Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ $f^2 - f - 2\,id = 0$

1. Montrer f bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

2. Prouver $E = \operatorname{Ker}(f+id) \oplus \operatorname{Ker}(f-2id)$
(a) Avec le lemme des noyaux
(b) Sans le lemme des noyaux

3. Supposons E de dimension finie
Montrer $\operatorname{Im}(f+id) = \operatorname{Ker}(f-2id)$

Solution

1) $f^2 - f - 2id = 0$ $(*)$

$(*) \Rightarrow f\circ(f-id) = 2id \Rightarrow f\circ\left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}id\right) = id$

$(*) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}id\right)\circ f = id$

donc $\boxed{f \text{ bij et } f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}id}$

2) (a) Posons $P = (X+1)$ $Q = (X-2)$ $PQ = X^2 - X - 2$

Comme $P \wedge Q = 1$

Par le lemme des noyaux

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(PQ(f))}_{E \text{ car } (*)} = \operatorname{Ker}(\underbrace{P(f)}_{f+id}) \oplus \operatorname{Ker}(\underbrace{Q(f)}_{f-2id})$$

(b) Analyse Soit $x \in E$ Supposons : $\exists (y,z) \in \operatorname{Ker}(f+id) \times \operatorname{Ker}(f-2id)$ $x = y+z$ $(☆)$

$$\begin{cases} f(x) = f(y) + f(z) = -y + 2z & (1) \\ x = y + z & (2) \end{cases}$$

- $(1) + (2) \Rightarrow z = \dfrac{x + f(x)}{3}$
- $(1) - 2\times(2) \Rightarrow y = \dfrac{2x - f(x)}{3}$

Sont nos deux uniques candidats pour $(☆)$

Synthèse

- $x = \dfrac{x + f(x)}{3} + \dfrac{2x - f(x)}{3} = z + y$
- $f(y) + y = -\frac{1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - 2x\right) = 0$ $(*)$
- $f(z) - 2z = \frac{1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - 2x\right) = 0$ $(*)$

Donc que ce soit (a) ou (b) on a $\boxed{E = Ker(f+id) \oplus Ker(f-2i}$

3) Supposons E dimension finie

Montrons $Im(f+id) = Ker(f-2id)$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in Im(f+id)$ Montrons $y \in Ker(f+2id)$

i.e $\exists\, x \in E$ tel que $f(x) + x = y$

$$\Rightarrow f(y) = f^2(x) + f(x)$$

$$\Rightarrow f(y) - 2y = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$$

$$y \in Ker(f-2id)$$

Donc

$$\boxed{Im(f+id) \subset Ker(f-2id)} \quad Ⓐ$$

$\boxed{\text{dimension}}$ Par 2) on sait : $E = Ker(f+id) \oplus Ker(f-2id$

$\Rightarrow n = dim(Ker(f+id)) + dim(Ker(f-2id))$

Par le theoreme du rang $n = dim(Ker(f+id)) + dim(Im(f+id))$

$$\Rightarrow \cancel{n} = \cancel{n} - dim(Im(f+id)) + dim(Ker(f-2id))$$

Donc

$$\boxed{dim(Im(f+id)) = dim(Ker(f-2id))} \quad Ⓑ$$

Par Ⓐ et Ⓑ

$$\boxed{Im(f+id) = Ker(f-2id)}$$

Lina. A.

Colle de la semaine n°=7.

Enoncé:

Exercice 2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, on considère l'équation

$$(E) : AM = MB \quad \text{où } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est l'inconnue.}$$

1. On suppose que (E) possède une solution non nulle M.
   (a) Montrer que pour tout polynôme P à coefficients complexes, on a $P(A)M = MP(B)$.
   (b) Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
2. On suppose que A et B ont une valeur propre commune.
   (a) Montrer que si X et Y sont deux vecteurs colonnes non nuls alors la matrice XY^T est non nulle.
   (b) Montrer que (E) admet des solutions non nulles.

Solution:

1.(a) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

$P(k)$: « $A^k M = MB^k$ ».

Initialisation au rang 0 :

$$A^0 M = I_n M = M I_n = MB^0$$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ vraie montrons $P(k+1)$:

$$A^{k+1} M = A A^k M \underset{H.R}{=} AMB^k = MB^{k+1} \quad [M \text{ solution de } (E)].$$

Conclusion, Par l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k M = MB^k.$$

Ainsi

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] : P(A)M = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k A^k M = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k MB^k = M \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k B^k$$

D'où $\boxed{P(A)M = MP(B).}$

1/7

(b) D'après (a) :

$\forall P \in \mathbb{C}[X] \qquad P(A)M = MP(B).$

En particulier

$$\chi_A(A)M = M\chi_A(B)$$

$\Longrightarrow M\chi_A(B) = 0 \ (*)$ [Par Cayley-Hamilton].

Or comme $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors par le théorème de d'Alembert-Gauss χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A 2 à 2 distinctes $m_1, \ldots, m_r$ leur multiplicité respectives avec $r \in \mathbb{N}^*$.

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Donc

$(*) \Rightarrow M \prod_{i=1}^{r} (B - \lambda_i I_n)^{m_i} = 0. \ (**)$

Montrons que $\prod_{i=1}^{r} (B - \lambda_i I_n)^{m_i}$ est non inversible.

Par l'absurde si $\prod_{i=1}^{r} (B - \lambda_i I_n)^{m_i}$ est inversible

Alors $(**) \times \left(\prod_{i=1}^{r} (B - \lambda_i I_n)^{m_i}\right)^{-1} \Rightarrow M = 0$ ↯.

Donc

$$\det\left(\prod_{i=1}^{r} (B - \lambda_i I_n)^{m_i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{r} \det(B - \lambda_i I_n)^{m_i} = 0$$

$$\Rightarrow \exists i \in [\![1, r]\!], \ \det(B - \lambda_i I_n) = 0$$

$$\Rightarrow \exists i \in [\![1, r]\!], \ \chi_B(\lambda_i) = 0.$$

D'où

$$\boxed{\exists i \in [\![1, r]\!] \ \lambda_i \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \text{ et } \lambda_i \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(B).}$$

2. (a). Soit $(X, Y) \in \left(M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\}\right)^2$

$\exists (i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$[X]_{i_0,1} \neq 0 \text{ et } [Y]_{j_0,1} \neq 0.$$

Ainsi

$$[XY^T]_{i_0,j_0} = \sum_{l=1}^{n} [X]_{i_0,l} [Y]_{j_0,l}.$$

$$= \underbrace{[X]_{i_0,1} [Y]_{j_0,1}}_{\neq 0}$$

$\boxed{\text{Donc } XY^T \text{ est non nulle}}$.

Lina. A.

(b) Par hypothèse

$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(B)$.

Soit $X_A \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$X_A \neq 0$$

$$AX_A = \lambda X_A.$$

$X_B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$X_B \neq 0$$

$$BX_B = \lambda X_B.$$

Par 2.(a). $X_A X_B^T \neq 0$.

Vérifions si $X_A X_B^T$ est solution de :

(E) : $AM = MB$ où $M \in M_n(\mathbb{C})$ est l'inconnu.

$$AX_A X_B^T = \lambda X_A X_B^T.$$

$$X_A X_B^T B = ((X_A X_B^T B)^T)^T$$

$$= (B^T X_B X_A^T)^T$$

Comme $\chi_B = \chi_{B^T}$ alors $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(B^T)$

D'où $B^T X_B = \lambda X_B$.

