisation : $n = 2$

$x_2 = f_1(x_1) = \dfrac{a}{1+a^2}$ $\quad$ d'où $\quad 2x_2 = \dfrac{2a}{1+a^2}$

Montrons que $\quad 2a \leq 1 + a^2$

On sait que $\quad 0 \leq (a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$

$\Rightarrow \boxed{2a \leq a^2 + 1}$

Donc $2x_2 \leq 1$ et $P(2)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $\quad (n+1)x_{n+1} \geq 0$

$(n+1)x_{n+1} = (n+1)f_n(x_n) = (n+1)\dfrac{\overbrace{x_n}^{\leq 1}}{\underbrace{(1+nx_n^2)}_{\leq 1+n}}$ $\quad$ (hypothèse de récurrence)

≤ 1

Donc $P(n+1)$ est vraie

- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $(n+1)x_{n+1} - nx_n \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$(n+1)x_{n+1} - nx_n = (n+1)\dfrac{x_n}{1+nx_n^2} - nx_n$

d'où $(n+1)x_{n+1} - nx_n = \dfrac{nx_n + x_n - nx_n(1+nx_n^2)}{1+nx_n^2}$

$$= \dfrac{x_n - n^2 x_n^3}{1+nx_n^2} \geq 0$$

Montrons que $x_n(1-n^2x_n^2) \geq 0$

$$x_n(1-n^2x_n^2) = \underbrace{x_n}_{\geq 0}\underbrace{(1-n\overset{\leq 1}{x_n})}_{\geq 0}\underbrace{(1+n\overset{\geq 1}{x_n})}_{\geq 0} \geq 0$$

Donc la suite est croissante après le rang 2.

Martin Kiribeb-Eliezer

Rapport de colle, semaine 8

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}.$$

Etudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} + \frac{1}{n+1}. \end{array} \right.$$

f_n est bien définie, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.
On pose ~~$\Delta_n : f_n($~~ $\Delta_n : x \longrightarrow f_n(x) - x$. Δ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \Delta_n'(x) = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Une analyse de signes livre par critère différentiel de stricte monotonie :
- Δ_n est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{4}[$
- Δ_n est strictement décroissante sur $]\frac{1}{4}, +\infty[$

Or $f_n(0) > 0$, donc Δ_n ne peut posséder qu'un unique point fixe. Or $f_n(1) > 1$ et $f_n(100) = 10 + \frac{1}{n+1} < 100$; par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ \Delta_n(1) \geq 0,\ \Delta_n(100) < 0 \\ \cdot\ \Delta_n \in \mathcal{C}^0([1,100],\mathbb{R})\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists a_n \in [1,100],\ f(a_n) = a_n .$$

~~Or, $f_n(a_n) = \sqrt{a_n + \frac{1}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{a_n} = a_n$ donc $a_n \in \{0,1\}$~~

On voit $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 1$.

Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, par le théorème de la limite monotone,

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède donc $\{0,1\}$ comme ensemble de limites potentielles. On distingue deux cas par la suite.

<u>$u_1 \geq u_0$ i.e. $u_0 < 1$.</u>

Par le théorème de la limite monotone, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (f est croissante),

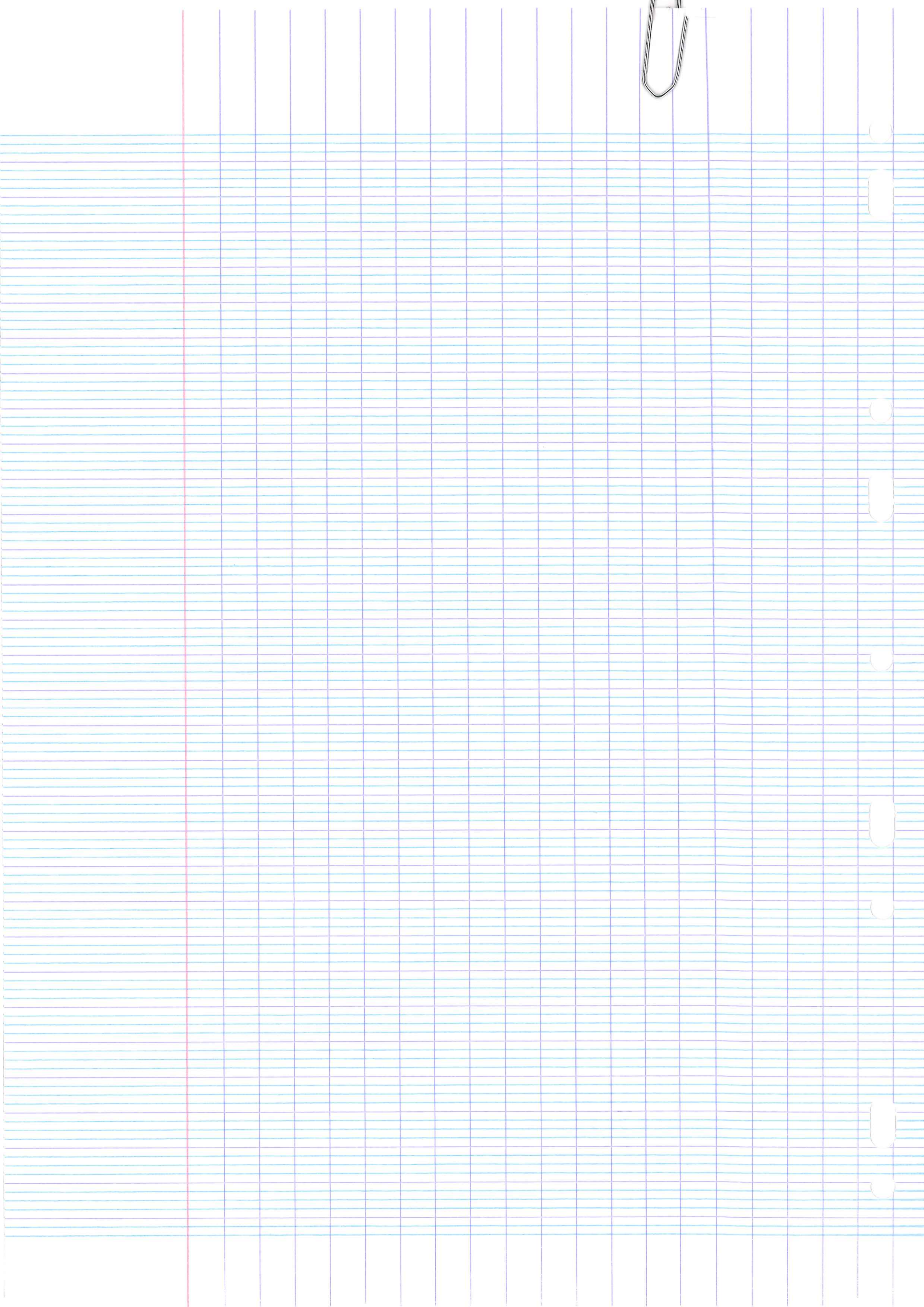
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}.$$

