Uta Bayen de Noyer

Rapport de colle - semaine n° 6

EXERCICE 4

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $\mathbf{K}$ et u un endomorphisme de E.

Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

□

(*)

Mq u diagonalisable $\Longleftrightarrow$ tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons u diagonalisable

Alors il existe $\mathcal{B} = (x_1, \dots x_n)$ base de E tq

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ x_i est vecteur propre de u.

Soit F sev de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots f_p)$ base de F

où $p \in \mathbb{N}$.

On complète $\mathcal{C}$ en une base de E avec les éléments de $\mathcal{B}$

ie $\exists (i_1, \dots i_{n-p}) \in [\![1, n]\!]^{n-p}$ 2 à 2 $\neq$ tq

$(f_1, \dots f_p, x_{i_1}, \dots x_{i_{n-p}})$ base de E

Alors $\underbrace{\mathrm{Vect}(f_1, \dots f_p)}_{= F} \oplus \underbrace{\mathrm{Vect}(x_{i_1}, \dots x_{i_{n-p}})}_{\text{stable par } u \text{ car } x_{i_1}, \dots x_{i_{n-p}} \text{ sont vecteurs propres de } u.} = E$

$\Leftarrow$ On suppose ⊛

On raisonne par récurrence ; $\forall k \in [\![1,n]\!]$

$\mathcal{P}(k)$: " $\exists (x_1, \dots x_k)$ famille libre de E tq $x_1, \dots x_k$ sont vecteur propre de u "

(I) $k=1$

Soit F un sev de E tq $\dim F = n-1$

D'après ⊛, $\exists D$ un sev de E tq $F \oplus D = E$

Alors $\dim D = 1$, il existe $x_1 \in D \setminus \{0_E\}$ tq $D = \mathrm{Vect}(x_1)$.

Comme D stable par u, $u(x_1) \in \mathrm{Vect}(x_1)$

$\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x_1) = \lambda x_1$

Donc x_1 est vecteur propre de u et (x_1) famille libre

(H) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ fixé tq $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

$\exists (x_1, \dots x_k)$ famille libre de E tq $x_1, \dots x_k$ sont $\vec{vp}$ de u.

Soit F un sev de E tq $\begin{cases} \dim F = n-1 \\ \text{et } \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_k) \subset F \end{cases}$

D'après ⊛, $\exists D$ sev de E stable par u tq $F \oplus D = E$.

Alors $\dim D = 1$, il existe $x_{k+1} \in D \setminus \{0_E\}$ tq $D = \mathrm{Vect}(x_{k+1})$.

$u(x_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(x_{k+1})$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x_{k+1}) = \lambda x_{k+1}$

donc x_{k+1} $\vec{vp}$ de u.

Soit $(\lambda_1, \dots \lambda_{k+1}) \in \mathbb{K}^{k+1}$ tq $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = 0_E$.

$\Rightarrow \underbrace{\lambda_{k+1} x_{k+1}}_{\in G \text{ donc } \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_k)} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i}_{\in \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_k)}$

$\underset{(x_1, \dots x_k) \text{ libre}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$ et $\lambda_{k+1} = 0_{\mathbb{K}}$, Ainsi $(x_1, \dots x_{k+1})$ libre.

Léa N.

Colle de la Semaine n° 6

Énoncé :

Soit K une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie sans diviseurs de 0.

1) Montrer que K est unitaire, on note e son élément unitaire.

2) Montrer que : $\forall x \in K^*$ x est inversible dans K.

3) En déduire que :

- si $\dim(K) = 1$ alors $K \simeq \mathbb{R}$
- si $\dim(K) > 1$ alors $\exists i \in K$ tel que $i^2 = -e$

Solution :

1) K est une $\mathbb{R}$-algèbre, alors

$\exists u \in K^*$

Posons $\varphi \left| \begin{array}{l} K \longrightarrow K \\ x \longmapsto ux \end{array} \right.$

. φ est linéaire :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \in K^2$

$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \underbrace{u x_1}_{\varphi(x_1)} + \lambda_2 \underbrace{u x_2}_{\varphi(x_2)}$

distributivité de $\times$ par rapport à $+$

. φ injective

Soit $x \in \ker(\varphi)$

$\varphi(x) = ux = 0$

$\Rightarrow x = 0$ car $u \neq 0$

Comme K est de dimension finie, donc φ est bijective.

$\forall v \in K \quad \exists x \in K \quad v = ux$

en particulier, pour $v = u$

$\exists e \in K \quad u = ue \quad$ (et $e \neq 0$ car $u \neq 0$)

. $u^2 = ueu$

$\Rightarrow u^2 - ueu = 0$

$\Rightarrow u(u - eu) = 0$

$\Rightarrow u = eu$

. Soit $v \in K$. Montrons que $ve = v = ev$

Si $v = 0$ le résultat est clair. Supposons $v \neq 0$, $\exists x \in K \quad v = ux$

$$v^2 = vux = veux$$

$\Rightarrow v(v - eux) = 0$

$\Rightarrow v = eux = ev \quad$ (car $v \neq 0$)

de même, on montre que $v = ve$

$\boxed{\text{Donc } K \text{ est unitaire d'élément unitaire } e.}$

2/ φ est bijective donc 1 possède un antécédent

$\Rightarrow \exists v \in K \quad uv = 1$

et $u \in K^*$

le résultat est vrai pour tout $u \in K^*$

$\boxed{\text{Donc tout } x \in K^* \text{ est inversible dans } K.}$

3) . Si $\dim(K) = 1$

On sait que K est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Alors par caractérisation des espaces de dimension finie, $K \simeq \mathbb{R}$.

. Si $\dim(K) > 1$

Soit $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, $x \in K$

tels que

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{et} \quad b^2 - 4c < 0$$

le polynôme $\underbrace{X^2 + bX + c}_{P}$ est de degré 2 et irréductible

Donc $P = 0$

$$\Rightarrow \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2X + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-b^2 + 4c}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{2X + b}{\sqrt{4c - b^2}}\right)^2 + e\right) = 0$$

par intégrité $\left(\text{et car } \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right) \neq 0\right)$

on a :

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{2X + b}{\sqrt{4c - b^2}}\right)}_{i\,!!}{}^2 = -e}$$

Wassim. M

Rapport de colle, semaine n° 6

1) On pose $\forall P \in \mathbb{R}_4[X]$, $\Phi(P) = (X^2-1)P' - (4X+1)P$

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$

2) Determiner les valeurs propres de Φ

1) . Φ est lineaire (linearité de la derivation)

. Cherchons $\mathrm{Im}(\Phi)$:

on considère la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$

$\Phi(1) = -4X - 1$ $\quad$ $\Phi(X) = -3X^2 - X - 1$ $\quad$ $\Phi(X^2) = -2X^3 - X^2 - 2X$

$\Phi(X^3) = -X^4 - X^3 - 3X^2$ $\quad$ $\Phi(X^4) = -X^4 - 4X^3$

Ainsi $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_4[X]$ donc Φ est un endomorphisme

2) On cherche $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$

$$A = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} \Phi(1) & \Phi(X) & \Phi(X^2) & \Phi(X^3) & \Phi(X^4) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ /X^3 \\ /X^4 \end{array}
\end{array}$$

On calcule le polynôme caracteristique χ_A:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda+1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda+1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

en developpant par rapport à la 1ère colonne et en reiterant ce processus on obtient

$$\chi_A = (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)$$

Par consequent $\text{spec}(\Phi) = \{3, 1, -1, -3, -5\}$

Youssef.B

Colle de la semaine 6

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe un entier naturel k non nul tel que $A^k = I_n$. On pose $B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^i$. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ ayant pour matrice A et B dans la base canonique.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id) = \mathrm{Im}v$, $\mathrm{Im}(u - Id) = \mathrm{Ker}v$ et $\mathrm{Ker}(v) \bigoplus \mathrm{Im}v = \mathbb{K}^n$
2. En déduire que $\mathrm{Tr}(B) = k \times \mathrm{rg}(B)$.

Solution :

1) Montrons que $\ker(u - Id) = \mathrm{Im}(v)$ i.e. $\ker(A - I_n) = \mathrm{Im}(B)$

$\boxed{\subset}$ soit $X \in \ker(A - I_n)$

i.e. $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $(A - I_n)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$

$\Rightarrow AX - X = 0 \Rightarrow AX = X$

On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$ "$A^k X = X$" $= P(k)$

(I) pour $k = 0$, $A^0 X = I_n X = X$

(H) soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ vraie

$A^{k+1}X = AA^kX \underset{(HR)}{=} AX = X$

Alors $P(k+1)$ est vraie.

$\Rightarrow BX = \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i\right)X = \sum_{i=0}^{k-1} A^i X = \sum_{i=0}^{k-1} X = kX$

$\Rightarrow B\left(\frac{1}{k}X\right) = X$

$\Rightarrow X \in \mathrm{Im}(B)$

$\boxed{\supset}$ soit $X \in \mathrm{Im}(B)$

ie $\exists Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. $X = BY$

$(A - I_n)X = (A - I_n)BY$

$= (AB - B)Y$

$= \left(A\sum_{i=0}^{k-1} A^i - \sum_{i=0}^{k-1} A^i\right)Y$

$= \left(\sum_{i=1}^{k} A^i - \sum_{i=0}^{k-1} A^i\right)Y$

$= (A^k - I_n)Y = 0Y = 0$

Donc $X \in \ker(A - I_n)$

Montrons que $\ker(v) = \mathrm{Im}(u - Id)$

D'après le théorème du rang :

- $\dim(\ker(u-Id)) + \dim(\mathrm{Im}(u-Id)) = \dim(\mathbb{K}^n)$
- $\dim(\ker(v)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathbb{K}^n)$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(u-Id)) = \dim(\ker(v))$

Il suffit donc de montrer une seule inclusion :

soit $X \in \mathrm{Im}(A - I_n)$

ie $\exists Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ $(A-I_n)Y = X$

$$\begin{aligned} BX &= B(A-I_n)Y \\ &= (BA - B)Y \\ &= (A^k - I_n)Y = 0Y = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})} \end{aligned}$$

Donc $X \in \ker(B)$

Montrons que $\ker(v) \oplus \mathrm{Im}(v) = \mathbb{K}^n$

D'après le théorème du rang : $\dim(\ker(v)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathbb{K}^n)$

Montrons que $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$

$\boxed{\supset}$ clair

$\boxed{\subset}$ soit $x \in \ker(v)$ et $x \in \mathrm{Im}(v) = \ker(u - id)$

$\Rightarrow v(x) = 0$ et $u(x) - x = 0$

$\Rightarrow v(x) = 0$ et $\underbrace{u(x) = x}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $u^k(x) = x$ (par récurrence)

Donc $x = 0$ (car $v(x) = kx = 0$, comme avant)

2) On prend une base de $\mathbb{K}^n$ $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_2$ tel que $\mathcal{B}_1$ est la base de $\ker(v)$ et $\mathcal{B}_2$ est la base de $\mathrm{Im}(v)$. Alors

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} k & * & * \\ * & k & \\ & & \begin{matrix} 0 & * \\ * & 0 \end{matrix} \\ * & & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(B) = k\,\mathrm{rg}(B)$

Lina.A — Colle de la semaine 7

Enoncé :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$.

où $a_{i,j} = 1$ si $j = i-1$ ou $j = i+1$

$a_{i,i} = z + \frac{1}{z}$

$a_{ij} = 0$ sinon.