D'où $$X_A X_B^T B = (\lambda X_B X_A^T)^T$$
$$= \lambda X_A X_B^T$$
$$X_A X_B^T B = AX_A X_B^T.$$

Donc $\boxed{\text{(E) possède des solutions non nulles.}}$

Mouchonnet Raphael colle semaine n° 7

Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$ tel que $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = I_n$. Montrer que $A^{12} = I_n$

X^{n-1} annule A et est scindé à racine simple sur $\mathbb{C}$.

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ $\exists D \in M_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$

Alors $\exists (d_1, d_2) \in Spec_{\mathbb{C}}(A) \subset Spec_{\mathbb{C}}(X^n - 1) = \mathbb{U}_n$

tel que $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ avec $|d_1| = 1$ et $|d_2| = 1$

Or $A \in M_2(\mathbb{Z})$ donc $Tr(A) = Tr(D) \in \mathbb{Z}$ et $det(A) = det(D) \in \mathbb{Z}$

Donc $d_1 d_2 \in \mathbb{Z}$ et $d_1 + d_2 \in \mathbb{Z}$

Comme $|d_1 d_2| = |d_1||d_2| = 1$ alors $d_1 d_2 \in \{-1, 1\}$

Comme $|d_1 + d_2| \leq |d_1| + |d_2| = 2$ alors $d_1 + d_2 \in [\![-2, 2]\!]$

si $d_1 d_2 = 1$ alors $d_2 = \overline{d_1}$

Or $d_1 + d_2 = 2Re(d_1) \in [\![-2, 2]\!]$

$\Longrightarrow Re(d_1) = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

Comme $d_1 \in \mathbb{U}_n$ alors $d_1 \in \{-1, j, i, -i, -j, 1\}$

et $(d_1, d_2) \in \{(-1, -1), (j, \overline{j}), (i, -i), (-i, i), (-j, -\overline{j}), (1, 1)\}$

si $d_1 d_2 = -1$ alors $d_2 = -\overline{d_1}$

De même

$$(d_1, d_2) = \{(-1,1), (j, -\bar{j}), (i, i), (-i, -i), (-j, \bar{j}), (1, -1)\}$$

Comme 12 est paire on ne considère pas les opposés

Ainsi

$$D^{12} \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{12}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{12}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -\bar{j} \end{pmatrix}^{12}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \bar{j} \end{pmatrix}^{12}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^{12}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^{12} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc par récurrence on montre

$$\boxed{A^{12} = PD^{12}P^{-1} = PP^{-1} = I_2}$$

MANGIALOMINI
Aurélien

Rapport de Colle

CCINP 93. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n strictement positive. Soit u un endomorphisme de E. On suppose $u+u^2+u^3=0$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$

$\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$

$\boxed{\supset}$ ok.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$

donc $\exists\, y_0 \in E$ tq $u(y_0) = x$

or $u = -u^2 - u^3$

donc $\overset{}{\underset{x}{\underset{\shortparallel}{u(y_0)}}} = -u^2(y_0) - u^3(y_0)$

$= -u(x) - u^2(x)$

$\left(x \in \mathrm{Ker}(u)\right) \quad = 0$

Or $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u) \subset E$ clairement.

$\dim(\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$

(Grassmann et E de dimension finie)

(Formule du rang) $= \dim(E)$

donc par cardinalité - dimension $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$.

2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$ tq $P \wedge Q = 1$

alors $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}((Q)(u)) \oplus \mathrm{Ker}((P)(u))$

$\left| \begin{array}{l} P \leftarrow X^2 + X + 1 \\ Q \leftarrow X \end{array} \right.$

$\underset{\shortparallel}{E}$ (car $u^3 + u^2 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$)

on a $\mathrm{Ker}(u^3 + u^2 + u) =$

$\mathrm{Ker}(u^2 + u + id_E) \oplus \mathrm{Ker}(u)$

or $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim E$

(Formule du rang et E de dim finie)

donc par Grassmann ;

$\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + u + id_E)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$

De plus ; $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + id_E)$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$ alors $\exists\, y_0$ tq $u(y_0) = x$

donc $u^2(x) + u(x) + x$
$= u^3(y_0) + u^2(y_0) + u(y_0) = 0$.

donc par cardinalité dimension ;

$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + id_E)$.

MANGIACOMINI Exo 3)
Amélien

$$u \text{ non-bijectif } \underset{\uparrow}{\iff} u \text{ non injectif}$$

critère d'automorphie

$$\iff \mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$$

$$\iff 0 \text{ valeur propre de } u$$

De plus X^3+X^2+X est un polynome annulateur de u donc :

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u) \subset \underset{\{0\}}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(X^3+X^2+X)}}$$

donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u) = \{0\}$.

Rapport de colle, semaine n° 7

Wassim M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$ M est-elle diagonalisable sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M)$

Après calculs ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et developpement par rapport à la première colonne) : $\chi_M(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + ca - ba - bc)$

- $ca - ba - bc > 0$: alors 0 est l'unique valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(\lambda)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$

Elle est diagonalisable sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car $\chi_M(\lambda)$ possède 3 valeurs propres complexes distinctes

- $ca - ba - bc = 0$: alors 0 est l'unique valeur propre ainsi si M diagonalisable alors M est semblable à la matrice nulle ie $M = 0$ Si et $a = b = c = 0$. Si $a = b = c = 0$

alors $M = 0$ et M est diagonalisable

ainsi M diagonalisable $\Leftrightarrow a = b = c = 0$

- $ca - ba - bc < 0$: alors M est diagonalisable sur $M_3(\mathbb{R})$ car

$\chi_M(\lambda)$ possède 3 valeurs propres rèelles distinctes.

elle ~~par con~~ est, par consequent, diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$

Léa N.

Colle de la semaine n°: 7

Énoncé :

Soit $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1/ Montrer que si ω est une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de multiplicité s, alors $\overline{\omega}$ l'est aussi.

2/ On suppose que : $A^3 - 3A - 4I_n = 0$.

Montrer que $\det(A) > 0$

3/ On suppose que : $A^2 + A + I_n = 0$

Montrer que n est pair

4/ On suppose que : $A^3 + A^2 + A = 0$

Montrer que $rg(A)$ est pair.

Solution :

1/ Soit ω valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de multiplicité s.

On sait que $(X-\omega)^s \mid \chi_A$

alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ $\chi_A = (X-\omega)^s Q$ avec $Q(\omega) \neq 0$

On $\overline{\chi_A}(X) = \chi_A(X)$

$= (X-\overline{\omega})^s \,\overline{Q}(X)$

avec $\overline{Q}(\overline{\omega}) = \overline{\overline{Q}(\omega)} \neq 0$

Donc $\overline{\omega}$ est valeur propre de A de multiplicité s.

2/ Supposons que : $A^3 - 3A - 4I_n = 0$

On pose $P = X^3 - 3X - 4$

$$\rightsquigarrow f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - 3x - 4 \end{array} \right. \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

. $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

. $f'(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
f''	$+\infty$		↘		-3		↗		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2		↘		-6	↗	$+\infty$

On $f(2) = -2$ et $f(3) = 14$

Donc par théorème des valeurs intermédiaires

f a une unique racine r réelle qui est positive (entre 2 et 3).