En effet, $u_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $u_1 > 0$.

<u>$u_1 < u_0$ i.e. $u_0 > 1$.</u>

De même, puisque $]1, +\infty[$ est stable par f, on montre que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 .}$$



Oudoire
Gatien

Montrer que $\|.\| = \|.\|_\infty + \|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa sphère unité

Montrons que $\|.\|$ est une norme

- $\|.\|$ est bien définie
- Soit $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = 0$

donc $\|x\|_\infty + \|x\|_1 = 0$

donc $\|x\|_\infty = \|x\|_1 = 0$ car les normes sont à valeur dans $\mathbb{R}^+$

donc $x = 0$ car $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont des normes

Reciproquement $\|0\| = 0$

donc $\|x\| = 0 \iff x = 0$

- Soient $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,

$\|\lambda x\| = \|\lambda x\|_1 + \|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\,\|x\|_1 + |\lambda|\,\|x\|_\infty$

$= |\lambda|\left(\|x\|_1 + \|x\|_\infty\right) = |\lambda|\,\|x\|$

- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

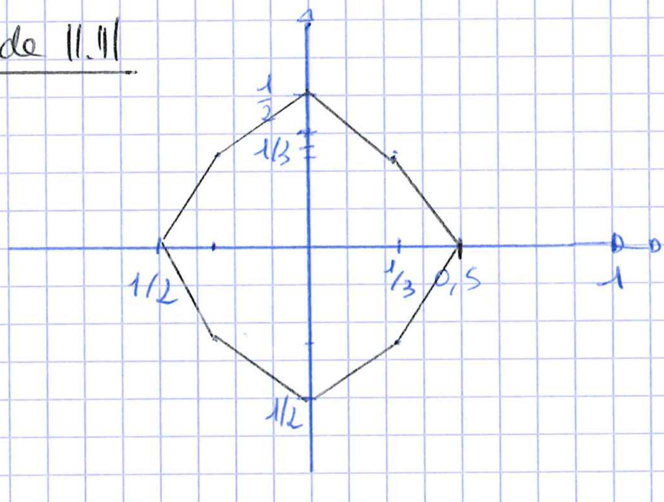
$\|x+y\| = \|x+y\|_1 + \|x+y\|_\infty$

$\leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$\leq \|x\| + \|y\|$

donc $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Sphère unité de $\|.\|$



Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Si $y = 0$:

$N((x,y)) = 2|x|$

donc $|x| = \frac{1}{2}$

Si $x = y$

$\|(x,y)\| = 3|x|$

donc $|x| = |y| = \frac{1}{3}$

Rémi . S

Semaine n° 8

Exercice 3 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des applications définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$.
Si φ est un élément de E^+, on pose :

$$\forall f \in E, ||f||_\varphi = \int_0^1 \varphi(t)|f(t)|\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\forall \varphi \in E^+$, $||.||_\varphi$ est une norme sur E.
2. Soit φ_1 et φ_2 deux éléments de E^+, montrer que $||.||_{\varphi_1}$ et $||.||_{\varphi_2}$ sont deux normes équivalentes.
   Indication : Montrer que les deux normes sont équivalentes à la norme $||.||_1$ classique de E.
3. Soit $\varphi_1 : x \mapsto x$ et $\varphi_1 : x \mapsto x^2$ définies sur $[0,1]$.
   (a) Expliquer brièvement pourquoi $||.||_{\varphi_1}$ et $||.||_{\varphi_2}$ sont deux normes de E.
   (b) Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes en utilisant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall t \in [0,\frac{1}{n}], f_n(t) = 1 - nt$ et $\forall t \in [\frac{1}{n},1], f_n(t) = 0$

Solution : 1. Soit $\varphi \in E^+$

- Soit $f \in E$

$\|f\|_\varphi = 0$ donc $\int_0^1 \varphi(t)|f(t)|\,dt = 0$

par séparation de l'intégrale.

$\forall t \in [0;1]$ $\varphi(t)|f(t)| = 0$

donc $\forall t \in [0;1]$ $f(t) = 0$ car $\varphi(t) > 0$

- Homogénéité : Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\|\lambda f\|_\varphi = \int_0^1 \varphi(t)\,|\lambda f(t)|\,dt$

$= |\lambda| \int_0^1 \varphi(t)\,|f(t)|\,dt$

$= |\lambda|\,\|f\|$

- Inégalité triangulaire : Par inégalité triangulaire sur $|.|$ et $\int_0^1$

2. φ_1 continue sur $[0;1]$ par les bornes atteintes

$\exists (m;M) \in \mathbb{R}$ $m \le \varphi_1 \le M$

donc $m\int_0^1|f| \le \int_0^1 \varphi_1|f| \le M\int_0^1|f|$ [croissance de l'intégrale]