Calculer $\Delta_n = \det(A_n)$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \begin{pmatrix} z+\frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z+\frac{1}{z} & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & z+\frac{1}{z} & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+\frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

$$|A_n| = \begin{vmatrix} z+\frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z+\frac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z+\frac{1}{z} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dév \% 1ère colonne}}{=} (-1)^{1+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) \begin{vmatrix} z+\frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+\frac{1}{z} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z+\frac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dév \% 1ère ligne}}{=} \left(z+\frac{1}{z}\right)|A_{n-1}| - (-1)^{1+1} \times 1 \begin{vmatrix} z+\frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \left(z+\frac{1}{z}\right)\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

On a ainsi une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : (E_{car}) : $r^2 - \left(z+\frac{1}{z}\right)r + 1 = 0$. et $\Delta = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 4$

1^{er} cas : $\Delta = 0$

$$\Rightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 \quad \text{ou} \quad z_2 = -1$$

$$\Delta_n = (nA + B)\, z_i \qquad \text{où } i \in \{1, 2\}.$$

Pour z_1 :

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 2A + B = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = B = 1.$$

De même pour z_2.

Donc $\Delta_n = (n+1)\, z_i$

2^e cas : $\Delta \neq 0$. $z \neq 1$ et $z \neq -1$

la somme des racines du polynôme : $z + \frac{1}{z}$.

leur produit : 1.

Donc les deux solutions de (E_{car}) : $\frac{1}{z}$ et z.

$$\Delta_n = Az^n + B\frac{1}{z^n}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = z + \frac{1}{z} \\ \Delta_2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Az + B\frac{1}{z} = \frac{1}{z} + z \\ Az^2 + B\frac{1}{z^2} = z^2 + \frac{1}{z^2} + 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - zL_1}{\Rightarrow} \begin{cases} Az + B\frac{1}{z} = \frac{1}{z} + z \\ B = \frac{1}{1 - z^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-z^2}{1 - z^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{1 - z^2}$$

Donc

$$\Delta_n = \frac{-z^{n+2}}{1 - z^2} + \frac{1}{z^n(1 - z^2)}.$$

Jules R. Colle de la semaine 7

Énoncé : Soit $n \geq 2$, un entier naturel, on note :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{et } \mathcal{A} = \{ aU + bI_n : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Soit $M = a_1 U + b_1 I_n \in \mathcal{A}$, montrer que M possède un inverse dans $\mathcal{A} \Rightarrow b_1(b_1 + na_1) \neq 0$

Solution :

1. On remarque que :

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(U, I_n)$$

ainsi $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrons maintenant que $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$.

(1) $I_n \in \mathcal{A}$ clair

(2) Soit $(A,B) \in \mathcal{A}^2$

Soit $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} A = a_1 U + b_1 I_n \\ B = a_2 U + b_2 I_n \end{cases}$

$$A - B = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\in \mathbb{R}} U + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in \mathbb{R}} I_n$$

donc $A - B \in \mathcal{A}$

(3)

$$AB = (a_1 U + b_1 I_n)(a_2 U + b_2 I_n)$$
$$= a_1 a_2 U^2 + a_1 b_2 U + b_1 a_2 U + b_1 b_2 I_n$$

$$= \underbrace{(a_1 a_2 n + a_1 b_2 + b_1 a_2)}_{\in \mathbb{R}} U + \underbrace{b_1 b_2}_{\in \mathbb{R}} I_n \quad \text{car } (U^2 = nU)$$

donc $AB \in \mathcal{A}$

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que M possède un inverse dans $\mathcal{A}$ donc $\exists M^{-1} \in \mathcal{A}$ / $MM^{-1} = I_n$

donc $\exists (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^{-1} = a_2 U + b_2 I_n$

Alors :

$$MM^{-1} = (a_1 U + b_1 I_n)(a_2 U + b_2 I_n)$$
$$= (a_1 a_2 n + a_1 b_2 + b_1 a_2) U + b_1 b_2 I_n$$

$$\underset{MM^{-1} = I_n}{\Rightarrow} \begin{cases} a_1 a_2 n + a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0 & (L_1) \\ b_1 b_2 = 1 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_1 \neq 0$$

A partir du système précédent, montrons maintenant que $b_1 + n a_1 \neq 0$ ou plutôt $b_1 \neq -n a_1$

Par l'absurde, supposons que :

$$b_1 = -n a_1$$

alors, d'après (L_1), on a :

$$a_1 b_2 = 0$$

$$\underset{b_2 \neq 0 \text{ d'après } (L_2)}{\Rightarrow} a_1 = 0$$

Or si $a_1 = 0$ alors $b_1 = 0$ ce qui est faux $\lightning$

Donc $b_1 \neq -n a_1$

Nicolas H — Colle de la semaine 6

Enoncé :

Exercice 1 :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

$$\underset{(1)}{f^2 = 0} \qquad \text{et} \qquad \underset{(2)}{f \circ g + g \circ f = Id_E}$$

   Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

2. Réciproquement, soit f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$. On considère F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$, montrer que :
   (a) $f^2 = 0$.
   (b) Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F^2$, tels que $x = y + f(z)$.
   (c) En déduire qu'il existe un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = Id_E$.

Solution :

1) Procédons par double inclusion

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $x \in \ker(f)$

$\exists y \in E$ tel que $f(y) = x$

$\underset{f(\cdot)}{\Rightarrow} f^2(x) \underset{(1)}{=} 0 = f(x)$

donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $x \in \mathrm{Im}(f)$

$(2) : x = f \circ g(x) + \underbrace{g \circ f(x)}_{0 \text{ car } x \in \mathrm{Ker}(f)}$

$= f(g(x))$

donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.

2)

(a) Soit $x \in E$. Montrons que $f^2(x) = 0$

$f(x) = f(x)$

$\Rightarrow f^2(x) = f(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)}) = 0$

donc $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

(b) Soit $x \in E$. $\exists! (a, b) \in \mathrm{Im}(f) \times F$ tels que $x = a + b$. $\exists c \in E$ tel que $f(c) = a$

donc $x = b + f(c)$

Comme $c \in E$ $\exists! (d,e) \in Ker(f) \times F$ tels que

$c = d + e$

$\Rightarrow x = b + f(d+e)$

$= b + f(e)$

- Unicité : Soit $x \in E$, $(y_1, y_2, z_1, z_2) \in F^4$ tels que

$x = y_1 + f(z_1) = y_2 + f(z_2)$

$\Rightarrow y_1 - y_2 = f(z_2 - z_1)$

donc $y_1 - y_2 \in Im(f) = ker(f)$

De plus, $y_1 - y_2 \in F$ sous-espace vectoriel de E.

Comme $F \cap Ker(f) = \{0_E\}$

$y_1 - y_2 = 0_E \Rightarrow y_1 = y_2$

Alors, $0_E = f(z_2 - z_1)$

De même, $z_2 - z_1 \in Ker(f)$ et $z_2 - z_1 \in F$

donc $z_2 = z_1$

(c) Soit $g \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x = y + f(z) \longmapsto z \end{array} \right.$

- g est bien définit et est linéaire :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, $(x, y) \in E^2$. $\exists (y_1, z_1, y_2, z_2) \in F^4$ $x = y_1 + f(z_1)$

$y = y_2 + f(z_2)$.

$g(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = g(\lambda_1(y_1 + f(z_1)) + \lambda_2(y_2 + f(z_2)))$

$\underset{\text{linéarité de } f}{=} g(\underbrace{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}_{\in F} + f(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2))$

$= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$

- Soit $x \in E$. $\exists! (y, z) \in F^2$ tels que $x = y + f(z)$

$g(x) = z$ donc $x = y + f(g(z))$

- $x = y + f(z) \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(y)) = g(0_E + f(y)) = y$

donc $x = g \circ f(x) + f \circ g(x)$

donc $id_E = g \circ f + f \circ g$

Celia A. Colle n°3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.
On pose $B = \sum_{j=0}^{k-1} A^j$.
On note u et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ayant pour matrice A et B dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Montrer que
① $\mathrm{Ker}(u - id) = \mathrm{Im}(v)$
② $\mathrm{Im}(u - Id) = \mathrm{Ker}(v)$

① Montrons que $\mathrm{Ker}(u - id) = \mathrm{Im}(v)$.
Cela équivaut à montrer $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Im}(B)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$.
Alors $AX = X$.
Par récurrence, montrons, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(i) =$ "$A^i X = X$."

initialisation à $i = 1$.
$AX \underset{X \in \mathrm{Ker}(A - I_n)}{=} X$. Donc $\mathcal{P}(1)$ vrai.

hérédité. Supposons $\mathcal{P}(i)$ vrai pour un $i \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$A^{i+1} X = A^i A X \overset{AX = X}{=} A^i X \overset{HR}{=} X.$$

Donc $\mathcal{P}(i+1)$ vrai.
conclusion. Selon l'axiome de récurrence, l'initialisation et le caractère héréditaire de la

propriété, $\mathcal{P}(i)$ est vrai pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $\sum_{j=0}^{k-1} A^j X = kX$.

D'où $B(\frac{1}{k} X) = X$.

Par conséquent, $X \in Im(B)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in Im(B)$.
Alors $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad BY = X$.

$$(A - I_n) B = AB - B$$

$$= \sum_{j=1}^{k} A^j - B$$

$A^k = I_n$ et $A^0 = I_n$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} A^j + I_n - I_n - B$$

$$= 0.$$

D'où $(A - I_n) BY = 0$ et $X \in Ker(A - I_n)$.

Ainsi $\boxed{Im(v) = Ker(u - id)}$

② Montrons que $Im(u - id) = Ker(v)$.

Posons $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & u(x) - id(x) \end{array} \right.$

Par opération sur les applications linéaires, φ est linéaire.

Selon le théorème du rang,

$$n = Rg(\psi) + \dim(Ker(\psi)) \quad — (1)$$

et $n = Rg(\varphi) + \dim(Ker(\varphi))$.
Or, $Im(\varphi) = Ker(\psi)$.
D'où

$$n = \dim(Ker(\varphi)) + \dim(Ker(\psi)) \quad — (2)$$

Selon (1) et (2), $\dim(Ker(\varphi)) = \dim(Im(u-id))$.

