Oudoire
Gatien

1) Déterminer E_n l'ensemble des polynomes à coefficients réels tels que : $P(X) - P'(X) = \frac{X^n}{n!}$
2) Dans le cas $n \geq 2$, en deduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'admet pas de racine reelle multiple

1)

Si $n = 0$:

$P - P' = 1$

$\Rightarrow \deg(P - P') = 0$

$\Rightarrow P' = 0$ donc $P = 1$

Si $n \geq 1$

$\deg(P - P') = n$ $\quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) X^k$

$P \in E_n \Rightarrow P - P' = \frac{X^n}{n!}$

$\Rightarrow P' - P'' = \frac{X^{n-1}}{n-1}$

$\vdots$

$\Rightarrow P^{(n-1)} - P^{(n)} = X$

$\Rightarrow P^{(n)} = 1$

donc $a_n = \frac{1}{n!}$

et on en deduit la relation de recurrence,

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ a_k = a_{k+1} (k+1)$

donc $a_k = \frac{1}{k!}$ donc $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$

2) Supposons que α ~~soit~~ $\in \mathbb{R}$, soit une racine multiple de $\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha) - P^{(k+1)}(\alpha) = 0$ donc ~~⇔~~ $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$

donc $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$ donc $\alpha = 0$

or $P(\alpha) = 1$ ↯

donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine double

Celia A.

Semaine n°4
Colle n°2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons G_n, l'ensemble des générateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$, et
$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Phi_k(X) = \prod_{\xi \in G_k} (X - \xi)$
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
1) Quel est le degré de Φ_k ?
2) Calculer Φ_1, Φ_2, Φ_3 et Φ_4.

1) $\Phi_k = \prod_{\xi \in G_k} (X - \xi)$

Donc $\deg(\Phi_k) = \mathrm{Card}(G_k)$
$= \varphi(k)$

avec φ l'indicatrice d'Euler dont la définition a été étendue.

2) Pour $k = 1$.
$\mathbb{U}_1 = \{1\}$. Donc $G_1 = \{1\}$.
D'où $\Phi_1 = (X - 1)$.

Pour $k = 2$.
$\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$. Donc $G_2 = \{-1\}$.
D'où $\Phi_2 = (X + 1)$.

Pour $k = 3$.
$\mathbb{U}_3 = \{1, j, \bar{j}\}$. Donc $G_3 = \{j, \bar{j}\}$.
D'où $\Phi_3 = (X - j)(X - \bar{j}) = X^2 - \bar{j}X - jX + 1$
$= X^2 + X + 1$.

Pour $k = 4$.

$\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$. d'où $\mathbb{G}_4 = \{i, -i\}$.

donc $\Phi_4 = (X - i)(X + i)$

$= X^2 - (i^2)$

$= X^2 + \underline{1}$

Wassim
N.

Rapport de colle, semaine 5

Soit $P = (a+X)^n$, $P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i$

1) Exprimer α_i en fonction de la valeur en un certain ~~point~~ x de la fonction polynomiale associée à P et de ses dérivées

2) Ecrire les dérivées successives de P sous forme factorisée

3) Retrouver la formule du binôme de Newton

1) on a $P(0) = a_0$

$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$

$P'(0) = a_1$

$P''(0) = 2a_2$

$\vdots$

$P^{(k)}(0) = k! a_k$

Donc $\alpha_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

2) $P^{(0)} = (a+x^n)$ $P^{(1)} = n(a+x)^{n-1}$ $P^{(2)} = n(n-1)(a+x)^{n-2}$

... $P^{(i)} = \dfrac{n!}{(n-i)!}(x+a)^{n-i}$

3) on a : $k!\,\alpha_k = \frac{n!}{(n-k)!} (a+X)^{n-k}$

$$\alpha_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} (a+X)^{n-k}$$

$$\alpha_k = \binom{n}{k} \alpha^{n-k}$$

on retrouve bien la formule du Binôme de Newton

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \alpha^{n-k}$$

Lina.A

Colle n°2, de la semaine 4.

Soit $n \geq 2$. Quel est le reste de la division euclidienne $X^n + 3X^{n-1} + 2$ par $(X-1)^2$?

Solution :

Considérons la division euclienne de $X^n + 3X^{n-1} + 2$ par $(X-1)^2$ alors

$\exists ! (Q, R) \in \mathbb{K}^2[X]$ $\quad X^n + 3X^{n-1} + 2 = Q(X-1)^2 + R.$

et $\deg(R) < 2$

De plus $\deg(R) \neq -\infty$ sinon $(X-1)^2$ divise $X^n + 3X^{n-1} + 2$. $\lightning$.

Donc $\deg(R) = 0$ ou $\deg(R) = 1$.

Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que. $R = \lambda X + \mu$

Déterminons λ, μ.

En évaluant en 1 il vient que.

$\lambda + \mu = 6 \qquad (1).$

De plus 1 est racine double, Ainsi

$nX^{n-1} + 3(n-1)X^{n-2} = 2Q(X-1) + Q'(X-1)^2 + \lambda$

En évaluant de nouveau en (1).

$4n - 3 = \lambda$

En subtituant cette expression dans (1),

$\mu = 9 - 4n.$

Finalement : $\quad R = (4n-3)X + 9 - 4n.$

Colle de la semaine 4

Adam M.

Exercice 101. Le polynôme X^4+4 est-il irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$? Quels sont les entiers naturels n tels que n^4+4 soit premier ?

Solution :

$$\begin{aligned}
X^4+4 &= X^4-(2i)^2 \\
&= (X^2-2i)(X^2+2i) \\
&= \left(X^2-\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2\right)\left(X^2-\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2\right) \\
&= \left(X-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \underbrace{(X^2-2X+2)}_{\in\mathbb{Q}[X] \text{ de deg } 2}\underbrace{(X^2+2X+2)}_{\in\mathbb{Q}[X] \text{ de deg } 2}
\end{aligned}$$

Donc X^4+4 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

Analyse : Supposons $\exists n\in\mathbb{N}$ tels que n^4+4 premier

$$n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

Comme n^4+4 est premier, ses seules diviseurs sont 1 et lui-même ~~donc~~

et comme $n^2-2n+2 \leqslant n^2+2n-2$, on a

$$\begin{cases} n^2-2n+2=1 \\ n^2+2n+2=n^4+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^4-n^2-2n+2=0 & (L_1) \\ n^2-2n+1=0 & (L_2) \end{cases}$$

pour (L_2) : $0=n^2-2n+1=(n-1)^2$

En fin d'analyse, on a $n=1$ comme solution

Synthèse : $1^4+4=5$ premier

Donc le seul entier naturel tel que n^4+4 ~~soit~~ premier est 1

Raphaël Mouchonnet semaine de colle n° 11

Ex :

Determiner l'ensemble S des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$(P')^2 = 16P$$

Par analyse synthèse supposons $P \in S \setminus \{0\}$

On sait donc que

$$(P')^2 = 16P$$

- si P est de degrés 0. $\deg(P') = -\infty$

$$\Longrightarrow -\infty = \deg(P) \quad ↯$$

- sinon $\deg(P') = \deg(P) - 1$ (car $P \neq 0$)

$$\Longrightarrow 2(\deg P - 1) = \deg(P)$$

$$\Longrightarrow \deg(P) = 2.$$

Donc P est de degrés 2.