donc $m\|f\|_1 \le \|f\|_{\varphi_1} \le M\|f\|_1$

donc $\|.\|_1 \sim \|.\|_{\varphi_1}$

De même $\|.\|_1 \sim \|.\|_{\varphi_2}$

donc $\|.\|_{\varphi_1} \sim \|.\|_{\varphi_2}$

3. a) analogue à Q_1 pour homogénéité et inégalité triangulaire

Soit $f \in E$

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = 0$$

donc $\forall x \in [0;1]$ $x f(x) = 0$

donc $\forall x \in]0;1]$ $f(x) = 0$

Par continuité de f, $f(0) = 0$

de même pour $\varphi_2 = x^2$

b) $\displaystyle\int_0^1 x f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} x(1-nx)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0$

$$= \int_0^{1/n} x\,dx - n\int_0^{1/n} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

$$\int_0^1 x^2 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} x^2(1-nx)\,dx$$

$$= \int_0^{1/n} x^2\,dx - n\int_0^{1/n} x^3$$

$$= \frac{1}{3n^3} - n \times \frac{1}{4n^4}$$

$$= \frac{1}{12n^3}$$

donc $\| n^2 f_n \|_{\varphi_1} \to \frac{1}{6}$

$\| n^2 f_n \|_{\varphi_2} \to 0$

donc $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ ne sont pas équivalente

Jules R. Colle de la semaine 8

Enoncé :
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réelles tel que $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Solution :
Soit $(l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\begin{cases} U_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 \\ U_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2 \\ U_{13n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_3 \end{cases}$

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle a une unique valeur d'adhérence donc il suffit de montrer que $l_1 = l_2 = l_3$.

Posons $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 26n \end{array}\right.$ strictement croissante.

La suite extraite $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ a ses termes communs à $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} U_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 \\ U_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_3 \end{array}\right\} \underset{\text{(unicité de la limite)}}{\Longrightarrow} l_1 = l_3$$

Posons maintenant $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 13n \end{array}\right.$ strictement croissante.

La suite extraite $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ a ses termes communs à $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} U_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2 \\ U_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_3 \end{array}\right\} \underset{\text{unicité de la limite}}{\Longrightarrow} l_2 = l_3$$

Célia A

Semaine n°8 Colle n°5

énoncé :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que :
$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} 0 \leq u_n \leq 2 \\ 0 \leq v_n \leq 3 \end{cases}$ et $u_n v_n \longrightarrow 6$.
Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Solution

. Montrons que $v_n \to 3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $0 \leq u_n \leq 2$
D'où : $0 \leq u_n v_n \leq 2v_n$ $(v_n \geq 0)$
Or, $v_n \leq 3$, donc : $0 \leq u_n v_n \leq 2v_n \leq 6$.
Enfin, $0 \leq \frac{1}{2} u_n v_n \leq v_n \leq 3$.

Par théorème d'encadrement, $v_n \longrightarrow 3$.

. Montrons que $u_n \longrightarrow 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $0 \leq v_n \leq 3$
D'où $0 \leq u_n v_n \leq 3u_n$ $(u_n \geq 0)$
Comme $u_n \leq 2$, $0 \leq u_n v_n \leq 3u_n \leq 6$.
Enfin, $0 \leq \frac{1}{3} u_n v_n \leq u_n \leq 2$.

Par théorème d'encadrement, $u_n \longrightarrow 2$.

Robin G.

Colle de la semaine 9 (MS)

1) Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ non nulle qui soit semblable à $2A$.

2) Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \forall P \in GL_n(\mathbb{R})\ \|A\| = \|PAP^{-1}\|$?

Solution :

1) • Supposons qu'une telle A existe.

$A \sim 2A$ et par invariance de $\det(\cdot)$ et $\mathrm{Tr}(\cdot)$ par similitude,

$\det(A) = \det(2A)$ et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(2A)$.

Or $\det(2A) = 2^2 \det(A) = 4A$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2\mathrm{Tr}(A)$

Donc $\det(A) = \mathrm{Tr}(A) = 0$.

De plus, $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2$

Ainsi $A^2 = 0$ (Cayley-Hamilton).

• Soit $\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*}$. Montrons que $A \sim 2A$.

On pose $\mathcal{B}_0 := (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{C} := (e_1, 2e_2)$ base de $\mathbb{R}^2$
$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associée à A.

Alors
$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array} = \mathrm{Mat}_{B_0}(f)$$

$$2A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1) & f(2e_2) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ 2e_2 \end{array} \end{array} = \mathrm{Mat}_{C}(f)$$

car $f(2e_2) = 2f(e_2) = 2ae_1$

A et $2A$ représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, donc (théorème de changement de base). $\underline{A \sim 2A}$.

2) Par l'absurde. Supposons qu'une telle norme existe.

• pour $n = 2$: Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ tq $\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$ $2A = PAP^{-1}$

$\|A\| = \|PAP^{-1}\|$ (hypothèse)
$= \|2A\|$
$= 2\|A\|$ (homogénéité)

$\Longrightarrow \|A\| = 0$ $\underline{\text{contredit}}$ $A \neq 0$ par séparation de $\|\cdot\|$.

• pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$:
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, comme précédemment, $M := \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-2 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ n-2 \end{array}$

• On pose $Q := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ (inversibles car $|P| \neq 0$ et $QQ^{-1} = I_n$)

• On vérifie $Q \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & PAP^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2M$.

Alors $\|M\| = \|QMQ^{-1}\|$ (hypothèse)
$= \|2M\|$
$= 2\|M\|$
or $M \neq 0$, <u>contradiction</u>.

<u>Il n'existe pas de telle norme.</u>

3/3

Mehdi B. Colle de la semaine 8.

Exercice 3 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des applications définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$.
Si φ est un élément de E^+, on pose :

$$\forall f \in E, ||f||_\varphi = \int_0^1 \varphi(t)|f(t)|\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\forall \varphi \in E^+$, $||.||_\varphi$ est une norme sur E.
2. Soit φ_1 et φ_2 deux éléments de E^+, montrer que $||.||_{\varphi_1}$ et $||.||_{\varphi_2}$ sont deux normes équivalentes.
   Indication : Montrer que les deux normes sont équivalentes à la norme $||.||_1$ classique de E.
3. Soit $\varphi_1 : x \mapsto x$ et $\varphi_1 : x \mapsto x^2$ définies sur $[0,1]$.
   (a) Expliquer brièvement pourquoi $||.||_{\varphi_1}$ et $||.||_{\varphi_2}$ sont deux normes de E.
   (b) Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes en utilisant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall t \in [0,\frac{1}{n}], f_n(t) = 1 - nt$ et $\forall t \in [\frac{1}{n},1], f_n(t) = 0$

<u>Solution</u> 1) Soit $\varphi \in E^+$. φ est strictement positive sur $[0,1]$

• Soit $f \in E$. $||f||_\varphi$ est bien définie et positive car $\varphi \times |f|$ est continue et positive sur $[0,1]$ (positivité de l'intégrale).