Montrons que $Im(u-id) \subset Ker(\varphi)$.
Cela équivaut à $Im(A-I_n) \subset Ker(B)$.
Soit $X \in Im(A-I_n)$.
Alors $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad (A-I_n)Y = X$.

$$\begin{aligned} B(A-I_n) &= BA - B \\ &= \sum_{j=1}^{k} A^j - B \\ &= 0. \end{aligned}$$

(on a déjà mené un calcul similaire)

D'où $B(A-I_n)Y = 0$ et $X \in Ker(B)$.

L'inclusion et l'égalité des dimensions nous livre :

$$\boxed{Ker(\varphi) = Im(u-id)}$$

Robin G. Colle de la semaine 4

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}$
$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

1) Montrer que 1 valeur propre de M
2) Montrer que $\dim(E_1(M)) = 1$
3) Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(M) \quad |\lambda| \le 1$
4) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$, $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

Solution :

1) Soit $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = E$$

Donc E vecteur propre de 1.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_1(M)$. Alors $MX = X$

• Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |x_{i_0}| \ge |x_i|$
alors $|x_{i_0}| = \max_{1\le i\le n} |x_i| \ne 0$ car X vecteur propre

• $x_{i_0} = [MX]_{i_0,1} = \sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j} x_j$

(*) donc $|x_{i_0}| = \left|\sum m_{i_0 j} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|m_{i_0 j}|}_{>0} \overbrace{|x_j|}^{\le |x_{i_0}|} \le |x_{i_0}| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j}}_{=1} = |x_{i_0}|$

par l'inégalité triangulaire.

$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j} |x_j| = |x_{i_0}| \underset{|x_{i_0}| \neq 0}{\Longrightarrow} \sum_j m_{i_0 j} \left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| = 1 = \sum m_{i_0 j}$

soit $\sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{i_0 j}}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \overbrace{\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|}^{\leq 1}\right)}_{\geq 0} = 0$

C'est une somme nulle à termes positifs, donc :

$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad 1 - \left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| = 0 \qquad (m_{i_0 j} \neq 0$ intégrité de $\mathbb{R})$

$\quad // \qquad |x_j| = |x_{i_0}|$

- De même, $x_{i_0} = \sum_j m_{i_0 j} x_j \Longrightarrow \sum_j m_{i_0 j} \frac{x_j}{x_{i_0}} = 1 = \sum m_{i_0 j}$

et $\sum_{j=1}^{n} m_{i_0 j} \left(1 - \frac{x_j}{x_{i_0}}\right) = 0$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$ fixé $- \left|Re\left(\frac{x_j}{x_{i_0}}\right)\right| \leq \left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| = 1$

soit $0 \leq 1 - Re\left(\frac{x_j}{x_{i_0}}\right) \leq 2$

Donc en prenant la partie réelle de la somme, on a comme avant $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad Re\left(\frac{x_j}{x_{i_0}}\right) = 1 = \left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|$

donc $\frac{x_j}{x_{i_0}} = 1$, $x_j = x_{i_0}$

Donc $X = x_{i_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in Vect(E)$, $E_1(M) \subset Vect(E)$

Ainsi $\underline{Vect(E) = E_1(M)}$, par minimalité de (E).

3) ~~Soient~~ $\lambda \in Spec(M)$, $X \in E_\lambda(M)$.

En reprenant i_0 comme en 2), on a

$[MX]_{i_0 1} = \sum_j m_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0} = [\lambda X]_{i_0 1}$

De manière analogue à 2), on obtient $\underline{|\lambda| \leq \sum m_{i_0 j} = 1}$, en remarquant que si $|\lambda| = 1$, on se ramène à l'égalité $(*)$ de 2), et on obtient $X \in \mathrm{Vect}(E) = E_1(M)$, soit $\lambda = 1$.

Ainsi, si $|\lambda| = 1$, $\lambda = 1$.

3/3

Titouan

D

Rapport de colle semaine 6

Exercice 11. Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$

On note $C_1, \dots, C_{2n}$ les colones de M

$\det(M) = (-1)\det\left(C_{n+1}, C_2, \dots, C_1, C_{n+2}, \dots, C_{2n}\right)$ $\quad (C_1 \leftrightarrow C_{n+1})$

$= (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} C_2 \leftrightarrow C_{n+2} \\ \vdots \\ C_k \leftrightarrow C_{n+k} \\ \vdots \\ C_n \leftrightarrow C_{2n} \end{pmatrix}$

$M' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ diagonal par bloc donc $\det(M') = \det(A)\det(B)$

$$\boxed{\det(M) = (-1)^n \det(A)\det(B)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par : $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i, \dots, \sum_{i=1}^n x_i\right) \end{array} \right.$.

2. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Solution:

1. Soit $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \end{array} \right.$.

φ est linéaire et non nulle ($\varphi((1,0,\dots,0)) = 1$).
φ est donc une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.

Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$f(x) = (\varphi(x), \dots, \varphi(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

or $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq n-1$.

$\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$
$\Rightarrow n-1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq n-1$

donc 0 est une valeur propre de f et $\dim(\mathbb{R}^n_0(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$.

Par ailleurs :

$f((1,\dots,1)) = (\varphi((1,\dots,1)),\dots,\varphi((1,\dots,1))) = (n,\dots,n) = n(1,\dots,1)$

donc n est une valeur propre de f.

$\mathbb{R}^n_n(f) \oplus \mathbb{R}^n_0(f) \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n_n(f)) + \dim(\mathbb{R}^n_0(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n_n(f)) + n-1 \leq n$

$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n_n(f)) \leq 1$

or $\dim(\mathbb{R}^n_n(f)) \geq 1$ comme n est une valeur propre de f

donc $\dim(\mathbb{R}^n_n(f)) = 1$.

On a donc : $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_0(f) \oplus \mathbb{R}^n_n(f)$.

donc $\mathrm{Spec}(f) = \{0, n\}$ et f est diagonalisable.

Stanislas G

Semaine colle n° 7

Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
tel que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$
Montrer que M est inversible

Solution :

Par l'absurde, supposons que M n'est pas inversible
Posons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M
Comme M n'est pas inversible

$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls des scalaires de $\mathbb{C}$

donc $\max(\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}) = |\lambda_{i_0}| > 0$

de plus $\lambda_{i_0} C_{i_0} = \sum_{\substack{i \neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i$

en particulier à la ligne i_0

$$\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} \lambda_j a_{i_0 j}$$

donc $|\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} \lambda_j a_{i_0 j} \right|$

donc $|\lambda_{i_0}| |a_{i_0 i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} \lambda_j a_{i_0 j} \right| \underset{(1)}{\leq} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |\lambda_j a_{i_0 j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |\lambda_j| |a_{i_0 j}|$

or $|a_{i_0 i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$

et $|\lambda_{i_0}| > 0$

donc $|\lambda_{i_0}| |a_{i_0 i_0}| \underset{(2)}{>} |\lambda_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |\lambda_{i_0}| |a_{i_0 j}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |\lambda_j| |a_{i_0 j}|$$

$0 < |\lambda_j| \leq |\lambda_{i_0}|$ pour tout j dans $[\![1, n]\!]$

donc

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |\lambda_j| |a_{i_0 j}| \underset{(1)}{\geq} |\lambda_{i_0}| |a_{i_0 i_0}| \underset{(2)}{>} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |\lambda_j| |a_{i_0 j}| \quad \text{↯}$$

donc $\boxed{M \text{ est inversible}}$

Oudoire Gatien

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E := \mathbb{R}^n$ $\quad B_0 = (e_1, \dots, e_n)$

Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

~~En~~ Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $u_\sigma \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sigma(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$ endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Montrer que, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, les sous espaces stables par u_σ de E sont :

$D = \mathrm{Vect}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)$ $\quad H = \mathrm{Vect}(\{x \in E ; \sum x_i = 0\})$

et 2 autres sous espaces à déterminer

On remarque que les 2 autres sous espaces stables sont $\mathbb{R}^n$ et $\{0_E\}$

Soit F un sous espace stable de E différent de $\mathbb{R}^n$ et $\{0_E\}$

On vérifie que D est un sous-espace stable

Soit $x \in D \setminus \{0\}$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda \sum_{i=1}^{n} e_i$

$u_\sigma(x) = \lambda\, u_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)$ $\quad (u_\sigma \in \mathcal{L}(E))$

$= \lambda \sum_{i=1}^{n} e_{\sigma(i)} = \lambda \sum_{i=1}^{n} e_i = x$ donc D est stable par u_σ

On vérifie ensuite que H est un sous espace stable

Soit $x \in H \setminus \{0\}$, $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$u_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} e_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} = 0$ $\quad$ donc $u_\sigma(x) \in H$

donc H est stable par u_σ

Supposons que la dimension de F soit 1

Soit $x \in F \setminus \{0\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$,

en prenant $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$, $u_\sigma(x) = \sigma(x_1, \dots, x_n)$

$= \lambda (x_1, \dots, x_n)$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \; x_i = \lambda x_{\sigma(i)}$

$\Rightarrow$ en appliquant n fois l'égalité il vient

$x_i = \lambda^n x_i$ donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$

$\lambda \neq 0$ car $x \in F \setminus \{0\}$

donc $\lambda = 1$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \; x_i = x_{\sigma(i)}$

$\Rightarrow F = D$

Supposons que la dimension de F soit strictement supérieure à 1 et inférieure strictement à n.