$\exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tel que $P = aX^2 + bX + c$

et $P' = 2aX + b$

Donc

$$4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 16(aX^2 + bX + c)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4a^2 = 16a \\ 4ab = 16b \\ b^2 = 16c \end{cases} \underset{a \neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} a = 4 \\ \frac{b^2}{16} = c \end{cases}$$

Donc $P = 4X^2 + bX + \frac{b^2}{16}$

<u>Synthèse</u> : Soit $b \in \mathbb{C}$. Montrons que

$$P = 4X^2 + bX + \frac{b^2}{16} \in S$$

On a $P' = 8X + b$

$$\Rightarrow (P')^2 = 64X^2 + 16bX + b^2$$
$$= 16P$$

De plus on remarque que $0 \in S$.

Donc

$$\boxed{S = \left\{4X^2 + bX + \frac{b^2}{16} : b \in \mathbb{C}\right\} \cup \{0\}}$$

Exercice 1 :
Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Solution :

$$S = \{ P \in \mathbb{C}[X] : \underbrace{(X^2+1)P'' = 6P}_{(E)} \}$$

Ⓐ • $\underline{P = 0_{\mathbb{C}[X]}}$ est solution de (E) donc $0_{\mathbb{C}[X]} \in S$

posons $d^\circ P = n \in \mathbb{N}$

• $\underline{n \leqslant 1}$ alors $P'' = 0_{\mathbb{C}[X]}$

donc $(X^2+1)\,0_{\mathbb{C}[X]} = 6P$

donc $6P = 0_{\mathbb{C}[X]}$

donc $\underbrace{P}_{d^\circ \in \mathbb{N}} = \underbrace{0_{\mathbb{C}[X]}}_{d^\circ -\infty}$ ↯

• $\underline{n \geqslant 2}$ alors $\underbrace{\underbrace{(X^2+1)}_{d^\circ 2}\underbrace{P''}_{d^\circ n-2}}_{d^\circ n} = \underbrace{\underbrace{6}_{d^\circ 0}\underbrace{P}_{d^\circ n}}_{d^\circ n}$

les degrés ne donnant pas de contradiction nous allons maintenant regarder les coefficients dominants

$$\underbrace{(X^2+1)}_{dom = 1}\underbrace{P''}_{dom(P)n(n-1)} = \underbrace{6P}_{6\,dom(P)}$$

on obtient donc $dom(P)\,n(n-1) = 6\,dom(P)$

comme $dom(P) \neq 0$ car $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$:

$n^2 - n - 6 = 0$ le discriminant $\Delta = 25 > 0$

donc les solutions sont :

$n_1 = -2$ et $n_2 = 3$

or n doit être positif car c'est le degré d'un polynôme non nul donc $n = 3$

Si $P \in S$ alors $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ou $d^{o}P = 3$

Ⓢ Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ alors $P'' = 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $(X^2+1)P'' = 6P$ ✓

donc $P \in S$

Si $d^{o}P = 3$ $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$

donc $P'' = 6aX + 2b$

donc $(X^2+1)(6aX+2b) = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b$

et $6P = 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + 6d$

donc pour que $(X^2+1)P'' = 6P$

il faut que $d = b = 0$, $a = c \neq 0$ (car dom(P) = a)

donc

$$\boxed{P \in S \iff P = 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ ou } P = aX^3 + aX \text{ où } a \in \mathbb{C}^*}$$

Robin G.

Colle de la semaine 2

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
Montrer que les racines complexes de P sont simples.

- P est irréductible donc $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(P') \geq 0$.
- On pose $D := P \wedge P' \in \mathbb{Q}[X]$, PGCD dans $\mathbb{Q}[X]$.

Alors $\exists (Q_1, Q_2) \in \mathbb{Q}[X]^2$ $P = DQ_1$ et $P' = DQ_2$

- P irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ donc $\deg(P \wedge P') = 0$ ou $\deg(Q_1) = 0$.

- si $\deg(Q) = 0$, $\deg(P \wedge P') = \deg(P)$ et $P \wedge P' \mid P'$, ce qui contredit $\deg(P') < \deg(P)$.

Donc $P \wedge P' = 1$ (car unitaire).

- Par le théorème de Bézout :

$\exists (U, V) \in \mathbb{Q}[X]^2$ $PU + P'V = 1$ (dans $\mathbb{Q}[X]$)

- Supposons que P possède une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de $\mathrm{mult}(\alpha, P) \geq 2$.

Par la caractérisation de la multiplicité, $\tilde{P}(\alpha) = 0 = \tilde{P}'(\alpha)$.

L'équation précédente livre : $\underbrace{\tilde{P}(\alpha)\tilde{U}(\alpha)}_{=0} + \underbrace{\tilde{P}'(\alpha)\tilde{V}(\alpha)}_{=0} = 1$, ($\mathbb{C}$ intègre)

c'est une contradiction.

Donc toutes les racines complexes de P sont simples.

Piero T. Colle de la semaine 4

Enoncé : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X \mid P \circ P - X$.

Solution :

Si $P = 0$ le résultat est clair. Supposons donc $P \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
P \circ P - X &= P \circ P - P + P - X \\
&= \sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k P^k - \sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k X^k + P - X \\
&= \sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k (P^k - X^k) + P - X \\
&= \sum_{k=1}^{\deg(P)} [P]_k ((P - X) \sum_{\ell=0}^{k-1} P^\ell X^{k-1-\ell} + P - X \\
&= (P - X) \left(\sum_{k=1}^{\deg(P)} [P]_k \sum_{\ell=0}^{k-1} P^\ell X^{k-1-\ell} + 1 \right)
\end{aligned}
$$

donc $P - X \mid P \circ P - X$.