• D'une part, $||0||_\varphi = 0$.
D'autre part, si $f \in E$ telle que $||f||_{\varphi_1} = 0$, alors :

- $\int_0^1 \varphi(t)|f(t)|\,dt = 0$

- $\varphi \times |f|$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$

- $\varphi \times |f|$ est positive sur $[0,1]$

Par séparation de l'intégrale, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t)|f(t)| = 0$. Or $\varphi(t) \neq 0$ donc $|f(t)| = 0$, puis $f = 0$ sur $[0,1]$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$.

$$\|\lambda f\|_\varphi = \int_0^1 \varphi(t)\underbrace{|\lambda f(t)|}^{|\lambda||f(t)|}dt = |\lambda|\,\|f\|_\varphi$$ (linéarité de l'intégrale)

• Soit $(f,g) \in E$.

$$\|f+g\|_\varphi = \int_0^1 \varphi(t)\underbrace{|f(t)+g(t)|}_{\leq |f(t)|+|g(t)|}dt \leq \int_0^1 \varphi(t)|f(t)|dt + \int_0^1 \varphi(t)|g(t)|dt$$

(croissance de l'intégrale)

$$= \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$$

Ainsi :

$$\boxed{\|.\|_\varphi \text{ est une norme sur } E}$$

2) • $\|.\|_{\varphi_1}$ équivalente à $\|.\|_1$ ($\forall f \in E$ $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$)

φ_1 est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in [0,1]$, $m \leq \varphi(x) \leq M$.
De plus φ atteint ses bornes donc $m > 0$ et $M > 0$.
Soit $t \in [0,1]$.

$$m \leq \varphi(t) \leq M$$

$$\underset{|f(t)|\geq 0}{\Longrightarrow} m|f(t)| \leq \varphi(t)|f(t)| \leq M|f(t)|$$

$$\Longrightarrow m\int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \varphi(t)|f(t)|dt \leq M\int_0^1 |f(t)|dt$$

Soit $m\|f\|_1 \leq \|f\|_{\varphi_1} \leq M\|f\|_1$ avec $m>0$, $M>0$.

Donc $\|.\|_{\varphi_1}$ et $\|.\|_1$ sont équivalentes.

On montre de même que $\|.\|_{\varphi_2}$ et $\|.\|_1$ sont équivalentes. Par transitivité de la relation d'équivalence « être équivalent » pour les normes de E, on obtient

$$\boxed{\|.\|_{\varphi_1} \text{ et } \|.\|_{\varphi_2} \text{ sont équivalentes}}$$

3) On remarque $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ donc φ_1 et φ_2 ne sont pas des éléments de E^+.

a) La stricte positivité de φ n'a été nécessaire, pour établir que $\|.\|_\varphi$ était une norme en 1), uniquement pour la séparation. En reprenant la démonstration :

$\forall t \in [0,1] \quad \varphi_1(t)|f(t)| = 0$

en particulier pour $t \in]0,1]$: $\underbrace{\varphi_1(t)}_{\neq 0}|f(t)| = 0$

donc f est la fonction nulle sur $]0,1]$. Par continuité de f, on a f nulle sur $[0,1]$.

Les mêmes arguments valent pour φ_2, donc $\underline{\|.\|_{\varphi_1} \text{ et } \|.\|_{\varphi_2}}$
$\underline{\text{sont deux normes de } E}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons :

$$\|f_n\|_{\varphi_1} = \int_0^1 t|f_n(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} t|1-nt|dt + \cancelto{0}{\int_{1/n}^1 t \times 0\, dt}$$

$0 \leq t \leq \frac{1}{n} \overset{n>0}{\Rightarrow} 0 \leq nt \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -nt \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1-nt \leq 1$

donc $|1-nt| = 1-nt$

$$\|f_n\|_{\varphi_1} = \int_0^{1/n} t(1-nt)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} - n\frac{t^3}{3}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{6n^2} \to 0$$

On calcule de même $\|f_n\|_{\varphi_2} = \frac{1}{12n^3} \longrightarrow 0$

On remarque que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\varphi_1}} 0$ et $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\varphi_2}} 0$.
Considérons la suite $(n^2 f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et calculons :

- $\|n^2 f_n\|_{\varphi_1} = n^2 \|f_n\|_{\varphi_1} = \frac{1}{6} \not\to 0$

- $\|n^2 f_n\|_{\varphi_2} = n^2 \|f_n\|_{\varphi_2} = \frac{1}{12n} \longrightarrow 0$

On a exhibé une suite de fonctions de E, $(n^2 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 au sens de $\|\cdot\|_{\varphi_2}$, mais pas au sens de $\|\cdot\|_{\varphi_1}$. Ainsi :

$$\boxed{\|\cdot\|_{\varphi_1} \text{ et } \|\cdot\|_{\varphi_2} \text{ ne sont pas équivalentes}}$$

Stanislas G

semaine de colle n°8

Enoncé : Montrer que l'application $N : f \mapsto |f(0)|+|f'(0)|+\int_0^1|f''|$ définit sur $E=\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ est une norme

Solution :

1) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in E$

- **homogenité :**

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)|+|\lambda f'(0)|+\int_0^1|\lambda f''| \overset{\text{linéarité de } \int}{=} |\lambda|\left(|f(0)|+|f'(0)|+\int_0^1|f''|\right)$$
$$= |\lambda|\, N(f) \quad \text{donc}$$

$$\boxed{N(\lambda f) = |\lambda| N(f)}$$

- **séparation :**

Supposons $N(f)=0=\underbrace{|f(0)|}_{\geq 0}+\underbrace{|f'(0)|}_{\geq 0}+\underbrace{\int_0^1|f''|}_{\geq 0}$ (positivité de $\int$)

alors $\begin{cases} f(0)=0 & (L_1)\\ f'(0)=0 & (L_2)\\ \int_0^1|f''| = \| \,|f''|\, \|_1 = 0 & (L_3)\end{cases}$