Soit $x \in F$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{i_0} \neq 0$ et Soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$, $i_0 \neq j_0$

on pose $\sigma = \tau_{i_0, j_0}$

$$\begin{array}{rl} & x = (x_1, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{j_0}, \dots, x_n) \\ - & u_\sigma(x) = (x_1, \dots, x_{j_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_n) \\ \hline & (0, \dots, x_{i_0} - x_{j_0}, \dots, x_{j_0} - x_{i_0}, \dots) \end{array}$$

donc $\cancel{x - \sigma(x)}$ $x - u_\sigma(x) = (x_{i_0} - x_{j_0}) e_{i_0} + (x_{j_0} - x_{i_0}) e_{i_0}$

$= (x_{i_0} - x_{j_0})(e_{i_0} - e_{j_0}) \in F$

donc $\forall j \in [\![1,n]\!], j \neq i, \; (e_{i_0} - e_j) \in F$

~~donc~~ la famille $(e_{i_0} - e_j)_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i_0}}$ est libre

donc $\dim F = \cancel{\text{est}}\; n - 1$

on montre l'inclusion de H dans cet espace et on en déduit le résultat

Semaine de colle n°

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$\exp \cdot (\exp \cdot y')' = y. \qquad (*)$$

Le symbole « $\cdot$ » désigne la multiplication et non la composition.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, on a : $\exp \cdot f' \in E$.
2. On pose : $\forall f \in E$, $s(f) = \exp \cdot f'$. Montrer : $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
3. En déduire que toute fonction de E s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction y_1 et d'une fonction y_2 telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(t) y_1'(t) = y_1(t), \text{ et : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(t) y_2'(t) = -y_2(t).$$

4. Résoudre ces équations différentielles, et en déduire l'ensemble des solutions de $(*)$.

Solution :

1) Soit $f \in E$ i.e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $f = \exp \cdot (\exp \cdot f')'$

- $\exp \cdot f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- Posons $g = \exp \cdot f'$

$$\exp \cdot (\exp \cdot g')' = \exp \cdot (\underbrace{\exp \cdot (\exp \cdot f')'}_{f})' = \exp \cdot f' = g$$

donc $\boxed{\exp \cdot f' \in E}$

2) On pose $\forall f \in E \quad s(f) = \exp \cdot f'$

Montrons $s^2 = id_E$

Soit $f \in E$,

$$s^2(f) = s(s(f)) = s(\exp \cdot f')$$
$$= \exp \cdot (\exp \cdot f')'$$
$$= f \text{ (car } f \in E)$$

donc $\boxed{s^2 = id_E}$

3) L'endomorphisme s involutif est une symétrie alors

$E = \ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E)$ alors

$\forall f \in E \ \exists! \ \begin{cases} y_1 \in \ker(s + id_E) \\ y_2 \in \ker(s - id_E) \end{cases}$ tq $f = y_1 + y_2$

$(*) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = s(y_1) \\ y_2 = s(y_2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_1 = \exp \cdot y_1' \\ -y_2 = \exp \cdot y_2' \end{cases}}$

4) Soit $t \in \mathbb{R}$

$y_1'(t) = \exp(-t)\, y_1(t)$

$Sol_1 = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R} \\ t \mapsto k\, e^{A(t)} \end{array} \right. ; k \in \mathbb{R} \right\}$ où A une primitive de $x \mapsto \exp(-x)$

$= \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R} \\ t \mapsto k_1\, e^{-e^{-t}} \end{array} \right. : k_1 \in \mathbb{R} \right\}$ $\rightarrow A(t) = -\exp(-t)$

Par ailleurs,

$y_2'(t) = -e^{-t}\, y_2(t)$

$Sol_2 = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R} \\ x \mapsto k_2\, e^{B(t)} \end{array} \right. ; k_2 \in \mathbb{R} \right\}$ où B une primitive de $x \mapsto -e^{-x}$

$= \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R} \\ x \mapsto k_2\, e^{e^{-t}} \end{array} \right. : k_2 \in \mathbb{R} \right\}$ $\rightarrow B(t) = e^{-t}$

donc $\boxed{Sol_{(*)} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto k_1 e^{-e^{-t}} + k_2 e^{e^{-t}} \end{array} \right. ; k_1, k_2 \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

Colle de la semaine 6

Adam M.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1x_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2x_2 & & x_2x_n \\ x_3x_1 & x_3x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1}x_n \\ x_1x_n & & & 1+x_nx_n \end{vmatrix}$$

Solution: On note $\mathcal{D}_n$ sa matrice, tq $|\mathcal{D}_n| = D_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$: " $D_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ "

Initialisation au rang 1 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 \end{vmatrix} = (1+x_1^2)(1+x_2^2) - x_1^2x_2^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2$$

Donc $\mathcal{P}(2)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & 0+x_1x_{n+1} \\ x_2x_1 & & \vdots \\ \vdots & & 0+x_nx_{n+1} \\ x_{n+1}x_1 & & 1+x_{n+1}^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{det linéaire}}{=} \left|\begin{array}{c|c} \mathcal{D}_n & \begin{matrix} x_1x_{n+1} \\ \vdots \\ x_nx_{n+1} \end{matrix} \\ \hline x_1x_{n+1} \cdots x_nx_{n+1} & x_{n+1}x_{n+1} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} \mathcal{D}_n & 0 \\ \hline x_1x_{n+1} \cdots x_nx_{n+1} & 1 \end{array}\right|$$

$$= x_{n+1}^2 \left|\begin{array}{c|c} \mathcal{D}_n & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \\ \hline x_1 \cdots x_n & 1 \end{array}\right| + D_n$$

$$= D_n + x_{n+1}^2 \left|\begin{array}{c|c} I_n & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right| \qquad \begin{pmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - x_1 C_{n+1} \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - x_n C_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= x_{n+1}^2 + D_n$$

$$\overset{\text{HR}}{=} 1 + \sum_{i=0}^{n+1} x_i^2$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Raphaël Mouchonnet semaine de colle n°6

$\mathbb{K}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (pas supposée unitaire) de dim finie n sans diviseur de 0

1) Montrer que $\mathbb{K}$ est unitaire
2) Montrer que tous élément de $\mathbb{K}^*$ est inversible

Solution :

1) Soit $u \in \mathbb{K}^*$ on pose $\varphi_u \left| \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto ux \end{array} \right.$ bien définie.

$\circledast$ Comme 0 n'a pas de diviseur dans $\mathbb{K}$ et que $u \neq 0$. $\operatorname{Ker}(\varphi_u) = \{0\}$

Donc φ_u est injective, comme $\mathbb{K}$ est de dimension fini φ_u est bijective.

$\Rightarrow \exists e \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_u(e) = ue = u$.

De plus $ueu = uue$ Δ

$$\overset{\circledast}{\Longrightarrow} u(eu - ue) = 0$$

$$\Longrightarrow u = eu = ue$$

Soit $v \in \mathbb{K}$:

$$uev = uv$$

$$\Longrightarrow u(ev - v) = 0$$

$$\overset{\circledast}{\Longrightarrow} ev = v$$

$$\overset{\Delta}{\Longrightarrow} ev = v = ve$$

Donc $\mathbb{K}$ est unitaire et a pour neutre e.

2) Soit $u \in K^*$ φ_u est surjective et $e \in K$

$\Rightarrow \exists x \in K$ tel que $\varphi_u(x) = e = ux$

Comme K est une $\mathbb{R}$-algèbre $x \neq 0$ et donc $ux \neq 0$ et $xu \neq 0$ ⊕⊕

Ainsi $ux = e$

$$\underset{\substack{x * \cdots * u \\ +.\, e \text{ neutre}}}{\Longrightarrow} xuxu = xu$$

$$\Longrightarrow xu(xu - e) = 0$$

$$\underset{⊕ + ⊕⊕}{\Longrightarrow} xu = e$$

Donc $e = xu = ux$

x est l'inverse de u dans K.

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ à $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^3 = 0$ et $rg(A) = 2n$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A,

Montrer que $rg(A^2) = n$ et $Im(f^2) = ker(f)$

En déduire $A \sim \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

- D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{dim(E)}_{=3n} = dim(ker(f)) + \underbrace{rg(f)}_{2n}$$

donc $dim(ker(f)) = n$

- On applique le théorème du rang à $f_{Im(f)}$, on a

$$\underset{\substack{\parallel \\ 2n}}{dim(Im(f))} = \underbrace{dim(ker(f_{Im(f)}))}_{\substack{dim(ker(f)\cap Im(f)) \\ \leq n}} + \underbrace{rg(f_{Im(f)})}_{\substack{dim(Im(f^2)) \\ \leq n}}$$

car $Im(f^2) \subset ker(f)$

donc $dim(Im(f^2)) = n$

Donc $rg(A) = n$

On a : $Im(f^2) \subset ker(f)$ et $dim(Im(f^2)) = dim(ker(f))$

Ainsi $Im(f^2) = ker(f)$

Soit $(e_1; \dots; e_n)$ une base de $ker(f)$

On prend $(e_{2n+1}; \dots; e_{3n}) \in E^n$

tel que $\forall i \in [\![2n+1; 3n]\!]$ $f^2(e_i) = e_{i-2n}$

et $(e_{n+1}; \dots; e_{2n}) \in E^n$

tel que : $\forall i \in [\![1; n]\!]$ $f(e_{n+i}) = e_i$

Montrons que $(e_1, \dots, e_{3n})$ est libre.

Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1, 3n]\!]} \in \mathbb{K}^{3n}$

tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i e_i = 0$ $\circledast$

en appliquant f^2 à $\circledast$:

$$\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i f^2(e_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2n+1}^{3n} \lambda_i f^2(e_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+2n} e_i = 0$$

donc $\lambda_{2n+1} = \dots = \lambda_{3n} = 0$.

en appliquant f à $\circledast$:

$$\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i f(e_i) = 0$$

donc $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$

et $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

Ainsi $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{3n})$ est libre donc une base de $\mathcal{M}_{3n,1}(\mathbb{K})$ par cardinalité et dimension.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \sim \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

MATHEO.N

Rapport de colle semaine 6

EXERCICE 3

Soient $E_0, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, \ldots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, f_k est une application linéaire et :

(a) *f_0 est injective;*

(b) *$\mathrm{Ker}(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$;*

(c) *f_{n-1} est surjective.*

Démontrer que $\sum_{i=0}^{n}(-1)^k \dim(E_i) = 0$. □

TRAVAIL PRÉLIMINAIRE.

Pour $n = 2$:

- Soient E_0, E_1, E_2 espaces vectoriels de dimensions finies
- Soient $(f_0, f_1) \in \mathcal{L}(E_0, E_1) \times \mathcal{L}(E_1, E_2)$ telles que
  - f_0 injective
  - $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Im}(f_0)$
  - f_1 surjective.

on a : f_0 injective $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f_0)) = 0$, par le théorème du rang

$\dim(E_0) = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f_0))}_{= \dim(\mathrm{Ker}(f_1))}$

Ainsi, par le théorème du rang $\dim(E_1) = \dim(\mathrm{Im}(f_1)) + \dim(\mathrm{Ker}(f_1))$

$= \underbrace{\dim(E_2)}_{f_1 \text{ surj.}} + \dim(E_0)$

d'où : $\underbrace{\dim(E_0) - \dim(E_1) + \dim(E_2)}_{\sum_{k=0}^{2}(-1)^k \dim(E_i)} = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(n)$: " Soit $E_0, \ldots, E_n$ espaces vectoriels de dimensions finies

$f_0, \ldots, f_{n-1}$ application linéaires telles que :

$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$

où • f_0 injective

• $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $\mathrm{Ker}(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$

• f_{n-1} surjective

alors $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim(E_k) = 0$ "

Démontrons ce prédicat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

(I) $n = 1$: Soit (E_0, E_1) espaces vectoriels finis.