Alors P possède une racine réelle strictement positive notée r

Comme le degré de P est 3, et par 2.1, il existe $\omega \in \mathbb{C}$

tel que ω et $\bar{\omega}$ soient racines de P.

$\Rightarrow P = (X-r)(X-\omega)(X-\bar{\omega})$

Donc $\det(A) = r\omega\bar{\omega} = r|\omega|^2 > 0$

3) Supposons que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrons que n est pair.

$\chi_A = X^2 + X + 1$

on a $\chi_A = (X-j)(X-j^2)$

$\Rightarrow \det(A) = j^3 = 1$

donc n est pair

4/ Supposons que $A^3 + A^2 + A = 0$

On a $\chi_A = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$

$= X(X-j)(X-j^2)$

On $j^2 = \bar{j}$ et j et j^2 sont des valeurs propres de A.

De plus, χ_A est scindé à racines simples (et $\mathrm{mult}(\chi_A, j) = \mathrm{mult}(\chi_A, j^2)$

donc $\dim(E_j) = \dim(E_{j^2})$

Alors $\mathrm{rg}(A) = 2\dim(E_j)$ pair.

Youssef B

Colle de la semaine 7

Exercice 103. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Solution :

1) $\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & -2 & X \end{vmatrix}$ $\quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$

$= (X-1)\left((X-3)X + 2 + 2X - 2 - 2 - (X-3)\right)$

$= (X-1)(X^2 - 2X + 1)$

$= (X-1)^3$

Donc A admet une unique valeur propre qui est 1

$\mathrm{Spec}(A) = \{1\}$

2) $E_1(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = X\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = x \\ -x + 3y - z = y \\ -x + 2y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = x \\ -x \ 3y - z = y \\ \cancel{-y + z = z - y} \end{cases}$$

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc $\dim(E_1(A)) = 2 \neq 3$

1 est la seule valeur propre

Donc A n'est pas diagonalisable

La matrice est inversible car elle n'a pas de valeur propre nulle.

Alexandre M. Rapport de colle semaine 7.

Énoncé : Soit $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&3&-1\\-1&2&0\end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n.

Résolution:

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \left|\begin{pmatrix}\lambda & -2 & 1\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ 1 & -2 & \lambda\end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 1\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ \lambda-1 & -2 & \lambda\end{vmatrix} \qquad [C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3]$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ 1 & -2 & \lambda\end{vmatrix} \qquad [\text{lin } 1/1 \text{ à } C_1]$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{bmatrix}$$

$$\chi_A = (\lambda-1)^3 \qquad [\text{det d'une triangulaire sup}]$$

donc $\boxed{\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(\chi_A) = \{1\}}$

2. Q1 livre que 0 n'est pas valeur propre de A. Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et donc

$\boxed{\text{A est inversible}}$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ diagonalisable} \\ \text{et } \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \cdot I_3$$

ce qui n'est pas

donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

3) on a $\chi_A = (X-1)^3$ et $\mu_A \mid \chi_A$ [par déf de μ_A et C.H.]

donc $\mu_A \in \{X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\}$

$$(X-1)(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Comme $(X-1)^2(A) = (X-1)(A) \times (X-1)(A)$

on calcule $((X-1)(A))^2$

$$((X-1)(A))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (X-1)^2(A)$$

donc $\boxed{\mu_A = (X-1)^2}$ [μ_A annule A et est de degré minimal]

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $n \geq 2$ (on a $A^0 = I_3$, $A^1 = A$)

$$A^n = (A - I_3 + I_3)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A - I_3)^k I_3^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0}(A-I_3)^0 + \binom{n}{1}(A-I_3)^1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(A-I_3)^k}_{0 \text{ car } (X-1)^2 \text{ annule } A}} \; 0$$

$$\boxed{A^n = nA - (n-1) I_3}$$

on remarque que la formule est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Anaë D.

Rapport de colle S7

Exercice 102. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2+2M = A$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Soit M une solution de l'équation. Montrer que les espaces propres de A sont stables par M.

Solution :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$ (développement par rapport à la $1^{ère}$ colonne)

$$= (-1)^{1+1}(\lambda-1)[(\lambda+1)(\lambda-3)] + (-2)(-1)^{1+2}[(\lambda-1)(\lambda-3)]$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1, 3\}$

χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On remarque que

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 1 . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ d'où $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ base de $E_1(A)$

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ d'où $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ base de $E_3(A)$

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ d'où $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ base de $E_{-1}(A)$

Montrons que $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_3}\right)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc la famille est libre est par cardinal-dimension $\mathcal{C}=(f_1,f_2,f_3)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $a \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ tel que $\mathrm{Mat}_{B_0}(a) = A$ où B_0 est la base canonique.

Par le théorème de changement de base :

$$A = \underbrace{P_{B_0 \to \mathcal{C}}}_{P} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(a)}_{D} \underbrace{P_{\mathcal{C} \to B_0}}_{P^{-1}}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul de P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

(the right-hand block is marked P^{-1})

D'où $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. (E) $M^2 + 2M = A$ d'inconnue, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On suppose $M \in \mathrm{Sol}(E)$

Montrons alors que A et M commutent

$AM = (M^2 + 2M)M = M^3 + 2M^2$ $\quad$ $(M \in \mathrm{Sol}(E))$ (distributivité)

Anaë D.

Rapport colle S7

(suite)

$MA = M(M^2 + 2M) = M^3 + 2M^2$ ($M \in Sol(E)$) (distributivité)

Montrons que les sous espaces propres de A sont stables par M.

Soit $X \in E_1(A)$. Montrons que $MX \in E_1(A)$

$X \in E_1(A) = Ker(I_n - A) \Rightarrow X - AX = 0$

$\Rightarrow MX - MAX = 0$ ($M \times$ —)

$\Rightarrow \underline{MX} - A\underline{MX} = 0$ (commutativité de A et M)

$\Rightarrow MX \in E_1(A)$

Jules R.　　　　　　　　　　　　Colle de la semaine 7

Énoncé :

Démontrer que la matrice $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis la diagonaliser.

Solution :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} X - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & X & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & X - \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 3X-1 & -2 & -1 \\ -1 & 3X & -1 \\ -1 & -1 & 3X-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{27} \underbrace{\begin{vmatrix} 3X & -2 & -1 \\ 0 & 3X & -1 \\ -3X & -1 & 3X-1 \end{vmatrix}}_{M}$$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$

$$= \frac{1}{27} \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} [M]_{k,1} \det(M_{k,1})$$

(déterminant par rapport à la première colonne)

$$= \frac{1}{27} 3X(3X(3X-1)-1) + \frac{1}{27}(-3X)(2+3X)$$

$$= \frac{1}{27} 3X(3X(3X-1) - 3 - 3X)$$

$$= \frac{1}{27}\, 3x\,(9x^2 - 6x - 3)$$

$$= \frac{1}{3}\, x\,(3x^2 - 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}\,(x-1)\,x\,(3x+1)$$

donc A diagonalisable et

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -\frac{1}{3} ; 0 ; 1 \right\}$

On diagonalise :

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ où $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sont des inconnues

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$.