(L_3) nous donne $|f''|=0$ (séparation de la norme 1 pour $|f''|$)

par conséquent $f''=0$ donc f' est constante

(L_2) nous donne que $f'=0$ donc f est constante

(L_1) nous donne que $f=0$ donc

$$\boxed{N(f)=0 \implies f=0}$$

- **inégalité triangulaire** Soit $(f,g)\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$

Soit $x\in[0,1]$ on a :

$|f''(x)+g''(x)| \leq |f''(x)|+|g''(x)|$ (inégalité triangulaire pour $|\cdot|$)

donc $|f''+g''| \leq |f''|+|g''|$

donc $\int_0^1|f''+g''| \leq \int_0^1 |f''|+|g''|$ (croissance de $\int$)

donc $\int_0^1|f''+g''| \leq \int_0^1|f''|+\int_0^1|g''|$ (L_1) (linéarité de $\int$)

de plus $|f(0)+g(0)| \leqslant |f(0)|+|g(0)|$ (L_2) (inégalité triangulaire pour $|\cdot|$)

de même $|f'(0)+g'(0)| \leqslant |f'(0)|+|g'(0)|$ (L_3)

en additionnant (L_1), (L_2) et (L_3) on obtient

$$\underbrace{|f(0)+g(0)|+|f'(0)+g'(0)|+\int_0^1|f''+g''|}_{N(f+g)} \leqslant \underbrace{|f(0)|+|f'(0)|+\int_0^1|f''|}_{N(f)}+\underbrace{|g(0)|+|g'(0)|+\int_0^1|g''|}_{N(g)}$$

donc $\boxed{N(f+g) \leqslant N(f)+N(g)}$

donc $\boxed{N \text{ est une norme de } E}$

Piero T. Colle de la semaine 8

Exercice 112.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $x_n \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(x_n) = -nx_n$.
2. Déterminer la monotonie puis la nature, convergente ou divergente, de la suite (x_n).
3. Déterminer un équivalent simple de x_n.
   On pourra examiner la relation satisfaite par $y_n = nx_n$.

<u>Solution :</u>

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f_n \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) + nx \end{array} \right.$

f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$.

de plus $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

donc par le théorème des valeurs intermédiaire :
$\exists x_n \in]0,+\infty[\quad f_n(x_n) = 0$
et cet x_n est et unique par injectivité de f_n.

donc $\exists ! x_n \in]0,+\infty[\quad \ln(x_n) = -nx_n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$f_n(x_{n+1}) = \ln(x_{n+1}) + nx_{n+1} = \ln(x_{n+1}) + (n+1)x_{n+1} - x_{n+1}$
$= f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1}$
$= -x_{n+1} < 0 \qquad (x_{n+1} \in]0,+\infty[)$

donc $f_n(x_{n+1}) < 0 = f_n(x_n)$
donc comme f_n est strictement croissante : $x_{n+1} < x_n$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et minorée par 0,
par le théorème de la limite monotone elle est donc convergente.

3. Par l'absurde supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow \ln(x_n) \longrightarrow \ln(\underbrace{l}_{>0}) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -nx_n \longrightarrow \ln(l)$

$\Rightarrow n \longrightarrow -\dfrac{\ln(l)}{l} \in \mathbb{R}$ ↯ $(n \to +\infty)$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$$\left.\begin{array}{l} -\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \\ x_n \longrightarrow 0^+ \end{array}\right\} \underset{\text{de limites}}{\overset{\text{par composition}}{\Rightarrow}} -\ln(x_n) \longrightarrow +\infty$$

donc $y_n = -\ln(x_n) \longrightarrow +\infty$.

$y_n = nx_n = -\ln(x_n) = -\ln\left(\dfrac{y_n}{n}\right) = \ln(n) - \ln(y_n)$

donc $\ln(n) = y_n + \ln(y_n) = y_n + o(y_n)$ (croissance comparée)
donc $\ln(n) \sim y_n$
et donc $x_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Léa N.

Colle de la semaine n°18

Énoncé :

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?

Solution :

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

$$\|f\|_1 = \langle |f|, 1 \rangle \leq \|f\|_2 \, \|1\|_2 = \|f\|_2$$

(Cauchy - Schwarz)

On cherche $(f_n) \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$$

et

$$f_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array} \right.$$

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\|\sqrt{2n+1}\, f_n\|_1 = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \longrightarrow 0$$

$$\|\sqrt{2n+1}\, f_n\|_2 = 1 \not\longrightarrow 0$$

Donc $\boxed{\|\cdot\|_1 \text{ et } \|\cdot\|_2 \text{ ne sont pas équivalentes sur } \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})}$

Titouan

D

Rapport de colle semaine 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definie par $u_0 \geq 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$

Est ce que (u_n) converge et si oui, quelle est sa limite ?

On s'interresse à $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $v_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$

On pose $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} - x \end{array} \right.$ bien definie et derivables sur $\mathbb{R}_{>0}$

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

x	$0]$		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$-$	
f	$f(0)=0]$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(1)=0$	$\searrow$	

On applique le théorème des valeurs intérmédiaires pour avoir la convergence de (v_n)

Ainsi, si $v_0 > 1$ $\quad (v_n)$ décroissante et converge vers 1

si $v_0 = 1$ $\quad (v_n)$ constante et converge donc vers 1

si $0 < v_0 < 1$ $\quad (v_n)$ croissante et converge vers 1

si $v_0 = 0$ $\quad (v_n)$ constante et converge vers 0

en $+\infty$ $\quad u_{n+1} \sim \sqrt{u_n}$ $\quad$ car $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc on distingue 3 cas

- si $u_0 = 0$ alors $u_1 = \frac{1}{2}$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (voir cas 2)
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n \leq 1$:

$u_n \leq 1$ donc $\sqrt{u_n} \geq u_n$

donc (u_n) croissante majorée et de l'analyse precedente

(u_n) converge vers 1.