$f_0 \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$ injective et surjective (bijective)

On a alors par isomorphisme : $\dim(E_0) = \dim(E_1)$

ie : $\dim(E_0) - \dim(E_1) = 0$ D

H

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ vraie, montrons $P(n+1)$

Soient $E_0, \dots, E_{n+1}$ espaces vectoriels de dimensions finies, $(f_0, \dots, f_n)$ applications linéaires telles que :

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} E_{n+1}$$

- f_0 inj, f_n surjectives
- $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $\mathrm{Ker}(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$

Nous avons : $\dim(\mathrm{Im}(f_n)) = \dim(E_{n+1})$ [surjectivité]

et $\dim(\mathrm{Ker}(f_n)) = \dim(\mathrm{Im}(f_{n-1}))$ (*)

en co-restreignant f_{n-1} à $\mathrm{Im}(f_{n-1})$ nous avons par H.R.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim(E_k) + (-1)^n \dim\left(\mathrm{Im}\left(f_{n-1}^{|\mathrm{Im}(f_{n-1})}\right)\right) = 0 \quad (**)$$

$[f_{n-1}^{|\mathrm{Im}(f_{n-1})}$ surjective$]$

Or par le théorème du rang pour f_n :

$$\dim(E_n) = \dim(\mathrm{Ker}(f_n)) + \dim(\mathrm{Im}(f_n))$$
$$\overset{(*)}{=} \dim(\mathrm{Im}(f_{n-1})) + \dim(E_{n+1})$$

i.e. $\iff$ $\dim(\mathrm{Im}(f_{n-1})) = \dim(E_n) - \dim(E_{n+1})$

Ainsi par (**) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim(E_k) + (-1)^n(\dim(E_n) - \dim(E_{n+1})) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \dim(E_k) = 0.$$

(C) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ est vraie.

MANGIACOMINI
Aurélien

Rapport de Elle

Soit $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ où $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

alors $\underbrace{|rg A - rg B| \leq rg(A+B)}_{②} \underbrace{\leq rg(A) + rg(B)}_{①}$

Preuve : ① On montre $Im(A+B) \subset Im(A) + Im(B)$

Soit $X \in Im(A+B)$ alors $\exists Y_0 \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

tq $X = (A+B)Y_0 = \underbrace{AY_0}_{\in Im(A)} + \underbrace{BY_0}_{\in Im(B)}$

donc comme $Im(A+B)$ sous espace vectoriel de $Im(A) + Im(B)$ sous espace vectoriel

alors $\dim(\underbrace{Im(A+B)}_{rg(A+B)}) \leq \dim(Im(A) + Im(B))$

(Formule de Grassmann) $\leq \underbrace{\dim(Im(A)) + \dim(Im(B))}_{rg(A) + rg(B)}$

② On peut supposer $rg(A) \geq rg(B)$ on a :

01

(2) $\Leftrightarrow \text{rg} A - \text{rg} B \leq \text{rg}(A+B)$

$\Leftrightarrow \text{rg} A \leq \text{rg}(A+B) + \text{rg} B$

On montre $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(A+B) + \text{Im} B$

Soit $X \in \text{Im}(A)$ donc $\exists Y_0 \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$X = AY_0 = \underbrace{AY_0 + B\,0_{M_{p,1}}}_{\in \text{Im}(A+B)} + \underbrace{B\,0_{M_{p,1}}}_{\in \text{Im}(B)}$$

donc $\text{Im}(A)$ sous espace vectoriel de $\text{Im}(A+B) + \text{Im}(B)$ espace vectoriel donc ;

$$\underbrace{\dim(\text{Im}(A))}_{\text{rg}(A)} \leq \dim(\text{Im}(A+B) + \text{Im}(B))$$

(Formule de Grassmann) $\leq \underbrace{\dim(\text{Im}(A+B)) + \dim(\text{Im} B)}_{\text{rg}(A+B) + \text{rg} B}$

$\square$.

Mehdi B. Colle de la semaine 6

Exercice. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle vérifie : $\ker(M) = \ker(M^2)$, et : $\operatorname{im}(M) = \operatorname{im}(M^2)$. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M doivent être nulles. En déduire, par l'absurde, qu'une telle matrice n'existe pas.

<u>Solution:</u>

• Montrons que $\ker(M) = \ker(M^2)$. L'inclusion directe est toujours vraie, on montre l'égalité des dimensions finies.

Théorème du rang : $\underbrace{\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}_{3} = \dim \ker(M^2) + \underbrace{\operatorname{rg} M^2}_{2}$

Donc $\dim \ker(M^2) = 1$. Comme $\ker(M) \subset \ker(M^2)$, on a $\dim \ker(M) = 0$ ou $\dim \ker(M) = 1$.
Supposons par l'absurde $\dim \ker(M) = 0$.
Par le théorème du rang, $\operatorname{rg} M = 3$ ie $M \in GL_3(\mathbb{R})$.
On :

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\det(M^2)}} = \det(M)^2 \implies \det(M) = 0 \ \text{↯}.$$

Donc $\dim \ker(M) = 1$ et $\underline{\ker(M) = \ker(M^2)}$

• On applique le théorème du rang à M et M^2 :

$$3 = \dim \ker(M) + \dim \operatorname{Im}(M)$$
$$3 = \dim \ker(M^2) + \dim \operatorname{Im}(M^2)$$

Grâce à ce qui précède : $\dim \operatorname{Im}(M) = \dim \operatorname{Im}(M^2) = 2$.
Comme $\operatorname{Im}(M^2) \subset \operatorname{Im}(M)$ est toujours vrai : $\underline{\operatorname{Im}(M) = \operatorname{Im}(M^2)}$

• D'après $\mathrm{Ker}(M^2) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\neq 0}\right)$ et $\mathrm{Im}(M^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

et $\dim \mathrm{Ker}(M^2) = 1$

non colinéaires
et $\dim \mathrm{Im}(M^2) = 2$

et les égalités ensemblistes que nous avons établies, il vient :

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

On a donc $M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$, c'est-à-dire <u>la 1ère colonne de M est nulle</u>

De plus les colonnes de M sont engendrées par les vecteurs $(1,0,0)^T$ et $(0,1,0)^T$ de dernière composante nulle, donc <u>la dernière ligne de M est nulle</u>

• M s'écrit donc $\begin{pmatrix}0 & a & b\\0 & c & d\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$M^2 = \begin{pmatrix}0 & a & b\\0 & c & d\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & b\\0 & c & d\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & ac & ad\\0 & c^2 & cd\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} ac = 1 \\ ad = 0 \\ c^2 = 0 \\ cd = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \text{ et } c \times d = 1$ ↯

<u>Une telle matrice ne peut donc pas exister.</u>

Alexandre M. (1/2)

Enoncé

Exercice 1 :

Soient $A \in M_n(\mathbb{K}) \setminus \{0_n\}$ et Φ : $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & tr(X)A - tr(A)X \end{array}$

Montrer que Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ dont on précisera l'image et le noyau.

Résolution :

- Montrons que ϕ est linéaire

Soit $(\lambda, \mu, X_1, X_2) \in \mathbb{K}^2 \times M_n(\mathbb{K})^2$

$$\phi(\lambda X_1 + \mu X_2) = tr(\lambda X_1 + \mu X_2)A - tr(A)(\lambda X_1 + \mu X_2)$$

$$\underset{tr(\cdot)\text{ lin}}{=} \lambda tr(X_1)A - tr(A)\lambda X_1 + \mu tr(X_2)A - tr(A)\mu X_2$$

$$\underset{\text{en factorisant par } \lambda \text{ et } \mu}{=} \lambda \phi(X_1) + \mu \phi(X_2)$$

donc $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme}}$

- Déterminons $\ker(\phi)$.
- Supposons $tr(A) \neq 0$

Soit $X \in \ker(\phi)$

On a $0_{M_n(\mathbb{K})} = \phi(X) = tr(X)A - tr(A)X$

donc $tr(A)X = tr(X)A$

donc $X = \frac{tr(X)}{tr(A)} A$ $\quad tr(A) \neq 0$ par hypothèse

$\frac{tr(X)}{tr(A)} \in \mathbb{K}$

donc $X \in Vect(A)$.

Soit $Y \in Vect(A)$. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ $Y = \lambda A$

donc $\phi(Y) = \phi(\lambda A) = tr(\lambda A)A - tr(A)\lambda A$

$= 0_{M_n(\mathbb{K})}$

donc $\boxed{\text{si } tr(A) \neq 0_{\mathbb{K}} \quad Ker(\phi) = Vect(A)}$

- si $tr(A) = 0$ on a

$Ker(\phi) = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \underbrace{tr(X)A = 0_{M_n(\mathbb{K})}}_{\Leftrightarrow\ tr(X) = 0_{\mathbb{K}}} \}$

car $A \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$

$\boxed{Ker(\phi) = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : tr(X) = 0_{\mathbb{K}}\} = Ker(tr)}$

- Déterminons $Im(\phi)$.

Supposons $tr(A) \neq 0$

On a par théorème du rang

$\dim(M_n(\mathbb{K})) = \dim(Ker(\phi)) + \dim Im(\phi)$

donc comme $A \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$

on a $\dim \mathrm{Im}(\phi) = n^2 - 1$

Soit $Y \in \mathrm{Im}(\phi)$

$\exists X \in M_n(\mathbb{K})$ tq $Y = \phi(X) = tr(X)A - tr(A)X$

d'où $tr(Y) = tr(X)tr(A) - tr(A)tr(X) = 0$

donc $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Ker}(tr)$ (*)

La trace est une forme linéaire non nul

par le théorème du rang, on a

$\dim(\mathrm{Ker}(tr)) = n^2 - 1$

Comme $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sev de $M_n(\mathbb{K})$

on a $\mathrm{Im}(\phi)$ sev de $\mathrm{Ker}(tr)$ par (*)

par cardinalité-dimension, on a

$$\boxed{\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(tr)}$$

- Supposons $tr(A) = 0$

Soit $Y \in \mathrm{Im}(\phi)$ $\exists X \in M_n(\mathbb{K})$ $\phi(X) = Y = tr(X)A$

donc $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Vect}(A)$.

$\boxed{5}$ $\phi(E_{11}) = \mathrm{tr}(E_{11})A = A$

donc $A \in \mathrm{Im}(\phi)$

par minimalité de $\mathrm{Vect}(A)$ on a

$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Im}(\phi)$.

donc $\boxed{\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(A)}$

On a donc établi

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{si } \mathrm{tr}(A) = 0_{\mathbb{K}} & \mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \ ; & \mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(A) \\ \text{si } \mathrm{tr}(A) \neq 0_{\mathbb{K}} & \mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}(A) \ ; & \mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \end{array}}$$

Il y a une symétrie des résultats inattendue.

Anaë D.