Titouan Rapport de colle semaine 4

D

Exercice 3 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit le polynôme

$$P = aX^{n+1} + bX^n + 1$$

1. Déterminer a et b pour que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P.
2. Dans ce cas vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$.

1) Soit a et b tel P solution de (E) avec 1 racine de P de multiplicité ≥ 2.

donc $\tilde{P}(1) = 0$

$\tilde{P}'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a1^{n+1} + b1^{n} = -1 \\ (n+1)a1^{n} + nb1^{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -b = n+1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - (n+1)L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = n \\ b = -n+1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2' \\ L_2' \leftarrow -L_2 \end{matrix}$$

$\boxed{1 \text{ racine de } P \text{ solution de}(E) \text{ de multiplicité au moins } 2 \Leftrightarrow a = n \quad b = -n-1}$

2) 1 doublement racine (ou plus) de P donc $(X-1)^2 \mid P$

$$(X-1)^2\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k\right) = nX^{n+1} + ((n-1)-2(n))X^n - 2X(0+1) + (1+1)X + 1$$

$$+ \sum_{k=2}^{n-1}((k-1)-2k+(k+1))X^k$$

$$X^2X^{k-2} \quad -2XX^{k-1} \quad +1X^k$$

$$= nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

$$= P$$

$$\left(\sum_{k=2}^{n-1}\underbrace{((k-1)-2k+(k+1))}_{2k-2k=0}X^k = 0\right)$$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k \text{ quotient de } P \text{ par la division euclidienne par } (X-1)^2}$

Exercice 3 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit le polynôme

$$P = aX^{n+1} + bX^n + 1$$

1. Déterminer a et b pour que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P.
2. Dans ce cas vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$.

<u>Question 1</u> : Supposons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de telle sorte que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P.

Par le cours, nous savons alors que $P^{(0)}(1) - P^{(1)}(1) = 0$

Ainsi, nous obtenons le système suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a(n+1) + bn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 0 - b - n - 1 = 0 \end{cases} L_2 \leftarrow L_2 - (n+1)L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = n \\ b = -n-1 \end{cases}$$ Ainsi, nous trouvons $P = nX^{n+1} + (-n-1)X^n + 1$

2. Supposons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ comme en 1. Ainsi, nous savons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq

$P = (X-1)^2 Q$. Montrons que $Q = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$

$\cdot\ P - (X-1)^2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^{k+2} + 2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$

[Changement d'indice $k' = k+1$] $= nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^{k+2} + 2\sum_{k=1}^{n} kX^k - \sum_{k=0}^{n-1} kX^k - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$$= nX^{n+1} + 1 - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^{k+2} + \sum_{k=0}^{n} kX^k + \sum_{k=0}^{n} kX^k - \sum_{k=0}^{n} kX^k - \sum_{k=0}^{n} X^k$$

$$= nX^{n+1} + 1 - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^{k+2} + \sum_{k=0}^{n}(k-1)X^k$$

[Changement d'indice $k' = k-1$] $= nX^{n+1} + 1 - \sum_{k=1}^{n} kX^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} kX^{k+1} - 1$

$$= \sum_{k=0}^{n} kX^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} kX^{k+1}$$

$$= 0$$

D'après l'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ et du calcul précédent, nous pouvons en déduire que le reste dans la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est nul, et donc que

$$\boxed{P = (X-1)^2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k}$$

Sophie G.

Semaine de colle n°5

G_n l'ensemble des generateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$

$k \in \mathbb{N}^*$ $\Phi_k = \prod_{\xi \in G_k} (X - \xi)$

1. degrés de Φ_k ?
2. developpez $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$
3. explicitez $\prod_{d|n} \Phi_d$
4. explicitez Φ_p ; p premier

Solution :

1.

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \\ n \mapsto \mathrm{card}(\{a \in [\![1,n]\!] \; a \wedge n = 1\}) \end{array}\right.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ les elements de G_n sont generateurs de $\mathbb{U}_n$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$

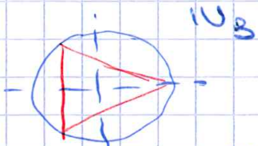
$e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ genère $\mathbb{U}_n$ si $k \wedge n = 1$

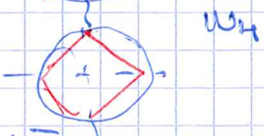
(car sinon $n | k$ et $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ n'est pas generateur de $\mathbb{U}_n$ pourtant ($n \in \mathbb{N}^*$))

donc $|G_n| = \underbrace{|\{k \in [\![0, n-1]\!] \; k \wedge n = 1\}|}_{\varphi(n)}$

d'où

$$\boxed{\deg(\Phi_k) = \varphi(k)}$$





2. $\Phi_1 = (X-1)$ $(G_1 = \{1\})$

$\Phi_2 = (X+1)$ $(\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\})$

$\Phi_3 = (X-j)(X-\bar{j}) = X^2+X+1$ (j et $\bar{j}$ generateurs de $\mathbb{U}_3$)

$\Phi_4 = (X-i)(X+i) = X^2+1$

3) Montrons $\mathbb{G}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{G}_d$

$\boxed{\subset}$ Soit $g \in \mathbb{G}_n$

alors $k := \text{ord}(g) \mid \varphi(n)$

$\Rightarrow g^k = 1$

$\Rightarrow g \in \mathbb{G}_k$ et $k|n$.

$\boxed{\supset}$ clair

Caractère disjoint de l'"$\cup$"

Soit $d_1 \neq d_2$ tel que $\begin{cases} d_1 | n \\ d_2 | n \end{cases}$

Supposons qu'il existe $x \in G_{d_1} \cap G_{d_2}$;

$$x^{d_1} = 1 = x^{d_2} \Rightarrow d_1 = d_2 \; (↯)$$

Donc $\boxed{\mathbb{G}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{G}_d}$ ⊛

(card) $\downarrow$

$$\Rightarrow \underline{\varphi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)}$$

Soit $X \in G_n$ i.e $X^n = 1$ i.e $X^n - 1 = 0$

$$X^n - 1 = \prod_{\xi \in \mathbb{G}_n} (X - \xi) \overset{⊛}{=} \prod_{d|n} \prod_{\xi \in \mathbb{G}_d} (X - \xi)$$

$$= \prod_{d|n} \Phi_d$$

$$\rightarrow \boxed{X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d}$$

Antoine B. — colle de la semaine 4

Determiner tous les polynômes non nuls
P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(X-1) . P(X)$$

Une solution :

Analyse : Supposons $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ tel que $\underset{\circledast}{P(X^2) = P(X-1)P(X)}$.
comme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \in \mathbb{C}[X]$.