• $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad u_{n_0} > 1$

on montre par récurrence que

Comme $u_{n_0} > 1 \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n > 1$

Initialisation à n_0 par hypothèse

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1$

alors $u_{n+1} = \underbrace{\sqrt{u_n}}_{>1} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} > 1$

Donc par l'analyse précédente

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n + \frac{1}{n+1}$$
$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{u_n} - u_n < 0$$

Ainsi $\exists n_1 \geqslant n_0$ tel que

$\forall n \geqslant n_1 \quad u_{n+1} < u_n$

ainsi en $+\infty$ (u_n) décroissante et minorée donc

(u_n) converge vers 1

$$\boxed{(u_n) \text{ est une suite convergente et } \lim_{n \to +\infty} (u_n) = 1}$$

Maximilien T. Colle de la Semaine 8

Exercice 8. $\boxed{\text{evn5}}$
Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Soit f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $||.||_f$ définie par
$$\forall x \in \mathrm{E},\ ||x||_f = ||f(x)||,$$
soit une norme sur E
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $||.||_s$ définie par
$$\forall x \in \mathrm{E},\ ||x||_s = ||f(x)|| + ||g(x)||,$$

Solution :

1) Montrons $||\cdot||_g$ est une norme $\Leftrightarrow g$ est injective

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons g injective

$||\cdot||_g$ est positive

Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Soit $x \in E$ $||\lambda x||_g = ||g(\lambda x)|| \overset{g \in \mathscr{L}(E)}{=} ||\lambda g(x)|| = \lambda ||x||_g$

$\leq \Delta$: Soit $(x,y) \in E^2$ $||x+y||_g \overset{g \in \mathscr{L}(E)}{=} ||g(x)+g(y)|| \overset{(\leq \Delta \text{ de } ||.||)}{\leq} \underbrace{||g(x)||}_{||x||_g} + \underbrace{||g(y)||}_{||y||_g}$

Séparation Soit $x \in E$ tel que $||x||_g = 0$ alors $||g(x)|| = 0$
$\Rightarrow g(x) = 0$ (Séparation de $||.||$)
d'où $x = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $||\cdot||_g$ est une norme

Soit $x \in E$ tel que $g(x) = 0$ alors $||x||_g = 0$ d'où $x = 0$

2) $\|\cdot\|_s$ est une norme $\Leftrightarrow$ $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Positivité, $\leq \Delta$, Homogénéité même raison qu'avant

Séparation Soit $x \in E$ tel que $\|f(x)\| + \|g(x)\| = 0$

$\cancel{\|f(x)+g(x)\|} \leq$

Alors $\cancel{f(x)+g(x)=0}$ $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 0$

Donc $x \in \ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\|\cdot\|_s$ une norme

$\boxed{\supset}$ ✓

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \ker(f) \cap \ker(g)$

$$\|x\|_s = \underbrace{\|f(x)\|}_{0} + \underbrace{\|g(x)\|}_{0} = 0$$

Par séparation de $\|\cdot\|_s$, $x = 0$.

Hugo D. Semaine de colle n°8

Exercice 8. evn33 Soit $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour f élément de E, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)|dt, N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$ $N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\,dt$. Montrer que N, N' et N'' sont des normes et les comparer.

Solution

- N, N' et N'' sont positives
- Si $f = 0_E$ $N(f) = N'(f) = N''(f) = 0$
- Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$ Comme $|f|$ est continue et positive, par séparation de l'intégrale $|f| = 0_E$ donc $f = 0_E$
- Soit $f \in E$ telle que $N'(f) = 0$ Donc $\underbrace{|f(0)|}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 |f'(t)|dt}_{\geq 0} = 0$

On en déduit que $|f(0)| = \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$
Par séparation de l'intégrale $f' = 0$ donc f est constante
Comme $f(0) = 0$, f est nulle.

- On rédige de manière analogue pour N''

- Soit $(f,g) \in E^2$ $N(f+g) = \int_0^1 |f(t) + g(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt$
Par inégalité triangulaire de $\mathbb{R}$ $= N(f) + N(g)$
et linéarité de $\int$
- Soit $(f,g) \in E^2$ $N'(f+g) = |f(0) + g(0)| + \int_0^1 |(f+g)'(t)|dt$
$\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt + \int_0^1 |g'(t)|dt$
Linéarité de la dérivation $= N'(f) + N'(g)$
- Analogue pour N''

- Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R}\times E$ $N(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)|dt = \int_0^1 |\lambda|\,|f(t)|dt = |\lambda| N(f)$
- Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{K}\times E$ $N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|dt = |\lambda|\,(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt)$
$= |\lambda|\,N'(f)$

- Analogue pour N''

Soit $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ on pose $f_m \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^m \end{array} \right.$

$N(f_m) = \int_0^1 |f_m(t)| dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+1} \to 0$

$N'(f_m) = 0 + \int_0^1 |f_m'(t)| dt$
$= \int_0^1 m t^{m-1} dt = m \left[\frac{t^m}{m} \right]_0^1 = 1 \not\to 0$

$\boxed{\text{Donc } N \text{ et } N' \text{ ne sont pas équivalentes}}$

$N''(f_m) = m(m-1) \int_0^1 t^{m-2} dt = m(m-1) \left[\frac{t^{m-1}}{m-1} \right]_0^1 = m \to +\infty \not\to 0$

$\boxed{\text{Donc } N \text{ et } N'' \text{ ne sont pas équivalentes}}$

Par l'absurde supposons $\exists \alpha > 0$ tel que
$N'' \leq \alpha N'$
En évaluant en f_m on a : $N''(f_m) \leq \alpha$
On obtient une contradiction en passant à la limite.