Rapport de colle S6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul et non injectif vérifiant $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$

Solution :

1. Montrons que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

Par le théorème du rang, on a que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Montrons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors

$$f(x) = 0$$

et il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(a)$

D'où $f^2(a) = 0$

On applique f et il vient

$$f^3(a) = 0$$

Or par hypothèse $f^3(a) = -f(a)$ et $f(a) = x$ d'où $\boxed{x = 0}$

2. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$

$\exists x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(x)$

Par hypothèse, pour $x \in \mathbb{R}^3$ $f^3(x) + f(x) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

soit $\boxed{f^2(y) + y = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$

D'où $y \in \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$

alors $f^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3}$

d'où $x = -f^2(x) = f(\underbrace{-f(x)}_{\in \mathbb{R}^3})$ (linéarité)

et $x \in \mathrm{Im}(f)$

Hugo D.

Semaine de colle n°6

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ où $(n,p) \in [\![1,n]\!]^2$

$$|rg(A) - rg(B)| \underset{②}{\leq} rg(A+B) \underset{①}{\leq} rg(A) + rg(B)$$

Solution

① • $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$

Soit $M \in \mathrm{Im}(A+B)$ $\exists N \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ $M = (A+B)N$

Donc $M = \underbrace{AN}_{\in \mathrm{Im}(A)} + \underbrace{BN}_{\in \mathrm{Im}(B)} \in \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$

Donc $rg(A+B) \leq \dim(\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)) \overset{\text{Grassmann}}{\leq} rg(A) + rg(B) - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B))}_{\geq 0}$

$\leq rg(A) + rg(B)$

② • $rg(A) = rg(A+B-B) \underset{①}{\leq} rg(A+B) + \underbrace{rg(-B)}_{rg(B)}$

Donc $rg(A) - rg(B) \leq rg(A+B)$

• De même $rg(B) - rg(A) \leq rg(A+B)$

On en déduit que $|rg(A) - rg(B)| \leq rg(A+B)$

Antoine B. colle de la semaine 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim $<\infty$,
$f \in \mathcal{L}(E)$ tq $rg(f) = rg(f^2)$.

Montrer que $Ker(f) \oplus Im(f) = E$.

Une solution :

Montrons d'abord que $Ker(f) = Ker(f^2)$:

soit $y \in Ker(f)$, $f^2(y) = f(0) = 0$

donc $y \in Ker(f^2)$. ainsi $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.

$\Rightarrow$ $dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Ker(f))$ (1)
thm du rang en dim $<\infty$

$\Rightarrow$ $dim(E) = dim(Ker(f^2)) + dim(Im(f^2))$ (2)

(1)-(2) donne : $0 = dim(Ker(f)) - dim(Ker(f^2))$.
d'où $Ker(f)$ et $Ker(f^2)$ ont même dimension.

comme $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ des sev de E.

$\Rightarrow$ $Ker(f) = Ker(f^2)$.
égalité des dimensions

Montrons maintenant que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
soit $y \in Ker(f) \cap Im(f)$.
$y \in Im(f)$ donc : $\exists x \in E$ tq $f(x) = y$.
or $f(y) = f^2(x) = 0$ car $y \in Ker(f)$.
donc $x \in Ker(f^2) = Ker(f)$.

ainsi $y = f(x) = 0_E$.

donc $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont en $\oplus$.

par le thm du rang, on a que $dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

$= dim(Ker(f) \oplus Im(f))$

$\underset{\text{card-dimension}}{\Rightarrow}$ $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Louis D

Semaine de colle n° 6

Énoncé :

E $\mathbb{K}$-ev de dim finie, $v \in \mathcal{L}(E)$

Déterminer le rang de $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto u \circ v \end{array} \right.$

Solution :

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- On définit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ l'app. lin. u_{ij} telle que, pour tt $k \in [\![1,n]\!]$

$$u_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\mathcal{B} = ((u_{ij})_{(j,i) \in [\![1,n]\!]^2})$ base de $\mathcal{L}(E)$.

- $\exists (\lambda_{ij})_{ij \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathbb{K}^{n^2}$ $v = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{ij} u_{ij}$

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\varphi(u_{ij}) = u_{ij} \circ v$

$$= \sum_{1 \leq k,l \leq n} \lambda_{kl} \, u_{ij} \circ u_{kl}$$

$$= \sum_{1 \leq k,l \leq n} \lambda_{kl} \, \delta_{jk} \, u_{il}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \lambda_{jl} \, u_{il}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{ij} \circ u_{kl}) \\ = E_{ij} E_{kl} \\ = E_{il} \delta_{jk} \end{array} \right.$

On remarque alors :

$$\varphi(u_{i1}) = \lambda_{11} u_{i1} + \lambda_{12} u_{i2} + \dots + \lambda_{1n} u_{in}$$

$$\varphi(u_{i2}) = \lambda_{21} u_{i1} + \lambda_{22} u_{i2} + \dots + \lambda_{2n} u_{in}$$

$$\vdots$$

$$\varphi(u_{in}) = \lambda_{n1} u_{i1} + \lambda_{n2} u_{i2} + \dots + \lambda_{nn} u_{in}$$

Ainsi $F_i := \mathrm{Vect}(\overbrace{u_{i1}, u_{i2}, \dots u_{in}}^{=: \mathcal{B}_i})$
est stable par φ.

De plus $\mathcal{B}_1 \# \dots \# \mathcal{B}_n$ est une base de $\mathcal{L}(E)$

On remarque également que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(\varphi_{F_i}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(u_{i1}) & \varphi(u_{i2}) & \dots & \varphi(u_{in}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /u_{i1} \\ /u_{i2} \\ \\ /u_{in} \end{array} \end{array}$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) =: V$$

$$\text{Ainsi } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(\mathcal{B}_1) & \varphi(\mathcal{B}_2) & \dots & \varphi(\mathcal{B}_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{V} & & & 0 \\ & \boxed{V} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{V} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /\mathcal{B}_1 \\ /\mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ /\mathcal{B}_n \end{array} \end{array}$$

Si on note $r := \mathrm{rg}(v)$, il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$
telles que $V = P\, J_n(r)\, Q$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} PJ_n(r)Q & & & 0 \\ & PJ_n(r)Q & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & PJ_n(r)Q \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} P & & & 0 \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P \end{pmatrix}}_{\text{inversible}} \begin{pmatrix} J_n(r) & & & 0 \\ & J_n(r) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_n(r) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} Q & & \\ & Q & \\ & & \ddots & \\ & & & Q \end{pmatrix}}_{\text{inversible}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Ainsi, il vient } \mathrm{rg}(\varphi) &= n\, r \\ &= n\, \mathrm{rg}(v) \end{aligned}}$$

Paul C.

Enoncé

Soit u l'application définie par
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad u(A) = A + Tr(A) I_n$

1) Montrer que u est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2) Montrer que $u^2 - (n+2)u + (n+1) Id = 0$
3) En déduire une expression de u^{-1}
4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $u(A) = \lambda A \quad (E_\lambda)$

Solution

1) $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ linéaire par linéarité de la trace.
par égalité des ensembles de départ et d'arrivée, il suffit de démontrer u injective.

• Soit $A \in Ker(u)$, $A = -Tr(A) I_n \Rightarrow A \in D_n(\mathbb{R})$

$\underset{Tr(\cdot)}{\Rightarrow} Tr(A) = -Tr(A) \times n$ [Tr linéaire, $Tr(I_n) = n$]

$\Rightarrow \begin{cases} Tr(A) = 0 \\ \text{ou} \\ n = -1 \end{cases}$ (ce qui n'est pas)

on en déduit $Tr(A) = 0$ et $A = 0 I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

d'où u injective, donc bijective, i.e u automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P := X^2 - (n+2) X + (n+1) \in \mathbb{R}[X]$

Montrons $P(u)(A) = 0$.

~~$u^2 = A\ Id +$~~ $u^2(A) = A + (n+2) Tr(A) I_n$.

$P(u)(A) = A + (n+2) Tr(A) I_n - (n+2)(u(A)) + (n+1) A$
$= (n+2)(\underbrace{A + Tr(A) I_n}_{u(A)}) - (n+2)(u(A))$
$= 0$

3) de Q2, on déduit $u\left(u-(n+2)\,id\right) = -(1+n)\,id$

$$\underset{u^{-1}\circ}{\Rightarrow} \left(u-(n+2)\,id\right) = -(1+n)\,u^{-1}$$

$$\underset{\times\frac{-1}{n+1}}{\Rightarrow} \frac{-1}{n+1}u + \frac{n+2}{n+1}\,id = u^{-1}$$

4) Montrons $Sol_{E_\lambda} = \begin{cases} Ker(Tr) & si\ \lambda = 1 \\ Vect(I_n) & si\ \lambda = n+1 \\ \{0\} & sinon \end{cases}$

Soit $A \in Sol\, E_\lambda$

$\boxed{\subset}$ • $\lambda = 1$: $A + Tr(A) I_n = A$

$\Rightarrow Tr(A) I_n = 0$

$\Rightarrow Tr(A) = 0$

i.e. $A \in Ker(Tr)$

• $\lambda = n+1$.

Si $A = 0$, ~~E_{n+1} se réécrit $0=0$ ce qui est clair.~~

$0 + Tr(0) I_n = 0$ et $0 \in Vect(I_n)$

Si $A \neq 0$, $A \in D_n(\mathbb{R})$: Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$.

$$[A]_{ij} + Tr(A) \times \underbrace{[I_n]_{ij}}_{0} = [A]_{ij} \times (n+1)$$

$$\Rightarrow [A]_{ij} = 0$$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $[A]_{ii} + Tr(A) = (n+1)[A]_{ii} \Rightarrow [A]_{ii} = \frac{Tr(A)}{n}$ constant en i

i.e. $A \in Vect(I_n)$

• $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq n+1$

• $A = 0$: clair.

~~A~~ Par l'absurde supposons $A \neq 0$, $Tr(A) \neq 0$ (sinon $A = \underset{\neq 1}{\lambda} A$ ce qui n'est pas)

$A \in D_n(\mathbb{R})$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $[A]_{ii} + Tr(A) = \lambda [A]_{ii}$

$$\Rightarrow [A]_{ii} = \frac{Tr(A)}{\underset{\neq 0}{\lambda - 1}} \qquad Tr(A)$$

Alors $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} = \frac{n\,Tr(A)}{\lambda - 1} \underset{Tr(A)\neq 0}{\Rightarrow} \lambda - 1 = n$ ce qui n'est pas

donc $A = \emptyset \subset \{0\}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $A \in \{0\}$, $A = 0$ est clairement solution de E_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. 2/3

Paul C.