On doit trouver X tel que

$$(*)\ (A - \lambda I_3)\, X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour chaque valeur propre}$$

Pour $\lambda = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

D'après $(*)$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}x_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \frac{1}{3}x_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ x_3 = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 \end{cases}$$

ainsi $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jules R. Pour $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1/3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

D'après (*), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}x_2 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \frac{1}{3}x_2 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \; L_1 \leftarrow 3L_1 \\ x_2 = 0 \; L_3 \leftarrow 3L_3 \end{cases}$$

ainsi :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

D'après (*), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 & \\ -\frac{4}{3}x_2 + x_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \frac{4}{3}x_2 - x_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{4}{3}x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}x_2 \\ x_3 = \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Ainsi : $X_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ ainsi : $P = \left(X_1 \middle| X_2 \middle| X_3 \right)$

Ainsi :

$$A = P D P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 101. Trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- Interessons nous à son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = (X+3)(X+1)+1 = X^2+4X+4 = \underline{(X+2)^2}$$

χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est bien <u>trigonalisable</u>

- On cherche $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} T$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ tel que $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

On cherche alors une base $B = (f_1, f_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de telle sorte que

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(f_1) & u(f_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & * \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /u_1 \\ /u_2 \end{array} \end{array}$$

Posons $B = \left(f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$u(f_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \times f_1 + (-2) f_2$$

Ainsi nous obtenons $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Par <u>théorème de changement de base</u> :

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Antoine B. colle de la semaine 7.

Exercice. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, qui admet s valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. On définit le *commutant* de u par : $C(u) = \{v \in \mathrm{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$. Montrer : $\dim(C(u)) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2$.

Traiter les exercices dans l'ordre indiqué.

Une solution: Comme u est diagonalisable, il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{\alpha_1 \text{fois}} & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{array}{l} /E_{\lambda_1}(u) \\ \vdots \\ /E_{\lambda_s}(u) \end{array}$$

$\rightarrow$ car $\dim(E_{\lambda_1}(u)) = \alpha_1$ car u diagonalisable

pour tout $v \in C(u)$,

comme $u \circ v = v \circ u$, alors v stabilise tous les $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_s}(u)$.

Ainsi $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{V_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{V_s} \end{pmatrix} \begin{array}{l} /E_{\lambda_1} \\ \\ /E_{\lambda_s} \end{array}$$

où chaque $V_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$ (les V_i dépendent de v)

mq $$\varphi \left| \begin{array}{lcl} C(u) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{M}_{\alpha_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\alpha_s}(\mathbb{K})) \\ v & \longmapsto & (V_1, \ldots, V_s) \end{array} \right.$$

injectivité:

$(v_1, v_2) \in C(u)^2$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_2)$ ie: $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

$\Rightarrow v_1 = v_2$.

(injectivité de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$)

surjectivité: soit $(V_1, \ldots, V_s) \in \mathcal{M}_{\alpha_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\alpha_s}(\mathbb{K})$

$\exists v \in \mathcal{L}(E)$ tq $\mathcal{M}at_B(v) = \begin{pmatrix} \boxed{V_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{V_s} \end{pmatrix}$

Montrons que $v \in C(u)$. ie : que $u \circ v = v \circ u$.

$$\mathcal{M}at_B(u \circ v) = \mathcal{M}at_B(u) \times \mathcal{M}at_B(v)$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \cdot I_{\alpha_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_s \cdot I_{\alpha_s}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{V_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{V_s} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\lambda \cdot I_{\alpha_1} \times V_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_s \cdot I_{\alpha_s} \times V_s} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{V_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{V_s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \cdot I_{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_s \cdot I_{\alpha_s}} \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}at_B(v \circ u)$$

$\Rightarrow \underline{u \circ v = v \circ u}$

Ainsi φ est un isomorphisme

et $\dim(C(u)) = \dim(\mathcal{M}_{\alpha_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\alpha_s}(\mathbb{K})) = \underline{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2}$

Hugo D.

Semaine de colle n°6

Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) ces 3 suites sont-elles convergentes ?

Une solution On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$,

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = A X_n$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Au moyen d'une récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = A^n X_0$

En diagonalisant A on trouve $A = P D P^{-1}$
avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comme A inversible : $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_0 = A^{-n} X_n$
Comme D inversible, on peut montrer
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: " $A^{-n} = P D^{-n} P^{-1}$ "

(I) $n = 0$ ✓
(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ ✓.

$$A^{-n-1} = A^{-n} A^{-1} \underset{HR}{=} P D^{-n} P^{-1} P D^{-1} P^{-1} = P D^{-n-1} P^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ ✓
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_0 = P D^{-n} P^{-1} X_n$ ⊛
On note $D_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} D^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Supposons que $\begin{cases} u \to x \in \mathbb{R} \\ v \to y \in \mathbb{R} \\ w \to z \in \mathbb{R} \end{cases}$

En passant à la limite dans ⊛, on a

$$X_0 = P\, D_0\, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ⊛⊛$$

On inverse P et on trouve $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

En effectuant le produit matriciel ⊛⊛, on a

$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \end{pmatrix}$ et on trouve comme condition nécessaire que $u_0 = v_0 = w_0$

• Supposons que $u_0 = v_0 = w_0$. Montrons que u, v et w convergent.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: " $X_n = X_0$ "

Ⓘ $n=0$ ✓

Ⓗ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ ✓

$$X_{n+1} = A X_n \underset{HR}{=} A X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = X_0$$

On en déduit que u, v, w sont constantes donc convergentes.

Robin G. Colle de la semaine 5

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que :
$\exists m \in \mathbb{N}^* \quad A^m = I_2$

Montrer que $A^{12} = I_2$.

Solution :

- $A^m - I_2 = 0$ donc $X^m - 1$ annule A
  donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$

- χ_A est unitaire de degré 2 donc $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$
  où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

- $\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)\, X + \det(A)$
  $= X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) X + \lambda_1 \lambda_2$

En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$

ainsi $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$
$\text{Tr}(A) = a + d \in \mathbb{Z}$

- Donc $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$
  et $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{Z}$
  et $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{Z}$

Par Analyse-Synthèse, on obtient les ~~couples~~ solutions :

- si $\lambda_1 = \lambda_2$: $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_1 = -1$

• si $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\{(1,-1), (i,-i), (j,\bar{j}), (-j,-\bar{j})\}$

Ainsi $\mathrm{Spec}(A) \in \{\{1\}, \{-1\}, \{1,-1\}, \{i,-i\}, \{j,\bar{j}\}, \{-j,-\bar{j}\}\}$

Soit μ_A polynôme minimal de A.

- $\mathrm{Spec}(A) = \{1\}$: $\mu_A = (X-1)$ et $\underline{A = I_2}$
- $\mathrm{Spec}(A) = \{-1\}$: $\mu_A = X+1$ et $\underline{A = -I_2}$
- $\mathrm{Spec}(A) = \{1,-1\}$: $\mu_A = (X-1)(X+1)$ scindé à racines simples

donc A diagonalisable et $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ $A = P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$

$A^2 = P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1} = P I_2 P^{-1}$

$A^2 \sim I_2$ donc $\underline{A^2 = I_2}$

- $\mathrm{Spec}(A) = \{i,-i\}$.

De même, $A = iP\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^2 = -I_2$, $\underline{A^3 = I_2}$

- $\mathrm{Spec}(A) = \{j,\bar{j}\}$

De même, $A = P\underbrace{\begin{pmatrix}j&0\\0&\bar{j}\end{pmatrix}}_{=J}P^{-1}$ et $A^3 = PJP^{-1}PJP^{-1}PJP^{-1} = PJ^3P^{-1}$

$J^3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$ donc $\underline{A^3 = I_2}$

- $\mathrm{Spec}(A) = \{-j,-\bar{j}\}$

Comme avant : $A = P(-J)P^{-1}$ donc $A^3 = -I_2$

$\underline{A^4 = I_2}$

$\underline{\text{Dans tous les cas, } A^4 = I_2 \text{, donc } A^{12} = I_2}$.