$\boxed{\text{Donc } N' \text{ et } N'' \text{ ne sont pas équivalentes}}$

Antoine B. colle de la semaine 8.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et N_1, N_2 les app de E dans $\mathbb{R}$ définies respectivement pour tout $f \in E$ par :

. $N_1(f) = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt$

. $N_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$

démontrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E, puis qu'elles sont équivalentes.

Une solution :

montrons d'abord que N_1 est une norme sur E.

. Positivité : . $\forall f \in E$, $|f(0)| \geqslant 0$

. $\forall f \in E$, f' est bien défini et $\forall t \in [0,1]$ $|f'(t)| \geqslant 0$

donc $\int_0^1 |f'(t)|\,dt \geqslant 0$

par croissance de l'intégrale.

donc $\forall f \in E$, $N_1(f) = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \geqslant 0$.

. Séparation : ∘ $N_1(0_E) = 0$

∘ Soit $f \in E$ tel que $N_1(f) = 0$.

alors $|f(0)| \overset{(1)}{=} 0$. et $2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \overset{(2)}{=} 0$

de plus, comme $f' \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $|f'(t)| \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$

$(2) \underset{\substack{\text{séparation} \\ \text{de l'intégrale}}}{\Longrightarrow} |f'| = 0_E$ ie : $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) = 0$.

$(1) \underset{\substack{\text{séparation} \\ \text{de } |.|}}{\Longrightarrow} f(0) = 0$

donc $f(0)=0$ et f est constante sur $[0,1]$.

donc $f = 0_E$. ✓

• homogénéité : Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$.

$$N_1(\lambda f) = |\lambda f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda f'(t)|\,dt$$

$$= |\lambda|\,|f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda|\,|f'(t)|\,dt \quad \text{(homogénéité de } |\cdot|\text{)}$$

$$= |\lambda| \left(|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \right) \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$

$$= |\lambda|\, N_1(f).$$

• inégalité triangulaire : Soit $(f,g) \in E^2$.

$$N(f+g) = |(f+g)(0)| + 2\int_0^1 |(f+g)'(t)|\,dt$$

$$= |f(0)+g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\,dt$$

$$\underset{\text{inégalité triangulaire de } |\cdot| \text{ et croissance de l'intégrale}}{\leq} |f(0)| + |g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|+|g'(t)|\,dt \underset{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} N_1(g) + N_1(f)$$

On procède de la même façon pour montrer que N_2 est norme sur E.

. N_1 et N_2 équivalentes:

Soit $f \in E$,

$$\bullet\ 2N_1(f) = \underbrace{2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt}_{=N_2(f)} + \underbrace{3\int_0^1 |f'(t)|\,dt}_{\geq 0}$$

$$\geq N_2(f).$$

$$\bullet\ \frac{1}{2}N_1(f) = \underbrace{2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|}_{=N_2(f)} \underbrace{-\frac{3}{2}|f(0)|}_{\geq 0}$$

$$\leq N_2(f)$$

Ainsi, on a : $\underline{\frac{1}{2} N_1(f) \leq N_2(f) \leq 2\, N_2(f)}$.

Nicolas . M Colle de la semaine 8

Enoncé

On considère un entier non nul n, et la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3+n^2x-2$

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante
3. Calculer $f_n(\frac{1}{n})$. En déduire que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
4. Déterminer un équivalent de la suite (a_n)

Solution:

1/ f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_n'(x) = 3nx^2+n^2$.

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_n'(x) > 0$, donc n'est pas nulle sur un segment
- f_n est continue

donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $f_n(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Car f_n est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection

$\tilde{f}_n = f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}\right.$ est bijective

donc l'équation $f_n(x)=0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2/ $f_n(0) = -2$ $f_n(1) = n+n^2-2 \geq 0$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $a_n \in [0,1]$.

Soit $x\in\mathbb{R}$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^3 + (2n+1)x$

Ainsi,

$$\underbrace{f_{n+1}(a_{n+1})}_{0} - f_n(a_{n+1}) = a_{n+1}^3 + (2n+1)a_{n+1}$$

Ainsi, $f_n(a_{n+1}) = -(a_{n+1}^3 + (2n+1)a_{n+1}) < 0$

- Comme $f_n(a_n)=0$, f_n est continue est strictement croissante, et $f_n(a_n) \geq f_n(a_{n+1})$

  $a_n \geq a_{n+1}$

donc $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

3) $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + n - 2$

- $\forall n \geq 3$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0$,

  donc $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$

- $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par théorème d'encadrement, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4) $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^5} - 1 \leq 0$, $f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^5} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n \in \left[\frac{1}{n^2} ; \frac{2}{n^2}\right]$ donc $n^2 a_n \in [1;2]$

- $f_n(x) \underset{0}{=} -2 + n^2 x + n x^3 + o(x^3)$

donc $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} -2 + n^2 x_n + o(x_n)$

Ainsi, $n^2 x_n \underset{n\to+\infty}{=} 2 + o(x_n)$

donc $x_n \sim \frac{2}{n^2}$

Pierre V. Colle de la semaine 8

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_{>0}$

Déterminer $\mathrm{Vect}(B(a, r))$

Solution

Montrons que $\mathrm{Vect}(B(a,r)) = E$

$\boxed{\subset}$ L'inclusion est claire car $\mathrm{Vect}(B(a,r))$ est un sous-espace engendré de E

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in E$

1^e^ cas si $x = a$

Alors $\|x-a\| = 0 < r$ donc $x \in \mathrm{Vect}(B(a,r))$

2^e^ cas si $x \neq a$

$\frac{r}{2\|x-a\|} x \in B(a,r)$ car $\left\| \frac{r}{2\|x-a\|} x - a \right\| = \frac{r}{2} < r$

Ainsi $x \in \mathrm{Vect}(B(a,r))$

MANGIACOMINI
Aurélien

Rapport de colle

On prend la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ \forall n \geq 1 \quad x_{n+1} = f_n(x_n) \end{cases}$$

où $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+nx^2} \end{array}\right.$

1) Mq $\forall n \geq 2 \quad nx_n \leq 1$

2) Mq $(nx_n)_{n\geq 2}$ est monotone

3) (nx_n) admet-elle une limite ?