- Soit $\alpha \in Spec_{\mathbb{C}}(P)$ que l'on suppose $\neq 0$.
alors $\alpha \in Spec_{\mathbb{C}}(P(X^2))$ par $\circledast$

Par récurrence, on montre que $\alpha^{2^n} \in Spec_{\mathbb{C}}(P)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation à $n = 1$.

comme α racine de $P(X^2)$
alors α^2 racine de $P(X)$. donc $\alpha^2 \in Spec_{\mathbb{C}}(P)$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, tq $\alpha^{2^n} \in Spec_{\mathbb{C}}(P(X))$.
par $\circledast$: $\alpha^{2^n} \in Spec_{\mathbb{C}}(P(X^2))$ donc $(\alpha^{2^n})^2 = \alpha^{2^{n+1}} \in Spec_{\mathbb{C}}(P(X))$ ✓

Comme $P \neq 0$, il n'a pas une infinité de racines.
donc $\exists (i,j) \in \mathbb{N}^2$ telsque $i > j$ et $\alpha^{2^i} = \alpha^{2^j}$

$\Rightarrow \alpha^{2^i - 2^j} = 1$.

$\Rightarrow \alpha$ est racine de l'unité. $\circledast\circledast$

· Soit $\alpha \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P(X-1))$, alors $\underline{(\alpha+1) \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P(X))}$

$\hookrightarrow \alpha \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(P(X^2))$ ⊛: $\hookrightarrow (\alpha+1) \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P(X^2))$

$\Rightarrow$ α est racine de l'unité et $\alpha+1$ aussi
(✱✱)

donc on peut écrire $\alpha = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \alpha + 1 \overset{\text{angle moitié}}{=} 2\cos(\theta/2)\, e^{i\theta/2} \in \mathbb{U}$

$\Rightarrow 2\cos(\theta/2) = 1.$

$\underset{\text{égalité des cos}}{\Rightarrow} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ ou $\frac{\theta}{2} = -\pi/3\,[2\pi]$

$\Rightarrow \quad \alpha = e^{i\theta} = j$ ou $\alpha = j^2 = \bar{j}$

$\underset{\substack{\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\ \text{et } P \in \mathbb{R}[X]}}{\Rightarrow} \quad \mathrm{mult}(\alpha, P) = \mathrm{mult}(\bar{\alpha}, P).$

ainsi $P \in \left\{ P\,(X-j)^i (X-\bar{j})^l : \underset{\text{et } q\ i = l}{(i,l)} \in \mathbb{N}^2 \right\}$

$P \in \{(X-j)^i (X-\bar{j})^i : i \in \mathbb{N}\}$

Synthèse : soit $P \in \{ (X-j)^i (X-\bar{j})^i : i \in \mathbb{N} \}$.

$\exists i \in \mathbb{N}$ tq $P = (X-j)^i (X-\bar{j})^i$.

1 est solution aussi

• $P \in \mathbb{R}[X]$: $P = (X^2 - 2\mathrm{Re}(j)X + |j|^2)^i \in \mathbb{R}[X]$ ✓

• $P(X^2) = (X^4 + X^2 + 1)^i$ car $\mathrm{Re}(j) = -1/2$

$P(X-1)P(X) = ((X^2-1)^2 X^2 - 2\mathrm{Re}(j)(X-1)^2 X + (X-1)^2 - 2\mathrm{Re}(j)(X-1)X^2$

$- 2\mathrm{Re}(j)(X^3 - X^2) + 4\mathrm{Re}(j)^2(X^2 - X) - 2\mathrm{Re}(j)(X-1) + X^2 + 1$

$- 2\mathrm{Re}(j)X \;)^i$

$= \ldots$

$= (X^4 + X^2 + 1)^i$

Nicolas H Colle de la semaine 4

Enoncé

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, $\text{dom}(P) = 1$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est une racine de P, montrer que $\alpha \in \mathbb{Z}$

2) Trouver un lien entre $\cos((n+1)x)$, $\cos((n-1)x)$ $\cos(nx)$ et $\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
L'utiliser pour trouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $\forall x \in \mathbb{R}$
$$P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$$

3) Montrer que $\forall q \in \mathbb{Q}$ $\cos(q\pi) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(q\pi) \in \{-1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}, 1\}$

Solution

1) Comme $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = \frac{a}{b}$, $a \wedge b = 1$

Soit $d = \deg(P) \geqslant 1$

$$\tilde{P}(\alpha) = 0 = \sum_{k=0}^{d} [P]_k \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$\Rightarrow [P]_0 b^d + [P]_1 a b^{d-1} + \dots + 1 \times a^d = 0$$

$$\Rightarrow -a^d = b\left([P]_0 b^{d-1} + \dots + [P]_{d-1} a^{d-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-a^d}{b} = \underbrace{[P]_0 b^{d-1} + \dots + [P]_{d-1} a^{d-1}}_{\in \mathbb{Z}}$$

donc a^d est divisible par b. $(-a/b \in \mathbb{Z})$

$a^d = a a^{d-1}$ Comme $a \wedge b = 1$, par le lemme de gauß, b divise a^{d-1}.

On en déduit que b divise a.

Comme $a \wedge b = 1$ et $b \in \mathbb{N}^*$ $b = 1$, donc $\alpha \in \mathbb{Z}$

2) Par formule d'addition : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos((n-1)x) = \cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x) & (L_1) \\ \cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) & (L_2) \end{cases}$$

$(L_1) + (L_2)$: $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos(x)$

2.2) Montrons l'existence d'un tel polynome par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$

Posons le prédicat $V(n)$: " $\exists P_n \in \mathbb{Z}[x]$ dom$(P_n) = 1$ et

$P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$"

Initialisation: $n = 1$

On cherche $P \in \mathbb{Z}[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\tilde{P}(2\cos(x)) = 2\cos(x)$

$P = X$ convient

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $V(1), \dots, V(n)$ soient vraies. Montrons que $V(n+1)$ est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\exists (P_{n-1}, P_n) \in \mathbb{Z}[x]^2$ tels que dom(

$P_{n-1}(2\cos(x)) = 2\cos((n-1)x)$

$\tilde{P}_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$

Par 2.1), $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V(n)$ est vrai.

3) Soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(q\pi) \in \mathbb{Q}$

$\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ $q = \dfrac{a}{b}$

Par 2), $\exists P_{2b} \in \mathbb{Z}[x]$ $P_{2b}\left(2\cos\left(\frac{a\pi}{b}\right)\right) = 2\cos(2a\pi)$
$= 2$

Ainsi, $2\cos\left(\frac{a\pi}{b}\right)$ est racine de $P = P_{2b} - 2$,

unitaire à coefficient entier.

D'après 1), $2\cos\left(\frac{a\pi}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos(x) \in [-1; 1]$, $2\cos\left(\frac{a\pi}{b}\right) \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

$\Rightarrow \cos(q\pi) \in \left\{-1; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\right\}$

Anaé D.

Rapport de colle S4

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

On pourra utiliser le polynôme $(1 + X + X)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0 ; n]\!]$

Montrons que $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$

$$[(1+X+X)^n]_p = [\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k X^k]_p \quad \text{(formule du binôme de Newton)}$$
$$= 2^p \binom{n}{p}$$

On $$[(1+X+X)^n]_p = [\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+X)^k X^{n-k}]_p \quad \text{(formule du binôme de Newton)}$$
$$= [\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i\right) X^{n-k}]_p \quad \text{(formule du binôme de Newton)}$$
$$= [\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} X^{i+n-k}]_p$$

On veut $i + n - k = p$ soit $i = k + \underbrace{p - n}_{\leq 0} \leq k$

on a $i \geq 0$ ie $k + p - n \geq 0$ si $k \geq \underbrace{n-p}_{\geq 0}$

Ainsi on a que

$$[(1+X+X)^n]_p = [\sum_{k=n-p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{k+p-n} X^p]_p$$

$$= [\sum_{\ell=0}^{p} \underbrace{\binom{n}{n-\ell}}_{=\binom{n}{\ell}} \binom{n-\ell}{p-\ell} X^p]_p \quad \left(\text{changement d'indice } \underset{\ell = n-k}{k = n-\ell}\right)$$

$= \binom{n}{\ell}$ par la relation de Pascal

$$= \sum_{\ell=0}^{p} \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{p-\ell}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}}$$

Maximilien. T. Colle de la Semaine 4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

1) Si $P(Q) \subset Q$ alors $P \in Q[X]$

2) Posons $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n := \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n(Z) \subset Z$ et que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$

3) On suppose que $P(Z) \subset Z$, Que dire de P ?

Solution :

1) Supposons $P(Q) \subset Q$ supposons $P \neq 0$ on pose $d = \deg(P)$

Soit $(q_0, \dots, q_d) \in Q^{d+1}$ 2 à 2 distincts. On pose $\forall i \in [\![0,d]\!]$

$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{X-q_j}{q_i-q_j}$ nous savons $(L_0, \dots, L_d)$ base de $\mathbb{C}_d[X]$ par le cours

Ainsi $P = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(q_i)}_{\in Q} \underbrace{L_i}_{\in Q[X]}$ comme $(Q[X], +, \times)$ est ~~me~~ un anneau $P \in Q[X]$

2) Soit $\ell \in Z$ Soit $n \in \mathbb{N}$

Si $n = 0$ ✓ Si $\ell \in \mathbb{N}^*$:

Sinon $H_n(\ell) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\ell-k) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell \leq n-1 \\ \frac{\ell!}{(n-k)!\,n!} = \binom{\ell}{n} \text{ sinon} \end{cases}$ ✓

$\in Z$

Si $\ell \in Z_{<0}$ alors $H_n(\ell) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\ell-k) = (-1)^n \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1} k-\ell = (-1)^n \binom{n-1-\ell}{-\ell-1} \in Z$

Donc $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $H_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \underbrace{(X-k)}_{d^\circ 1}$ donc $\deg(H_n) = n$

Ainsi par le théorème des degrés échelonnés $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$

3) On suppose $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ Conjecture : Les coefficients dans la base $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont entiers.

Comme $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base $\exists (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ tel que

$$P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k H_k$$

Par l'absurde supposons $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_i \notin \mathbb{Z}$

Posons $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \notin \mathbb{Z}\}$ bien défini

alors $\underbrace{P(i_0)}_{\in\mathbb{Z}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{i_0-1} \lambda_k H_k(i_0)}_{\in\mathbb{Z}} + \lambda_{i_0} \underbrace{H_{i_0}(i_0)}_{1}$ $(\forall k \geqslant i_0+1 \; H_k(i_0) = 0)$

$\Rightarrow \lambda_{i_0} \in \mathbb{Z}$ ↯ $\{$ $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau$)$

Uta Bayen de Neyer

Rapport de colle - semaine n° 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Phi_n := \prod_{z} (X - z)$ où z parcourent les générateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$

Calculer Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4

Que dire de $\prod_{d \in \mathrm{Div}(n)} \Phi_d$. Écrire Φ_p où p est premier

Mq $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, Φ_n est unitaire à coefficients entiers

---

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Comme $\varphi \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}_n, \times) \\ \bar{k} & \longmapsto & e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array} \right.$

est bien définie et est un isomorphisme de groupes, $\forall \bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, $\varphi(\bar{k})$ est générateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\langle e^{i\frac{2k\pi}{n}} \rangle = \mathbb{U}_n \iff \langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\iff k \wedge n = 1$

si $n = 1$, 0 est le seul générateur de $(\mathbb{U}_1, \times)$ $(1 \wedge 0 = 1)$

donc $\Phi_1 = (X - 1)$

si $n = 2$, 1 est le seul générateur de $(\mathbb{U}_2, \times)$ $(2 \wedge 1 = 1)$

donc $\Phi_2 = (X + 1)$

si $n = 3$, 1 et 2 sont les générateurs de $(\mathbb{U}_3, \times)$ $(3 \wedge 2 = 1$ et $3 \wedge 1 = 1$

donc $\Phi_3 = (X - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X - e^{i\frac{4\pi}{3}})$

$= X^2 + X + 1$

si $n = 4$, 1 et 3 sont générateurs de $(\mathbb{U}_4, \times)$ $(4 \wedge 3 = 1$ et $4 \wedge 1 = 1)$

donc $\Phi_4 = (X - i)(X + i)$

$= X^2 + 1$

- On pose $A_n := \{$ générateurs de $\mathbb{U}_n \}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

On montre que $\mathbb{U}_n = \bigcup_{d \in Div(n)} A_d$

$(\supset)$ Soit $d \in Div(n)$

$z \in A_d$, alors $\exists k \in [\![0, d-1]\!]$ tq $k \wedge n = 1$ et $z = e^{i\frac{2k\pi}{d}}$

Comme $d \in Div(n)$, $\exists q \in \mathbb{N}$ tq $dq = n$

donc $z = e^{i\frac{2\overset{\in \mathbb{Z}}{kq}\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$

$(\subset)$ Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$

- si $k \wedge n = 1$, $k \in A_n$

sinon $k \wedge n = d_1$ où $d_1 \in Div(n)$

- si $k \wedge d_1 = 1$, $k \in A_{d_1}$

sinon $k \wedge d_1 = d_2$ où $d_2 \in Div(n)$

En itérant ce processus, on trouve $d \in Div(n)$ tq $k \wedge d = 1$, alors $k \in A_d$.