• Si $\lambda = 1$, Soit $A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. alors $A + \mathrm{Tr}(A) = 1 \times A$

i.e. $u(A) = \lambda A$ d'où A sol de E_1

• Si $\lambda = n+1$, Soit $A \in \mathrm{Vect}(I_n)$. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, $A = \alpha I_n$.

alors $A + \mathrm{Tr}(A) I_n = \alpha I_n + \alpha \times n\, I_n = (n+1) \times \alpha \times I_n$

i.e. $u(A) = \underbrace{(n+1)}_{\lambda} A$ d'où A solution de E_{n+1}

on a donc

$$\mathrm{Sol}_{E_\lambda} = \begin{cases} \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) & \text{si } \lambda = 1 \\ \mathrm{Vect}(I_n) & \text{si } \lambda = n+1 \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Martin
Kimler-Liler

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $rg(f) = rg(f^2)$.

Montrer que $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.

Par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) + rg(f) = n.$$

Reste à montrer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.
Montrons que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0_E\}$, la réciproque étant claire.

Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Alors,

$$\exists x \in E, \quad y = f(x)$$

et

$$f(y) = f^2(x) = 0_E. \quad (i).$$

Par le théorème du rang,

$$\dim(\ker f) + rg(f) = n = \dim(\ker(f^2)) + rg(f^2)$$

$$\Longrightarrow \quad \dim(\ker f) = \dim(\ker(f^2))$$

Or clairement $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, d'où $\ker(f) = \ker(f^2)$ puis $f(x) = 0$ par (i).

Cela conclut.

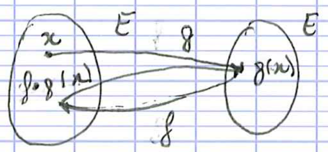
Tiguin, David — Colle de la semaine 6

Soit $(f,g)\in\mathcal{L}(E)$ où E $\mathbb{K}$ ev de dimension fini $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $f\circ g\circ f=f$ et $g\circ f\circ g=g$. Montrer que $E=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(g)$ puis comparer $rg(f)$ et $rg(g)$

- Soit $x\in\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)$ alors $\exists a\in E$ tel que $f(a)=x$.
  De même comme $x\in\mathrm{Ker}(g)$ $g(x)=0$ alors $g(f(a))=0$.
  En appliquant f on obtient $f\circ g\circ f(a)=f(a)=0$ d'où $x=0$.
- Analyse. Montrons qu'il existe une décomposition d'éléments de E en $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(g)$

Soit $x\in E$, supposons $\exists(a,b)\in\mathrm{Im}(f)\times\mathrm{Ker}(g)$ tel que $x=a+b$, $a\in\mathrm{Im}(f)$ alors $\exists u\in E$ tel que $f(u)=a$, $x=f(u)+b$, en appliquant $f\circ g$

$\oplus$ $f\circ g(x)=f(u)=a$ d'où $x=\underbrace{f\circ g(x)}_{\in\mathrm{Im}(f)}+\underbrace{(x-f\circ g(x))}_{\in\mathrm{Ker}(g)}$



- Synthèse

Considérons la décomposition antérieure, alors $f\circ g(x)\in\mathrm{Im}(f)$ et $g(x-f\circ g(x))=g(x)-g(x)=0$ donc elle convient.

Comme $\mathrm{Ker}(g)+\mathrm{Im}(f)\subset E$ on obtient

$\mathrm{Ker}(g)\oplus\mathrm{Im}(f)=E$

D'après le théorème du rang et la question 1

$n = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$ (**)

$= rg(g) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$

Montrons $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $g(x) = 0$, d'après (*)

$f(x) = f(g(x)) = 0$ d'où $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$

par symétrie de rôles $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ alors

par (**) $rg(f) = rg(g)$ car $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$

REUTER
Robin

Rapport Colles

MPI

Exercice CC-INP n° 64. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que l'égalité $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ implique l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

2. Montrer l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

3. Montrer que l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ implique l'égalité $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

1. Supposons $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$
Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
$\boxed{\supset}$ Immédiat
$\boxed{\subset}$ Soit $z \in \mathrm{Im}(f)$
$\exists\, y \in E$ tel que $f(y) = z$
Or, $\exists\, (y_1, y_2) \in \mathrm{Im} f \times \ker f$
tel que $y = y_1 + y_2$
et $\exists\, x \in E$ tq $y_1 = f(x)$.
Donc
$z = f(y) = f(y_1) + f(y_2)$
$= f^2(x)$
Ainsi $z \in \mathrm{Im}(f^2)$

On a donc le résultat.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que $\ker f \subset \ker f^2$
Soit $x \in \ker f$.
Alors $f(x) = 0 \underset{f(\cdot)}{\Rightarrow} f^2(x) = f(0) = 0$.
$x \in \ker f^2$.
En appliquant le théorème du rang à f et f^2
$\dim E = \mathrm{rg}\, f + \dim \ker f$
$\dim E = \mathrm{rg}\, f^2 + \dim \ker f^2$.

Or $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Im}\, f^2)$ par hypothèse.
Donc $\dim(\ker f) = \dim(\ker f^2)$.
Ainsi $\ker f = \ker f^2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Raisonnement symétrique car on a immédiatement $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

3. Supposons $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

- Par le théorème du rang :
$\dim E = \mathrm{rg}\, f + \dim(\ker f)$
- Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$
$f(x) = 0$ et $\exists\, y \in E$ tel que $f(y) = x$
$f^2(y) = f(x) = 0$
Donc $y \in \ker(f^2) = \ker(f)$ par question 2.
Ainsi $x = f(y) = 0$.
Donc $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.
Donc $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 9. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc(c-b)(c-a)(b-a)$$

par la formule de Vandermonde.

Pierre V. Colle de la semaine 6

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^3 = 0$ et $rg(A) = 2n$,
et f l'endomorphisme canoniquement associé à A,
Montrer que $rg(A^2) = n$ et $Im(f^2) = Ker(f)$
En déduire $A \sim \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution

• D'après le théorème du rang

$$\underbrace{\dim(E)}_{=3n} = \dim(Ker(f)) + \underbrace{\dim(Im(f))}_{2n}$$

donc $\dim(Ker(f)) = n$ (*)

• Soit $Y \in Im(f^2)$ $\quad \exists X \in \mathcal{M}_{3n,1}(\mathbb{K})$ $\quad f^2(X) = Y$

donc $f(Y) = f^3(X) = 0$

donc $Y \in Ker(f)$

donc $\dim(Im(f^2)) \leq n$ (**)

• En appliquant le théorème du rang à $f_{|Im(f)}$, on a

$$\dim(Im(f)) = \dim(Ker(f_{|Im(f)})) + \dim(Im(f_{|Im(f)}))$$

donc $\underbrace{\dim(Im(f))}_{=2n} = \underbrace{\dim(Ker f \cap Im f)}_{\leq n \ (*)} + \underbrace{\dim(Im f^2)}_{\leq n \ (**)}$

donc $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = \dim(Im f^2) = n$ donc $rg(A^2) = n$

• $Im(f^2) \subset Ker(f)$ et $\dim(Im f^2) = \dim(Ker f)$ donc $Im(f^2) = Ker(f)$

• Soit $(e_1 \dots e_n)$ une base de $Ker f$

$Ker(f) = Im(f^2)$ donc $\exists (e_{2n+1} \dots e_{3n}) \in E^n$ tel que

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\quad f(e_{2n+i}) = e_i$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $e_{n+i} \in E$ tel que $f(e_{n+i}) = e_i$

Montrons que $(e_1 \dots e_n e_{n+1} \dots e_{2n} e_{2n+1} \dots e_{3n})$ est libre

Soit $(\alpha_i)_{i \in [\![1,3n]\!]} \in \mathbb{K}^{3n}$ tel que $\sum_{i=1}^{3n} \alpha_i e_i = 0$ (1)

$\overset{\Rightarrow}{f(\cdot)}$ $\cancel{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{f(e_i)}_{0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} \alpha_i f(e_i) + \sum_{i=2n+1}^{3n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+n} e_i + \sum_{i=2n+1}^{3n} \alpha_i f(e_i) = 0$ (2)

$\overset{\Rightarrow}{f(\cdot)}$ $\cancel{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+n} \underbrace{f(e_i)}_{0}} + \sum_{i=2n+1}^{3n} \alpha_i f^2(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+2n} e_i = 0$ (3)

(3) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+2n} e_i = 0$

par liberté de $(e_1 . e_n)$, $\forall i \in [\![2n+1, 3n]\!]$ $\alpha_i = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+n} e_i = 0$

par liberté de $(e_1 . e_n)$, $\forall i \in [\![n+1, 2n]\!]$ $\alpha_i = 0$

(1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$

par liberté de $(e_1 . e_n)$ / $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\alpha_i = 0$

donc $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_{3n})$ est libre et de cardinal $3n$ donc est une base

On a donc $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{C}$ la base tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$

Par théorème de changement de base,

$\exists P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}} \in GL_{3n}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) (P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}})^{-1}$

Donc $A \sim \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ibrahim K.

Colle de la semaine 6

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ tq } \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \phi(A) = -2A^T \\ \text{Calculer } \det(A).\end{array}}$$

on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

or $S_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left((E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}\right)$

$A_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left((E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}\right)$

ainsi $\mathrm{Vect}\left((E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n} \# (E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}\right) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

or

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ tq $i \leq j$

$$\phi(E_{ij} + E_{ji}) = -2(E_{ij} + E_{ji})^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la Transposé} \\ \text{est linéaire}}}{=} -2(E_{ji} + E_{ij})$$

et si $i < j$ on a

$$\phi(E_{ij} - E_{ji}) = -2(E_{ji} - E_{ij}) = 2(E_{ij} - E_{ji})$$

donc si on note $\mathcal{B}$ la base induite de la décomposité

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \phi(\mathcal{B}_{S_n(\mathbb{R})}) & \phi(\mathcal{B}_{A_n(\mathbb{R})}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -2 & & & \\ \hline & & & 2 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} /\mathcal{B}_{S_n(\mathbb{R})} \\ \\ /\mathcal{B}_{A_n(\mathbb{R})} \end{array} \end{array}$$

donc $\det(\phi) = (-2)^{\dim(S_n(\mathbb{R}))} \, 2^{\dim(A_n(\mathbb{R}))} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \, 2^{n^2}$

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie n.
Soient $f, g \in L(E)$ tq $f+g = id_E$ et $rgf + rg(g) \leq n$.
1. Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} g$.
2. En déduire que f et g sont des projecteurs.

Question 1 : Raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in Ker(f)$.

Nous savons que $f+g = id_E$

$\Rightarrow \cancel{f(x)}^{\to 0} + g(x) = x$

Donc $x \in Im(g)$

$\boxed{\supset}$ Nous savons que $rg(g) + rg(f) \leq n$

[Formule du rang] $\Rightarrow rg(g) \leq dim(Ker(f))$. ⊛

De plus d'après $\boxed{\subset}$, nous savons que $Ker(f) \subset Im(g)$

$\Rightarrow dim(Ker(f)) \leq rg(g)$ ⊛⊛

⊛ et ⊛⊛ nous permettent d'en conclure que $dim(Ker(f)) = rg(g)$

Or, $\left.\begin{array}{l} E \text{ de dimension finie} \\ Ker(f) \subset Im(g) \\ dim(Ker(f)) = rg(g) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Ker(f) = Im(g)}$

Question 2 : Montrons que f et g sont des projecteurs.