Pierre V. Colle de la semaine 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $A^k \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Montrer que $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Solution

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on sait χ_A annule A donc

$\exists (a_0, \dots a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ annule A

$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0$

donc $a_0 I_n = -A^n - a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1 A$

or comme $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $[\chi_A]_0 = a_0 = (-1)\underbrace{\det(A)}_{\neq 0} \neq 0$

donc $I_n = -\frac{1}{a_0}(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A)$

donc $A = -\frac{1}{a_0}(A^{n+1} + a_{n-1}A^n + \dots + a_1 A^2) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

donc A est trigonal supérieur

Célia. A. Semaine n°7. Colle n°4.

énoncé

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrons que u est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Solution

Selon le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$
D'où $\dim(\mathrm{Ker}(u))$.

Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
On la complète en une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n-1}, y)$ de E.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} u(e_1) & \dots & u(e_{n-1}) & u(y) \end{matrix} & \\ \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \text{—} & 0 \\ | & 0 & | \\ 0 & \text{—} & 0 \end{matrix}}_{\in \mathrm{Ker}(u)} & \begin{matrix} * \\ | \\ * \end{matrix} \end{matrix} \right) & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ y. \end{matrix} \end{array}$$

Or, $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)]_{i,i} = [\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)]_{n,n}$.

En développant par rapport à la dernière ligne, nous obtenons $\chi_u = (X - \mathrm{Tr}(u))X^{n-1} = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1}$.
χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Par contraposée, supposons $\mathrm{Tr}(u) = 0$.
Alors $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(u) = \{0\}$.
Or, u est diagonalisable si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u))$, comme $\mathrm{Ker}(u)$ est le sous-espace propre associé à l'unique valeur propre 0.
Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n-1$, u n'est pas diagonalisable.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathrm{Tr}(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Alors $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(u) = \{0, \mathrm{Tr}(u)\}$.

Comme $\dim(E_{\mathrm{Tr}(u)}(u)) \geqslant 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(E_{\mathrm{Tr}(u)}(u)) \geqslant n$.

De plus, les sous-espaces propres sont en somme directe et $\mathrm{Ker}(u) \oplus E_{\mathrm{Tr}(u)}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(E_{\mathrm{Tr}(u)}(u)) \leqslant \dim(E)$.

Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(E_{\mathrm{Tr}(u)}(u)) = n$ et u est diagonalisable

Mehdi B. Colle de la semaine 7

Exercice 2. ccp65 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$: (P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

<u>Solution</u> 1)

$$B_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (P,Q) \mapsto (PQ)(u) \end{array} \right. \qquad B_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (P,Q) \mapsto P(u) \circ Q(u) \end{array} \right.$$

<u>Bilinéarité</u>

- Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{K}[X]^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} B_1(\lambda P + \mu Q, R) &= ((\lambda P + \mu Q) R)(u) \\ &= (\lambda PR + \mu QR)(u) \\ &= \lambda (PR)(u) + \mu (QR)(u) = \lambda B_1(P,R) + \mu B_1(Q,R) \end{aligned}$$

De même B_1 linéaire à droite

- $$\begin{aligned} B_2(\lambda P + \mu Q, R) &= (\lambda P + \mu Q)(u) \circ R(u) \\ &= (\lambda P(u) + \mu Q(u)) \circ R(u) \\ &= \lambda P(u) \circ R(u) + \mu Q(u) \circ R(u) \\ &= \lambda B_2(P,R) + \mu B_2(Q,R) \end{aligned}$$

De même B_2 linéaire à droite

Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.
$B_1(X^i, X^j) = (X^i X^j)(u) = (X^{i+j})(u) = u^{i+j}$

$B_2(X^i, X^j) = X^i(u) \circ X^j(u) = u^i \circ u^j = u^{i+j}$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

$$B_1(P, Q) = B_1\left(\sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i X^i, \sum_{j=0}^{+\infty} [Q]_j X^j\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} [P]_i [Q]_j \underbrace{B_1(X^i, X^j)}_{B_2(X^i, X^j) = u^{i+j}}$$

donc $B_1(P, Q) = B_2(P, Q)$, ie $\underline{(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)}$

2.a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.
$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$

2.b) Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Suppose P annule u

$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ \underbrace{P(u)}_{0} = 0$

3/ $\chi_A = X^2 - X = X(X-1)$

Comme 0 et 1 sont racines de R donc
$X(X-1) \mid R$, ie $\chi_A \mid R$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A annule A. Par suite, <u>R annule A</u>

EliotH. S.V. Colle n° 7

Exercice 101. Trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUTION.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x+3 & -1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+3 & x+2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= x+2 \begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)^2$$

Donc $\chi_A = (X+2)^2 \Rightarrow A$ trigonalisable.

On remarque $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(-2I_2 - A)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et forme une base de $M_{21}(\mathbb{R})$. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Soit f l'endo canoniquement associé à A.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = T \quad , \quad \mathrm{mat}_{\underbrace{\mathcal{C}an(M_{21}(\mathbb{R}))}_{=\mathcal{B}_0}}(A) = A.$$

Par théorème de changement de base,

$\exists P \in Gl_n(\mathbb{R})$ ou $A = PTP^{-1}$

et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Oudoine Gatien

Soit $T \in GL_n(\mathbb{K})$,
Mq $T \in T_n^+(\mathbb{K}) \iff \forall k \geq 2, T^k \in T_n^+(\mathbb{K})$

$\boxed{\Rightarrow}$ Ce vérifie avec un produit matriciel

$\boxed{\Leftarrow}$ $\chi_{\cancel{A}}(\cancel{A}T) = 0$ par Cayley-Hamilton

$$\Rightarrow \exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cancel{A}T^i + T^n = 0$$

$$a_0 = (-1)^n \det(\underset{T}{\cancel{A}}) \neq 0 \quad \text{car } \cancel{A}T \in GL_n(\mathbb{K})$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{a_0} T^n \overset{-}{\cancel{+}} \sum_{i=\cancel{0}1}^{n-1} \frac{a_i}{a_0} T^i = I_n$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{a_0} T^{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_0} T^{i+1} = T$$

$T_n^+(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire

donc $T \in T_n^+(\mathbb{K})$

MATMEO.N
①

Rapport de colle semaine 7

Exercice 1 : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension fini $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que f est diagonalisable. A quelle condition, existe-t-il un vecteur x de E tel que la famille formée des vecteurs :
$$x_1 = x, \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_n = f(x_{n-1})$$
forme une base de E.
2. On ne suppose plus f diagonalisable mais on suppose l'existence d'une base de E $(x_1, \dots, x_n)$ du type précédent.
Déterminer le commutant de f.
Quel est le polynôme minimal de f ?