- Soit $d_1, d_2 \in Div(n)$ tq $d_1 \neq d_2$

Par l'absurde, on suppose que $A_{d_1} \cap A_{d_2} \neq \emptyset$.

$\exists z \in A_{d_1} \cap A_{d_2}$, alors $\mathbb{U}_{d_1} = \langle z \rangle = \mathbb{U}_{d_2}$ ↯

Donc $\forall d_1, d_2 \in Div(n)$, $d_1 \neq d_2 \iff A_{d_1} \cap A_{d_2} = \emptyset$

Ainsi $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d \in Div(n)} A_d$

Et $\prod_{d \in Div(n)} \Phi_d = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z) = X^n - 1$

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier, alors

$$\prod_{d \in Div(p)} \Phi_d = \Phi_p \times \Phi_1 = X^p - 1$$

$$\Rightarrow \Phi_p = \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$$

- On raisonne par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$: " Φ_n est unitaire à coefficients entiers. "

(I) $n = 1$, $\Phi_1 = X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ et unitaire.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tq $\mathcal{P}(1), \dots \mathcal{P}(n)$ vraie.

- Φ_n est unitaire par construction.
- $$\Phi_n \prod_{\substack{d \in Div(n) \\ d \neq n}} \Phi_d = X^n - 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

Par (H.R), $\prod_{\substack{d \in Div(n) \\ d \neq n}} \Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$

$\exists (Q, R) \in \mathbb{Z}[X]^2$ tq $d^\circ R < d^\circ \prod_{\substack{d \in Div(n) \\ d \neq n}} \Phi_d$ et

$$X^n - 1 = \prod_{\substack{d \in Div(n) \\ d \neq n}} \Phi_d \, Q + R$$

- $R = 0$ car $\prod_{\substack{d \in Div(n) \\ d \neq n}} \Phi_d \mid X^n - 1$

Ainsi par unicité de la division euclidienne,

$Q = \Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Jules R. Colle de la semaine 4

Énoncé :

Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$ des éléments deux à deux distincts

Posons :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad A_i(X) = \frac{X\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X-a_j)\right)}{a_i\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i-a_j)\right)}$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \qquad P(X) = 1 + \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-a_k)$$

Solution :

Dans la définition de A_i où $i \in [\![1,n]\!]$, on reconnait une forme proche du polynôme interpolateur de Lagrange. Ainsi, il nous vient l'idée d'évaluer A_i en a_r où $r \in [\![1,n]\!]$: Soit $(i,r) \in [\![1,n]\!]^2$

$$A_i(a_r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r=i \\ 0 & \text{si } r\neq i \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad P(a_k) = 1$$

Donc a_k, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, est racine du polynôme $P-1$. Cela implique que :

$\exists Q \in \mathbb{C}[X] \quad P-1 = Q\left(\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)\right)$

$\Rightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X] \quad P = 1 + Q\left(\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)\right)$

or on sait que :

$\deg(P) = n$

et

$\deg\left(1 + Q\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)\right) = \deg(Q) + \deg\left(\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)\right)$

$= \deg(Q) + n$

Donc $\deg(Q) = 0$

Ainsi, Q est de la forme :

$Q = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$

Pierre V.   Colle de la semaine 4

Exercice 105. Soit $n \geqslant 2$. Quel est le reste de la division euclidienne de $X^n + 3X^{n-1} + 2$ par $(X-1)^2$?

Solution

- $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\left| \begin{array}{l} \circledast\ X^n + 3X^{n-1} + 2 = (X-1)^2 Q + R \\ \deg(R) < 2 \end{array} \right.$

donc $\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad R = aX + b$ donc $R' = a$

- En évaluant en 1 dans $\circledast$, on a

$$1^n + 3 \times 1^{n-1} + 2 = 0 + a + b \quad \text{donc} \quad a + b = 6$$

- En dérivant $\circledast$, on a

$$nX^{n-1} + 3(n-1)X^{n-2} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + R'.$$

Et en évaluant en 1 dans $*$, on a

$$n \times 1^{n-1} + 3(n-1) \times 1^{n-2} = a \quad \text{donc} \quad a = 4n-3,\ b = -4n+9$$

donc le reste de la division euclidienne de $X^n + 3X^{n-1} + 2$ par $(X-1)^2$ est $R = (4n-3)X - 4n + 9$

Alexandre M.

Colle semaine 4

Enoncé

Exercice 1 : On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0 = 2, P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Calculer P_2 et P_3
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

4. En déduire une expression simple de $P_n(2\cos\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les racines de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Résolution :

1)
$$\boxed{\begin{aligned} P_2 &= XP_1 - P_0 = X^2 - 2 \\ P_3 &= XP_2 - P_1 = X^3 - 3X \end{aligned}}$$

2) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le prédicat

$H(n)$: " $\deg(P_n) = n$ et $\mathrm{dom}(P_n) = 1$ "

Raisonnons par récurrence double :

Ⓘ au rang $n=1$ et $n=2$

Q1) livre le résultat.

Ⓗ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ vrais.

Montrons $H(n+2)$.

D'après l'énoncé, on a $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$

Or par (HR) on a $\deg(XP_{n+1}) = \deg(X) + \deg(P_{n+1})$

$$= n+2$$

et $\deg(P_n) = n$

Comme $n+2 > n$ on obtient $\boxed{\deg(P_{n+2}) = n+2.}$

On a également $\boxed{\text{dom}(P_{n+2}) = \text{dom}(X)\underbrace{\text{dom}(P_{n+1})}_{1 \text{ par HR}} = 1}$

(Ccl) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{\deg(P_n) = n \text{ et } \text{dom}(P_n) = 1}$

3) Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $H(n)$: " $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$ "

On raisonne par récurrence double.