① Soit $x \in E$

$f(f(x)) = f(x - g(x))$

[f endomorphisme] $= f(x) - f(g(x))$

[$Ker(f) = Im(g)$] $= f(x)$

Donc $\boxed{f(f(x)) = f(x)}$ et

$\underline{f \text{ est un projecteur}}$

② Remarquons que $g^2 = (id - f)^2$
$= id^2 - 2id \circ f + f^2$
$= id - 2f + f^2$

Soit $x \in E$

$g(g(x)) = x - 2(f(x)) + \underbrace{f(f(x))}_{= f(x)}$

$= x - f(x)$

$= g(x)$

Donc $\boxed{g(g(x)) = g(x)}$ et

$\underline{g \text{ est un projecteur}}$

Léon. N

Rapport de colle de la semaine du 9 octobre

Énoncé : Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que dire de $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AMA = 0\} := H$.

Solution :

Soit $\varphi_A \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto AMA \end{array}\right.$, on vérifie sans-souci avec les règles de calcul dans un anneau que

φ_A est linéaire.

On remarque que $H = \mathrm{Ker}(\varphi_A)$, ainsi H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Si $A \in Gl_n(\mathbb{K})$, montrons que $H = \{0\}$, l'inclusion $\{0\} \subset H$ étant claire,

  Soit $M \in H$, montrons que $M \in \{0\}$.

  $AMA = 0 \underset{A^{-1} \times_{\text{AMA}} \times A^{-1}}{\Longrightarrow} M = 0$, ainsi $A \in Gl_n(\mathbb{K}) \Rightarrow H = \{0\}$

On remarque au passage, comme $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ que φ_A est injective donc bijective de réciproque $\varphi_{A^{-1}}$.

- Si $A \notin Gl_n(\mathbb{K})$, on montre que φ_A n'est pas surjective par l'absurde : supposons φ_A surjective, soit $P \in Gl_n(\mathbb{K})$, alors $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ |

  $P = AMA \overset{rg}{\Longrightarrow} rg(P) \leq rg(A)$ et $rg(P) \leq M$

Or comme $A \notin Gl_n(\mathbb{K})$, $rg(A) < n$ ainsi $rg(P) = n < n$ Q.E.A.

Ainsi, comme $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, φ_A n'est pas injective : $H \neq \{0\}$

On se propose de minorer la dimension de H.

Comme $A \notin Gl_n(\mathbb{K})$, $Ker(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.
On note r sa dimension et on prend
$(X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})^r$ base de $Ker(A)$ ~~que~~
~~l'on complète avec des vecteurs~~ $\cancel{(X_{r+1}, \dots, X_n) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})^{n-r}}$
~~en une base de~~ $\cancel{\mathcal{M}_n}$.

~~Soit~~ $\cancel{M \in Vect(X_1, \dots, X_r), \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r, M = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k}$

$\cancel{\Rightarrow AMA = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A}$

Soit $k \in [\![1, r]\!]$, on pose $Y_k := \left(X_k | X_k | \dots | X_k \right)$

ainsi $\forall k \in [\![1, r]\!]$ $AY_kA = \left(\underbrace{AX_k}_{0} | \dots | \underbrace{AX_k}_{0} \right) A = 0$
car $X_k \in Ker(A)$

$\Rightarrow \forall k \in [\![1, r]\!]$ $Y_k \in H$
Par minimalité, $Vect(Y_1, \dots, Y_r) \subset H$.

· on montre la liberté de $(Y_1, \dots, Y_r)$.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k Y_k = 0$

En regardant la première colonne : $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k = 0$.

Par liberté de $(X_1, \dots, X_r)$ base de $Ker(A)$,
$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Ainsi $\dim(Vect(Y_1, \dots, Y_r)) = r \leq \dim H$.

On en déduit $\boxed{\dim Ker(A) \leq \dim Ker(\mathcal{L}_A)}$, ce qu'il ne fallait pas particulièrement démontrer mais j'ai cette construction suffisament intéressante pour la partager.

Ghanim
Rayan
MP I^1

Colle de la semaine n°3

Enoncé : Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E.

Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous espace de E ~~est~~ possède un supplémentaire stable par u.

Solution : Nous raisonnons par double implication

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons u diagonalisable

$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valeurs propres deux à deux distinctes

et $\quad E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_\lambda(u)$

On considère F un sous espace vectoriel de E

On pose $d := \dim(F)$ et on considère

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ base de F

On nous avons une base de E ayant la forme

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \# \ldots \# \mathcal{C}_n$ où

$\mathcal{C}_h$ base de $E_h(u)$ avec

$h \in [\![1, n]\!]$

Si E = F, le ~~résultat~~ résultat est clair, on suppose $d < \dim(E)$

Nous complétons $\mathcal{B}$ en une base de E avec des vecteurs de $\mathcal{C}$. Nous avons donc un supplémentaire de F que nous notons G qui est ~~composé de~~ engendré par vecteurs de $\mathcal{E}$. On pose $\mathcal{B}' = (e_{d+1}, \dots, e_n)$ base de G

Montrons que G est stable par u

Soit $x \in G$,

$$\exists (\mu_1, \dots, \mu_{n-d}) \in \mathbb{K}^{n-d} \quad x = \sum_{k=1}^{n-d} \mu_k e_{d+k}$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-d} \mu_k u(e_{d+k})$$

Or

$\forall k \in [\![d+1, n]\!]$ $e_k \in \mathcal{E}$ donc e_k appartient à un sous espace propre stable par u donc $u(e_k)$ appartient à ce même espace propre. Or cela ne nous donne pas directement son appartenance ~~de~~ à G, pour cela il faut remarquer que l'espace étant propre

$u(e_k) = \lambda_k e_k$ où λ_k est le vecteur propre associé à l'espace propre auquel appartient e_k.

Ainsi $u(x) \in G$

G est donc un supplémentaire de F stable par u.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que tout sous espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par u

Nous souhaitons montrer que u est diagonalisable. Pour cela nous allons adopter la stratégie suivante :

Nous allons montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E tel que

$\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{Vect}(x_k)$ est une droite stable

Si une telle base existe, la matrice de u dans cette base sera clairement diagonale ce qui nous livre que u est diagonalisable

On raisonne par récurrence finie sur $k \in [\![1,n]\!]$

On pose

$\forall k \in [\![1,n]\!]$ $P(k)$: " $\exists (x_1,\dots,x_k)$ famille libre de E tel que

$\forall l \in [\![1,k]\!]$ $Vect(x_l)$ droite stable "

<u>Initialisation à k=1</u>: On considère F un hyperplan de E

E étant de dimension finie, $dim(F)=n-1$

On considère G un supplémentaire de F stable par u

Sa dimension $dim(G)=1$ (G est une droite)

$\exists x_1 \in E\setminus\{0_E\}$ $G=Vect(x_1)$

Par hypothèse G est une droite stable et (x_1) libre dans E

Donc $P(1)$

<u>Hérédité</u>: Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $P(k)$

On considère $(x_1,\dots,x_k)$ tel que dans le précédent

On complète cette famille en une base:

$B=(x_1,\dots,x_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ base de E

Ainsi on pose

$F=Vect(x_1,\dots,x_k,e_{k+1},\dots,e_{n-1})$ qui est un hyperplan

Par un raisonnement analogue à l'initialisation :

$\exists x_{h+1} \in E \setminus \{0_E\}$ Vect(x_{h+1}) droite stable et supplémentaire de F

C'est un supplémentaire de

$(x_1, \dots, x_h, e_{h+1}, \dots, e_{n-1}) \# (x_{h+1})$ base de E

Cela nous livre la liberté de $(x_1, \dots, x_{h+1})$

Ainsi nous avons $P(h+1)$

<u>Conclusion :</u> Nous avons donc notre décomposition en droite stable et u est diagonalisable.

(Le caractère base étant assuré par le fait que nous avons une famille libre à n éléments où n = dim(E))

Louis B — Khôlle de la semaine 6

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, B_0 la base canonique de $\mathbb{C}^n$ tq $\mathrm{Mat}_{B_0}(u) = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$ $m_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$
et $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

1) Montrer que 1 est valeur propre de u

2) Montrer que $\dim(E_1(u)) = 1$

3) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
λ vp de $u \Rightarrow |\lambda| \leq 1$

1) $M = \mathrm{Mat}_{B_0}(u)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$$\left[M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times 1 = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1$$

Donc $M\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$: 1 est valeur propre de u.

3) Soit v un vecteur propre de u pour la valeur propre 1.

$$v = (v_1, \dots, v_n)^T, \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$$

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|v_{i_0}| \geq |v_i|$

Alors $|v_{i_0}| = \left|\sum_{k=1}^{n} v_k m_{i_0 k}\right|$

(inégalité triangulaire) $\leq \sum_{k=1}^{n} |v_k| m_{i_0 k}$

$(|v_{i_0}| \geq |v_k|)$ $\leq \sum_{k=1}^{n} |v_{i_0}| m_{i_0 k} = |v_{i_0}|$

Donc $|v_{i_0}| = \sum_{k=1}^{n} |v_k| m_{i_0 k}$

et donc comme v est non nul, $|v_{i_0}|>0$

Donc $1 = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{v_k}{v_{i_0}}\right| m_{i_0k} = \sum_{k=1}^{n} m_{i_0k}$ (définition)

$\iff 0 = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left|\frac{v_k}{v_{i_0}}\right|\right) m_{i_0k}$

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $m_{i_0k} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\left|\frac{v_k}{v_{i_0}}\right| \leqslant 1$

Donc la somme est constitué de termes positifs et est nulle : $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\left|\frac{v_k}{v_{i_0}}\right| = 1$

donc $v_1 = v_2 = \cdots = v_n$

et $v \in \mathrm{vect}((1,\dots,1)^T)$

Donc $\mathrm{Dim}(E_1(u)) = 1$.

3) Supp $\exists \lambda \in \mathrm{Spec}(u)$

Soit v un vecteur propre associé à λ ($v \neq 0$) tq $v = ((v_1,\dots,v_n)^T) \in \mathbb{C}^n$, Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $|v_{i_0}| \geqslant |v_i|$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

Alors $\lambda v_{i_0} = \sum_{k=1}^{n} v_k m_{i_0k}$

$$\Rightarrow |\lambda||v_{i_0}| = \left|\sum_{k=1}^{n} v_k m_{i_0k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |v_k| m_{i_0k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |v_{i_0}| m_{i_0k} = |v_{i_0}|$$

$|v_{i_0}|>0 \Rightarrow |\lambda| \leqslant 1$