1) f étant diagonalisable, il existe $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} d_0 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{n-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_0 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{matrix}$ $(d_0, \dots, d_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$

Supposons $x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k$ tel que $x_1 = x$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$,

Posons $F = (x_1, \dots, x_n) = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$

Soit $m \in [\![0, n-1]\!]$ $f^m(x) \underset{(f\,lin)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^m(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k d_k^m e_k$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ montrons $P(m)$: " $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $f^m(e_k) = d_k^m e_k$

Ⓘ $\underline{m=1}$: $f(e_k) = d_k e_k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

Ⓗ Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(m)$ vraie, montrons $P(m+1)$
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ $f^{m+1}(e_k) = f(f^m(e_k)) \underset{H.R}{=} f(d_k^m e_k) = d_k^m f(e_k) = d_k^{m+1} e_k$

Ⓒ D'après l'initialisation au rang $m=1$ et l'hérédité nous avons $\forall m \in \mathbb{N}^*$ " $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $f^m(e_k) = d_k^m e_k$

On veut montrer que F est libre, c'est à dire qu'elle est de rang n.

On a :

$$M = Mat_B(F) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} x & f(x) & f^2(x) & \cdots & f^{n-1}(x) \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_0 & a_0 d_0 & a_0 d_0^2 & & a_0 d_0^{n-1} \\ a_1 & a_1 d_1 & a_1 d_1^2 & & a_1 d_1^{n-1} \\ & & & & \\ a_{n-1} & a_{n-1} d_{n-1} & a_{n-1} d_{n-1}^2 & & a_{n-1} d_{n-1}^{n-1} \end{array}\right)\begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ \\ e_{n-1} \end{array}$$

On veut $rg(Mat_B(F)) = n$ soit $\det(M) \neq 0$

On a : $\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} a_k \times \begin{vmatrix} 1 & d_0 & d_0^2 & \cdots & d_0^{n-1} \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & d_{n-1} & d_{n-1}^2 & \cdots & d_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$

[n-linéarité de det]

$$= \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\right) \times \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_i - d_j)\right)$$ [déterminant de Vandermonde]

Ainsi F est libre si $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $a_k \neq 0$ et si les $(d_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ sont deux à deux distincts c'est à dire que f doit avoir n valeurs propres deux à deux distinctes.

2) On pose $B = (x_1, f(x_1), \dots, f^{n-1}(x_1))$ base de E.

Le commutant de f : $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) : g \circ u = u \circ g\}$

Soit $u \in \mathcal{C}(f)$, on a : $u(x_1) \in E$ donc :

$\exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u(x_1) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_1) \circledast$$

Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k(x_1)$ $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$

on a : $u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k(u(x_1))$ [u linéaire + $u \in \mathcal{C}(f)$]
↳ par récurrence sur k.

$$\overset{\circledast}{=} \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell f^\ell(x_1)\right)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^{k+\ell}(x_1)$$ [inversion de somme]

MATHEO.N.
②

$$= \sum_{l=0}^{n-1} a_l f^l \left(\sum_{h=0}^{n-1} b_h f^h(x_1) \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} a_l f^l(x)$$

Ainsi : $u = \sum_{l=0}^{n-1} a_l f \in \mathbb{K}_{n-1}[f]$

Montrons que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$, nous avons $\boxed{\subset}$

$\boxed{\supset}$ Soit $u \in \mathbb{K}_{n-1}[f]$, soit $(a_0, \dots, a_{n-1}] \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

on a $f \circ u = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \circ f = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) \circ f}_{= u \circ f}$

Ainsi $u \in \mathscr{C}(f)$, nous avons bien $\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]}$

- Supposons que $d = \deg(\Pi_f) < n$ (Π_f polynôme minimal de f)

il existe alors : $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{K}^d$ tels que

$$\Pi_f(X) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k X^k + X^d$$

Or nous avons $\Pi_f(f) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k f^k + f^d = 0$ [génère $\mathrm{Ann}(f)$]

Comme $(x_1, \dots, f^{n-1}(x_1))$ est libre, en spécialisant à x_1 nous avons $\Pi_f(f) = 0$ ce qui n'est pas [unitaire et $\mathrm{spec}(\Pi_f) = \mathrm{spec}(f) \Rightarrow |\mathrm{spec}(f)|$ infini]

Ainsi : on a : $d \geq n$, or nous savons que $\Pi_f \mid \chi_f$ avec $\deg(\chi_f) = n$, ainsi : $\deg(\Pi_f) = \deg(\chi_f)$ et nous en déduisons étant tous deux unitaires que $\boxed{\Pi_f = \chi_f}$

Tigüin, David   Colle de la semaine 7

EXERCICE 4

Q1. — Démontrer que la matrice $A := \frac{1}{3} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A'}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, puis la diagonaliser.

Q2. — Existe-t-il une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$?

i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Déterminons $\chi_A(\lambda)$: $\det(I_3 - A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det(3I_3 - A')$

$\nwarrow$ déterminant 3-linéaire

Donc $\det(3I_3 - A') = \begin{vmatrix} 3\lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & 3\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 3\lambda & -1 \\ -3\lambda & -1 & 3\lambda-1 \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$

$= 3\lambda \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = 3\lambda\left(3\lambda(3\lambda-2)-3\right) = 27\lambda(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

d'où $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)$, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable, on détermine une base de $\ker(A - 0I_3)$, $\ker(A - I_3)$, $\ker(A + \frac{1}{3}I_3)$:

~~$\frac{1}{3}x_1$~~ Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ donc } \ker(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même $\ker(A - I_3) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\ker(A + \frac{1}{3}I_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où par théorème de changement de base

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5/4 & -1 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} P^{-1} \end{pmatrix}$$

2) Par l'absurde, supposons $\exists B \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$ alors on obtient

~~$B \times B = P$~~ $B \times B = P\sqrt{D}P^{-1} \times P\sqrt{D}P^{-1} = A$ où

$= PDP^{-1}$

$\sqrt{D}$ est la matrice ~~D~~ où ~~ses co~~ on applique la racine carré aux ~~ses~~ coefficients diagonaux de D. Or, $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{R}_+$ donc il n'existe pas une telle matrice.

Rémi - S

Semaine de colle n°7

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n>0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3+u^2+u=0$

1) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2+u+Id)$
3) Si u non-bijective. Déterminer les valeurs propres de u.

Solution :

1) $x = \underbrace{x+u(x)+u^2(x)}_{\in \ker(u)} \quad \underbrace{-u(x)-u^2(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)}$

donc $E = \mathrm{Im}(u) + \ker(u)$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$

$\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y)=0$

donc $u^3(x)+u^2(x)+u(x) = 0$

implique $\underbrace{u^2(y)}_{0} + \underbrace{u(y)}_{0} + y = 0$

donc $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = \{0\}$

donc $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

2) $\boxed{\subset}$ $y \in \mathrm{Im}(u)$

$\exists x \in E \quad u(x) = y$

$(u^2+u+Id)(y) = u^3(x)+u^2(x)+u(x) = 0$

donc $y \in \ker(u^2+u+Id)$

Selon le lemme des noyaux avec X^2+X+1 et X premier entre eux.

$\underbrace{\ker(\underbrace{(X^3+X^2+X)(u)}_{0})}_{E} = \ker(u) \oplus \ker(u^2+u+Id)$

donc $\underset{\substack{\shortparallel \\ \dim(\mathrm{Im}(u))}}{\dim(E)-\ker(u)} = \dim(\ker(u^2+u+Id))$

donc par cardinalité dimension en dimension finis, $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2+u+id_E)$

3) $P = X^3+X^2+X$ annule u

donc $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(P) = \{0\}$

et on a l'inclusion réciproque puisque $\ker(u-0 \cdot I_n) \neq \{0\}$ car u non-bijective.