(I) $P_0(z + \frac{1}{z}) = 2 = z^0 + \frac{1}{z^0}$

$P_1(z + \frac{1}{z}) = z^1 + \frac{1}{z^1}$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ vrais

Montrons $H(n+2)$

On a $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$

Alexandre M.

donc $P_{n+2}\left(y+\frac{1}{y}\right) = \left(y+\frac{1}{y}\right) P_{n+1}\left(y+\frac{1}{y}\right) - P_n\left(y+\frac{1}{y}\right)$

(HR) $= \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^{n+1}+\frac{1}{y^{n+1}}\right) - \left(y^n+\frac{1}{y^n}\right)$

$= y^{n+2} + \cancel{\frac{1}{y^n}} + \cancel{y^n} + \frac{1}{y^{n+2}} - \cancel{y^n} - \cancel{\frac{1}{y^n}}$

donc $\boxed{P_{n+2}\left(y+\frac{1}{y}\right) = y^{n+2} + \frac{1}{y^{n+2}}}$

et la propriété à démontrer est vérifié

4) Soit $(\theta, n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$

On a $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ [Euler]

$= e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}$ [propriété sur les puissances]

donc $P_n(2\cos\theta) = P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right)$

$= \left(e^{i\theta}\right)^n + \left(e^{-i\theta}\right)^n$

$= e^{in\theta} + e^{-in\theta}$ [Moivre]

$\boxed{P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)}$ [Euler]

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

si $n = 0$, $P_n = 2$ et donc P_n n'a pas de racine

sinon supposons qu'il existe $\theta \in [0; \pi]$ tel que

$P_n(2\cos\theta) = 0$

On a donc d'après q4 $2\cos(n\theta) = \underbrace{0}_{\cos(\frac{\pi}{2})}$

d'après le cas d'égalité de deux cosinus on a :

$$\begin{cases} n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \\ \text{ou } n\theta \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi] \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \quad n\theta - \frac{\pi}{2} = q\pi$$

$$\underset{n \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \theta = \frac{\pi}{2n}(1 + 2q)$$

or $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2n}(1+2q) \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + 2q \leq 2n$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq q \leq n - \frac{1}{2}$$

or $\boxed{q \in \mathbb{Z} \text{ donc } q \in [\![0; n-1]\!]}$

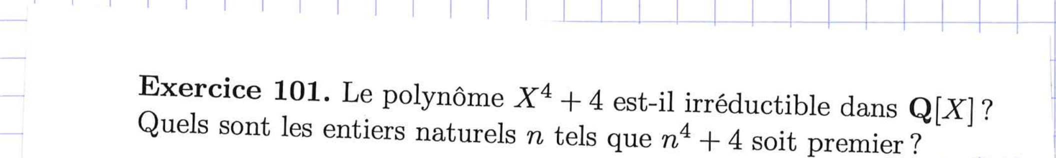
Les n racines de P_n sont donc $\frac{\pi}{2n}(1+2q)$, $q \in [\![0; n-1]\!]$

Il n'y en a pas d'autre car P_n est de deg n.

Léa N.

Colle de la semaine n°. 4

Énoncé :



Exercice 101. Le polynôme $X^4 + 4$ est-il irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$? Quels sont les entiers naturels n tels que $n^4 + 4$ soit premier ?

Solution :

1) $$X^4 + 4 = (X^2 - 2i)(X^2 + 2i)$$

. On résout : $X^2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

alors s'il y a deux racines :

$$X = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad X = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

De même pour $X^2 = -2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

les racines sont $X = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $X = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Alors $$X^4 + 4 = (X - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})$$

$$= \underbrace{(X^2 + 2X + 2)}_{\substack{\in \mathbb{Q}[X] \\ \text{et de degré } 2}} \underbrace{(X^2 - 2X + 2)}_{\substack{\in \mathbb{Q}[X] \\ \text{et de degré } 2}}$$

On en déduit que $\boxed{X^4 + 4 \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{Q}[X]}$

2) $$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

est premier si et seulement si

$$\text{ou} \begin{cases} n^2 + 2n + 2 = 1 & \text{et} \quad n^2 - 2n + 2 = n^4 + 4 \\ n^2 + 2n + 2 = n^4 + 4 & \text{et} \quad n^2 - 2n + 2 = 1 \end{cases}$$

Si $\underbrace{n^2 + 2n + 2}_{\geq 2} = 1$ on trouve une contradiction pour $n \in \mathbb{N}$

alors (1) $n^2 - 2n + 2 = 1$ et (2) $n^2 + 2n + 2 = n^4 + 4$

(1) $n^2 - 2n + 2 = 1$

$\Rightarrow (n-1)^2 = 1$

$\Rightarrow n = 1$

On vérifie dans (2) :

$n = 1$ livre $1 + 2 + 2 = 1 + 4$ ce qui est vrai

Donc $\boxed{n^4 + 4 \text{ est premier si et seulement si } n = 1}$

MATHEO_N

Rapport de colle semaine 4.

1) Soit $P \in \ [X]$ unitaire ayant $\alpha \in \mathbb{Q}$ pour racine, montrer que $\alpha \in \mathbb{Z}$

2) Trouver un lien entre $\cos((n+1)x)$, $\cos((n-1)x)$, $\cos(nx)$ et $\cos(x)$

Utilisez-le pour trouver un polynôme unitaire $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$P_n(2\cos(\ x)) = 2\cos(nx)$$

3) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{Q}$

$$\cos(q\pi) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(q\pi) \in \{-1; -\tfrac{1}{2}; 0; \tfrac{1}{2}; 1\}$$

1) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, on pose $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\deg(P) = n$ tel que : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ [

Supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$ racine de P, il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge b = 1$

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{a^k}{b^k} = 0 \underset{\times b^n > 0}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} a_k a^k b^{n-k} = 0$

on a donc : $\underbrace{a_n}_{1} a^n + a_{n-1} a^{n-1} \times b + \dots + a_0 b^n = 0$

$$\Rightarrow a^n = b \times \left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_k a^k b^{n-k-1}\right)$$

Donc b divise $a^n = a\,a^{n-1}$

comme a et b sont premiers entre eux par le lemme de Gauss b divise a^{n-1}, par itération successive on obtient que b divise a ainsi : $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.