---

1) Par récurrence $\forall n \geq 2$ $P(n)$: « $0 < nx_n \leq 1$ »

(I) $n = 2$ on a : $(x_1 - 1)^2 \geq 0$

donc $x_1^2 - 2x_1 + 1 \geq 0$

donc $x_1^2 + 1 \geq 2x_1$

donc $x_1^2 + 1 \geq 2x_1$

donc $0 < \dfrac{\overbrace{2x_1}^{>0}}{\underbrace{1+x_1^2}_{>0}} \leq 1$

$x_2 :=$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tq $P(n)$ soit vraie,

donc par H.R. $\underbrace{(1 - x_n)}_{\geq 1 - nx_n \geq 0} \underbrace{(nx_n - 1)}_{\leq 0} \leq 0$

donc $(n+1)x_n - 1 - n x_n^2 \leq 0$

donc $(n+1)x_n \leq 1 + n x_n^2$

donc $0 < \dfrac{\overbrace{(n+1)x_n}^{\geq 0}}{\underbrace{1 + n x_n^2}_{\geq 0}} \leq 1$ □

$(n+1)x_{n+1} =$

Par récurrence on conclut $\forall n \geq 2$ $P(n)$.

2) $\underbrace{x_n}_{>0} \left(\underbrace{1 - n^2 x_n^2} \right) \leq 0$

$0 <$ $\quad 0 \leq$ car $0 < n x_n \leq 1$

$\begin{pmatrix} x \mapsto x^2 \\ \nearrow\nearrow \text{sur } \mathbb{R}_+ \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < n^2 x_n^2 \leq 1$

$\Rightarrow 0 > -n^2 x_n^2 \geq 1$

$\Rightarrow 1 > 1 - n^2 x_n^2 \geq 0$

donc $x_n - n^2 x_n^3 \leq 0$

donc $(n+1)x_n - n x_n - n^2 x_n^3 \leq 0$

donc $(n+1)x_n + (\underbrace{1 + n x_n^2}_{\neq 0})(-n x_n) \leq 0$

donc $\dfrac{(n+1)x_n}{1 + n x_n^2} - n x_n \leq 0$

donc $\underbrace{\dfrac{(n+1)x_n}{1 + n x_n^2}}_{(n+1)x_{n+1}} \leq n x_n$

②

MANGIACOMINI, Simone
Amélien

$(nx_n)_{n\geq 2} \nearrow$

3) $(nx_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée par 1

donc d'après le thm de la limite monotone elle converge vers $\sup_{n\geq 2} nx_n$.

3

[illegible]

Ce

Uta Bayen de Neyer

Rapport de colle - semaine n° 8

Exercice 5 :

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?

Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}\ f_n : x \mapsto \sqrt{2n+1}\, x^n$

Alors $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\, dt$

$= \sqrt{2n+1} \int_0^1 t^n\, dt$

$= \dfrac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \xrightarrow[(cc)]{} 0$

$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f_n(t)^2\, dt}$

$= \sqrt{2n+1} \sqrt{\int_0^1 t^{2n}\, dt}$

$= \sqrt{2n+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$= 1 \longrightarrow 1$

Comme il existe une suite qui converge vers 0 avec $\|\cdot\|_1$ et non avec $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Léon.

Rapport de colle de la semaine n° 8

Énoncé :

1 Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation $\tan(x) = x$ d'inconnu $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution dans l'intervalle $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ que l'on notera x_n.

2 Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Proposer un développement asymptotique à 3 termes de (x_n).

Solution : soit $n \in \mathbb{N}$,

Posons $\Delta_n \left| \begin{array}{l} I_n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) - x \end{array} \right.$

Δ_n est dérivable sur I_n et pour tout $x \in I_n$ $\Delta_n'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1$
$= \tan^2(x) \geq 0$

Sa dérivée ne s'annule qu'une fois sur I_n en $n\pi$ (bijectivité de tan sur I_n et $\tan(0)$ et $n\pi$ périodicité donnent $\tan(n\pi) = 0$).

Par critère différentiel de stricte monotonie, Δ_n est $\nearrow\nearrow$ sur I_n.

$\tan(x) \xrightarrow[x \to n\pi + \frac{\pi}{2}]{} +\infty$

et $\left.\begin{array}{l}\\ \\ -x \xrightarrow[x \to n\pi + \frac{\pi}{2}]{} -(n\pi + \frac{\pi}{2})\end{array}\right\}$ par opération sur les limites $\Delta_n(x) \xrightarrow[x \to n\pi + \frac{\pi}{2}]{} +\infty$

De manière analogue $\Delta_n(x) \xrightarrow[x \to n\pi - \frac{\pi}{2}]{} -\infty$

Comme Δ_n est continue sur I_n, par ~~description des~~ théorème de la bijection enrichi (Δ_n est $\nearrow$ (monotone)),

Δ_n est bijective et $\Delta_n(I_n) = \mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{\exists!\, x_n \in I_n, \quad \tan(x_n) = x_n.}$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$

ainsi par théorème d'encadrement, $\underbrace{1 - \frac{\pi}{2n\pi}}_{\longrightarrow 1} < \frac{x_n}{n\pi} < \underbrace{1 + \frac{\pi}{2n\pi}}_{\longrightarrow 1}$

$\frac{x_n}{n\pi} \longrightarrow 1$ ainsi $\boxed{x_n \sim n\pi.}$

3. On étudie $(d_n) = (x_n - n\pi.)$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

on a $\tan(d_n) \underset{\pi \text{ périodicité}}{=} \tan(x_n) \underset{1)}{=} x_n$

ainsi comme $d_n \in I_0$, $d_n = \text{Arctan}(x_n)$

or $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ~~par continuité d'Arct~~ par composition de limites

et $\text{Arctan}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

$d_n \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. ainsi $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$

et donc $x_n \sim n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose $y_n = \frac{\pi}{2} - \underbrace{(x_n + n\pi)}_{d_n} = \frac{\pi}{2} - \arctan(x_n)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

on a $y_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right) \sim \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}$

$\sim \frac{1}{n\pi}$

ainsi $\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$