Piero T. Colle de la semaine 7

Exercice : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A^3 - 3A - 4I_n = 0$.
Montrer que $\det(A) > 0$.

Solution :

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - 3x - 4 \end{array} \right.$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

donc $\exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\quad P = X^3 - 3X - 4 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \overline{\alpha_2})$

or $\mathrm{Spec}(\chi_A) \subset \mathrm{Spec}(P)$ donc :
$\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ $\quad m_1 + 2m_2 = n$ et $\chi_A = (X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2}(X - \overline{\alpha_2})^{m_2}$
donc $\det(A) = \underbrace{\alpha_1^{m_1}}_{>0} \underbrace{|\alpha_2|^{2m_2}}_{>0} > 0$.

Rayan-Ty
MPI'

Colle de la semaine n°7

Enoncé : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$

Soit H un hyperplan de E

u un endomorphisme de E

1. Montrer que

$$H \text{ stable par } u \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \ \mathrm{Im}(u - \lambda id) \subset H$$

2. Dans cette question, $E = \mathbb{C}^3$ et u est l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les sous espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$ stables par u.

Solution :

Q1 E est dimension finie n donc H hyperplan est de dimension $n-1$

On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ base de H

On la complète en $\mathcal{B}_+$ base de E en ajoutant e_n.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons H stable par u

L'hypothèse nous livre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_+}(u)$ a la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{B_t}(u-\lambda id) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{B}(u-\lambda id) & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi la nullité de la dernière ligne livre que $\mathrm{Im}(u-\lambda id) \subset H$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}(u-\lambda id) \subset H$$

Par hypothèse :

$$\mathrm{Mat}_{B_t}(u-\lambda id) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{B}(u-\lambda id) & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\mathrm{Mat}_{B_t}(u-\lambda id) = \mathrm{Mat}_{B_t}(u) - \lambda I_n$

Nous avons

$$\mathrm{Mat}_{B_t}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{B}(u) & \vdots \\ \underbrace{\boxed{0}}_{\gamma} & \lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi H est stable par u par la nullité du bloc γ.

Q2. On remarque tout d'abord que de façon claire $\{0_E\}$ et E sont stables par u.

Désormais, déterminons le polynome caractéristique de A

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & \lambda-4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$= (\lambda-2)((\lambda-2)^2 + (\lambda-2)) + (-2(\lambda-2) - (\lambda-4)(\lambda-2))$$ (développement par rapport à la 1ère colonne)

$$= (\lambda-2)((\lambda-2)^2 + (\lambda-2) - 2 - (\lambda-4))$$

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda-2)^3$$

Ainsi $\chi_A = (X-2)^3$

La seule valeur propre possible de A est donc 2.

On regarde :

$$2I_n - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$ (Algorithme pivot de Gauß)

$$2I_n - A \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: M \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Ainsi $rg(2I_n - A) = 2$

On en déduit que $\dim(u - 2id) = 2$

Par le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{C}^3) = \dim(Ker(u-2id)) + \dim(Im(u-2id))$$

Ainsi $\dim(Ker(u-2id)) = 1$

Nous en déduisons 2 valeur propre de $E_2(u)$ droite stable par u

Supposons l'existence de D droite stable par u

$\exists x_1 \in E \setminus \{0_E\} \quad D = Vect(x_1)$

Ainsi

$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad u(x_1) = \lambda x_1$

Donc λ valeur propre

Or $\chi_A = (X-2)^3$ donc $\lambda = 2$

Ainsi $D = E_2(u)$

Il n'y a qu'une droite stable par u c'est $E_2(u)$

Supposons l'existence de H hyperplan tel que H stable par u

par la question 1

$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad Im(u - \lambda id) \subset H$

Le théorème du rang livre alors :

$\dim(Ker(u-\lambda id)) \geq 1$

Donc λ valeur propre

Ainsi $\lambda = 2$

Ainsi puisque $Im(u-2id)$ hyperplan

Par dimension inclusion $H = Im(u-2id)$

Nous avons par conséquent que les sous-espaces vectoriels stables par u sont $\{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(u-2id)$, $\mathrm{Im}(u-2id)$ et $\mathbb{C}^3$.

Titouan

D

Rapport de colle semaine 7

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\exists n \in \mathbb{N}^*$ $M^n = I_2$

Montrer que $M^{12} = I_2$

On cherche les matrice semblables à M dans $\mathbb{C}$

Si leur puissance 12 est égale à I_2 alors $M^{12} = I_2$

Par d'Alembert Gauß

$$\exists (z,z') \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \chi_{M,\mathbb{C}} = (X-z)(X-z')$$

$$= X^2 + (z+z')X + zz' \in \mathbb{Z}[X]$$

On pose alors M' semblable à M qui est diagonale

$$M'^n = \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z'^n \end{pmatrix} = I_2$$

Donc $|z| = |z'| = 1$

$z + z' \in \mathbb{Z}$

$zz' \in \mathbb{Z}$

Si $(z,z') \in \mathbb{Z}^2$ alors

- $z = z' = 1$ $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc $M'^{12} = I_2$
- $z' = z = -1$ $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ donc $M'^{12} = I_2$
- $z = -z' = 1$ ou l'inverse $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $M'^2 = I_2$ donc $M'^{12} = I_2$

Sinon $(z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$

donc $2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{Re}(z) = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$ car $\mathrm{Re}(z) < 1$ (module)

$z = \overline{z'}$

on a donc 3 candidats i, j et $-j$

- $M' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $M'^4 = I_2$ donc $M'^{12} = I_2$
- $M' = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \bar{j} \end{pmatrix}$ $M'^3 = I_2$ donc $M'^{12} = I_2$
- $M' = -\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \bar{j} \end{pmatrix}$ $M'^6 = I_2$ donc $M'^{12} = I_2$

Donc s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $M^n = I_2$

alors $M^{12} = I_2$

Maximilien. T. Colle de la Semaine 7

Exercice. On pose $E = \mathbb{R}[X]$, et $d : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'endomorphisme de dérivation, défini par $P \mapsto P'$. On suppose qu'il existe un endomorphisme $\delta : E \to E$ tel que : $\delta^2 = d$ (« racine carrée de la dérivation »). On pose également : $F = \ker(d^2)$.

1. Montrer que F est stable par δ.
2. Montrer que $F = \mathbb{R}_1[X]$.
3. Notons δ_F l'endomorphisme induit par δ sur F. Montrer que 0 est l'unique valeur propre de δ_F.
4. En déduire que $\delta_F^2 = 0$, puis une contradiction.

1) Soit $x \in \mathrm{Ker}(d^2)$ Montrons $\delta(x) \in \mathrm{Ker}(d^2)$

$d^2(\delta(x)) = \delta^4(\delta(x)) = \delta(d^2(x)) = 0$

2) $\boxed{\supset}$ ✓

$\boxed{\subset}$ Soit $P \in F$ Par l'absurde supposons $\deg(P) \geq 2$

alors $\deg(P'') \geq 0$ et $P'' = 0$ ↯

3) Montrons $\mathrm{Spec}(\delta_F) = \{0\}$

$\boxed{\supset}$ ~~Clairement δ_F n'est pas injective~~

$\boxed{\subset}$ ~~Soit~~ Comme d_F n'est pas injective

$\exists P \in \mathbb{R}_1[X] \setminus \{0\}$ tel que $\underbrace{d_F(P)}_{\delta_F(\delta_F(P))} = 0$

Si $\delta_F(P) = 0$ alors P est vecteur propre et sinon $\delta_F(P)$ l'est.

$\boxed{\subset}$ Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(\delta_F)$ alors $\exists P \in F \setminus \{0\}$ tel que

$\delta_F(P) = \lambda P \quad \Rightarrow \quad \underbrace{d(P)}_{P'} = \lambda^2 P$

Par analyse des degrés on obtient $\lambda^2 = 0$ d'où $\lambda = 0$.

4) Comme 0 est l'unique valeur propre de δ_F, δ_F est nilpotente

Or si il existe $P \in F$ tel que $\delta_F^2(P) \neq 0$

alors $(P, \delta_F(P), \delta_F^2(P))$ serait une famille libre de F qui est de dimension 2.

Donc $\delta_F^2 = 0$

Or $\delta_F^2 = d_F$ or $d_F(X + 11111) = 1 \neq 0$ ↯.

Léon

Rapport de colle de la semaine n°7

Énoncé : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$
Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Solution : en appliquant la transposée $A^{T2} + A = I_n^T = I_n$
en utilisant l'identité du départ $(I_n - A^2)^2 + A = I_n$

$$\Rightarrow A^4 - 2A^2 + A = 0$$

$$\Rightarrow X(X-1)\underbrace{(X^2-X-1)}_{\Delta > 0} \text{ annule } A \text{ (0 et 1 racines évidentes).}$$

A est annulée par un polynôme de $\mathbb{R}$ scindé simple, on en déduit que

$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}}$

Louis D Semaine de colle n° 7

Enoncé :

Exercice 2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, on considère l'équation

$$(E) : AM = MB \quad \text{où } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est l'inconnue.}$$

1. On suppose que (E) possède une solution non nulle M.
   (a) Montrer que pour tout polynôme P à coefficients complexes, on a $P(A)M = MP(B)$.
   (b) Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
2. On suppose que A et B ont une valeur propre commune.
   (a) Montrer que si X et Y sont deux vecteurs colonnes non nuls alors la matrice XY^T est non nulle.
   (b) Montrer que (E) admet des solutions non nulles.

Solution :

1) a) On montre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k M = M B^k \quad ①$$

Soit $P = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$

$$P(A)M = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k A^k M$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k M B^k \quad ①$$

$$= M P(B)$$ (Matrices et scalaires commutent)

b) On spécialise (a) à χ_A

Ainsi $\chi_A(A) M = 0 = M \chi_A(B)$

On en déduit que $\chi_A(B)$ n'est pas inversible, sinon M serait nulle, ce qui n'est pas.

Donc $\det(\chi_A(B)) = 0$

Comme $\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda}$

Il existe $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que
$\det(B - \lambda I_n) = 0$
et $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$

2) a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$

$\exists i_0, j_0 \in [\![1,n]\!]^2$ tq $x_{i_0} \neq 0$
et $y_{j_0} \neq 0$

$$[XY^T]_{i_0 j_0} = \sum_{k=1}^{n} x_{i_0} y_{i_0} \neq 0$$

et $XY^T \neq 0$

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \cap \overset{\mathrm{Spec}(B)}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Spec}(B^T)}}$
$\exists (X_A, X_B) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$ tq $AX_A = \lambda X_A$ ①
$B^T X_B = \lambda X_B$ ②

$$② : (B^T X_B)^T = (\lambda X_B)^T$$
$$= X_B^T B^{TT}$$
$$= X_B^T B \quad ③$$

$$A X_A X_B^T = \lambda X_A X_B^T$$
$$= X_A \lambda X_B^T$$
$$= X_A X_B^T B \quad ③$$

et $X_A X_B^T \neq 0$ par (a).

Nicolas.M Colle de la semaine 7

Énoncé

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1. — Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Q2. — Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.

Q3. — En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$. □

Solution :

1) Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.
Comme $A \in M_2(\mathbb{R})$

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + det(A)$$
$$= X^2 - 2X + 1$$
$$= (X-1)^2$$

Ainsi $Spec_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$.
Si A était diagonalisable, A serait égale à I_2, Ce qui n'est pas. Donc A n'est pas diagonalisable

2) χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable.

- $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant différent de 0, $E_1(A) \underset{\circledast}{=} Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$dim(E_1(A)) = 1$, car si $dim(E_1(A)) = 2$, alors A serait diagonalisable.

Soit $v_2 = (-1, 0)$, $v_1 = (2\ -1)$. $B = (v_2, v_1)$ base de $\mathbb{R}^2$

$f(v_2) = v_2 + v_1$

$$Mat_B(F) = \begin{array}{cc|c} f(v_1) & f(v_2) & \\ 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \end{array} = T.$$

$a = b = c = 1$

3) On a $A = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(théorème de changement de base)

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Le système différentiel étudié équivaut à l'équation $X' = AX$ qui équivaut encore, grâce à la linéarité de la dérivation à l'équation $Y' = TY$

Cela nous ramène à résoudre le système

$$\begin{cases} a' = a+b \\ b' = b \end{cases}$$

de solution générale

$$\begin{cases} a(t) = \lambda e^t + \mu t e^t \\ b(t) = \mu e^t \end{cases}$$

Enfin, par relation $X = PY$, on obtient la solution générale du système initial:

$$\begin{cases} x(t) = ((2\lambda - \mu) + 2\mu t)e^t \\ y(t) = (-\lambda - \mu t)e^t \end{cases}$$

Louis B colle de la semaine 7

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$
$u \in \mathcal{L}(E)$ tq $rg(u) = 1$
Dq u diagonalisable $\Leftrightarrow Tr(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$

Par le théorème du rang, on sait
$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + rg(u)$
$\Rightarrow \dim(\ker(u)) = n - 1$ et $\underline{0 \text{ valeur propre}}$

Soit $(f_1, \dots, f_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ une base de $\ker(u)$
on la complète en une base $B = (f_1, \dots, f_{n-1}, f_n)$
de E, $f \in \mathbb{K}$

Alors $\mathcal{M}at_B(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(f_1) \cdots & u(f_{n-1}) & u(f_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & X & \vdots & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{array} \end{array}$ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}$

Or $Tr(u) = Tr(\mathcal{M}at_B(u)) = x_n$
et $\underline{\chi_u = X^{n-1}(X - Tr(u))}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp u diagonalisable, par l'absurde supposons $Tr(u) = 0$
alors $\chi_u = X^n$
Donc $Spec(u) \subset \{0\}$
et comme 0 est vp. $Spec(u) = \{0\}$
Et donc $\mathcal{M}at_B(u) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$
ce qui implique $\dim(\ker(u)) = n$ ↯

Donc $Tr(u) \neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $Tr(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$

alors $\chi_u = X^{n-1}(X - Tr(u)) \Rightarrow Spec(u) = \{0, Tr(u)\}$

Or $\dim(E_{Tr(u)}) \geq 1$

et comme $mult(Tr(u), \chi_u) = 1$

$\dim(E_{Tr(u)}) \leq 1$ donc $\dim(E_{Tr(u)}) = 1$

De plus, $\dim(\underbrace{Ker(u)}_{E_0(u)}) = n-1$

Donc $\dim(E_0(u)) + \dim(Tr(u)) = n = \dim(E)$

$\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Spec(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$

$\Leftrightarrow$ u est diagonalisable