2) D'après les formule sur les sommes de cosinus nous avons :

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos\left(\frac{(n+1)x + (n-1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x - (n-1)x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tentons de déterminer un polynôme unitaire $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Ⓐ Nous étudions le cas où $n=0$ pour tacher de trouver une formule de récurrence : Supposons $P_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : pour $x \in \mathbb{R}$) $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{Z}[X]$

$$P_0(2\cos(x)) = 2\cos(0 \times x) = 2$$

$P_0 = 2$ convient

Nous avons aussi : $P_1(2\cos(x)) = 2\cos(x)$

$P_1 = X$ convient.

et enfin $P_2(2\cos(x)) = 2\cos(2x) \underset{\text{[formules trigonométriques]}}{=} 4\cos^2(x) - 2 = 2\cos(x)\,P_1(2\cos(x)) - P_0(2\cos(x))$

$P_2 = XP_1 - P_0$ convient.

pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ on pose $\mathcal{P}(n)$: " $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$ ", montrons $\mathcal{P}(n)$ par récurrence

Ⓘ $\underline{n=2}$: vérifié déjà.

Ⓗ Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie.

Nous avons :
$$\begin{aligned} P_{n+1}(2\cos(x)) &= 2\cos((n+1)x) \\ &= 4\cos(nx)\cos(x) - 2\cos((n-1)x) \\ &= P_n(2\cos(x)) \times 2\cos(x) - P_{n-1}(2\cos(x)) \end{aligned}$$

Ainsi : $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$ convient et par H.R $P_{n-1} \in \mathbb{Z}[X]$.

Ⓒ Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$ convient.

Ⓢ Par construction notre candidat satisfait nos attentes

Ainsi : avec : ($P_0 = 2$, $P_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$) nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$

3) Soit $q \in \mathbb{Q}$, il existe, $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \frac{a}{b}$

Supposons $\cos(q\pi) \in \mathbb{Q}$, montrons que $\cos(q\pi) \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

on a : $P_{2b}(2\cos(q\pi)) = 2\cos(2b\frac{a\pi}{b}) = 2\cos(2a\pi) = 2$.

Ainsi : $2\cos(q\pi)$ est racine de $P_{2b} - 2 \in \mathbb{Z}\overset{\in\mathbb{Z}}{[X]}$

par 1) on a alors que $2\cos(q\pi) \in \mathbb{Z}$, les valeurs de cos satisfaisant cela sont : $\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\}$ comme $\cos \in [-1; 1]$

Ainsi, on a : $\cos(q\pi) \in \underline{\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\}}$

Louis D.

1/2

Semaine de colle n°4

Enoncé :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad P_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$ et $P_0 = 1$

1) Mq $\forall k \in \mathbb{N} \quad P_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

2) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de deg k prenant des valeurs entières en $(k+1)$ entiers consécutifs.
Mq $Q \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(P_0, \dots, P_k)$

3) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ tq $R(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
Mq $R \in \mathbb{Q}[X]$ (non traitée)

Solution :

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad (P_0 = 1 \in \mathbb{Z})$
Soit $a \in \mathbb{Z}$. Mq $P_k(a) \in \mathbb{Z}$

Si $a \geq k$, $\prod_{i=0}^{k-1} (a-i) = \frac{a!}{(a-k)!}$

et $P_k(a) = \binom{a}{k} \in \mathbb{Z}$

Si $0 \leq a < k$: $\prod_{i=0}^{k-1} (a-i) = 0$

et $P_k(a) = 0 \in \mathbb{Z}$

Si $a < 0$:

$$P_k(a) = \frac{(-1)^k}{k!} \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} (i-a)}_{(-a)(-a+1)\dots(-a+k-1) = \frac{(-a+k-1)!}{(-a-1)!}}$$

et $P_k(a) = (-1)^k \begin{pmatrix} -a-1+k \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$

~~2) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall b \in [\![0, k]\!]$~~
~~$Q(a+b) =: q_b \in \mathbb{Z}$~~

~~Ⓐ On suppose que $Q \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(P_0, \dots, P_k)$~~
~~Alors, $\exists (t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$~~

~~$$Q = \sum_{i=0}^{k} t_i P_i$$~~

Soit $a \in \mathbb{Z}$

$$P_k(a+1) - P_k(a) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (a+1-i) - \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (a-i)$$

$$= \frac{1}{k!} (a+1)(a)(a-1) \dots (a+1-k+1)$$

$$- \frac{1}{k!} (a)(a-1) \dots (a-k+2)(a-k+1)$$

$$= \frac{1}{k!} (a)(a-1) \dots (a-k+2) \underbrace{\left[a+1-a+k-1\right]}_{k}$$

$$= P_{k-1}(a)$$

$\circledast$

On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(k) =$ " $Q \in \mathbb{R}[X]$ de deg k prenant des valeurs dans $\mathbb{Z}$ pour $k+1$ entiers consécutifs $\Rightarrow Q \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(P_0, \dots, P_k)$ "

Louis
D.
2/2

Si $k = 0$, Q est de degré 0, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $Q = \lambda$

Or, $\exists a \in \mathbb{Z}$ tel que $Q(a) \in \mathbb{Z}$ (par hypothèse)

et $\overset{\parallel}{\lambda} \in \mathbb{Z}$

Si $k > 0$, on suppose $\mathcal{P}(k)$ vrai

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $k+1$ prenant des valeurs entières pour $k+2$ entiers consécutifs.

$\forall i \in [\![0, k+1]\!]$ $\deg(P_i) = i$ donc

$(P_0, \dots, P_{k+1})$ base de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$ par le théorème des degrés échelonnés.

Ainsi, $\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2}$ $Q = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i P_i$

$$Q(X+1) - Q(X) = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i \left(P_i(X+1) - P_i(X)\right)$$

$$\underset{\circledast}{=} \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \underbrace{P_{i-1}(X)}_{i-1 = \deg < k+1}$$

On applique HR à $Q(X-1) - Q(X)$ et il vient $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \in \mathbb{Z}^{k+1}$

Montrons que $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$:

$$Q - \sum_{i=1}^{k+1} \underbrace{\alpha_i}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{par } \textcircled{H}}} \underbrace{P_i}_{\in \mathbb{Z} \text{ par } \textcircled{Q1}} = \alpha_0 \underbrace{P_0}_{1} \in \mathbb{Z}$$

On évalue $Q - \sum \alpha_i P_i$ en $a \in \mathbb{Z}$ tq $Q(a) \in \mathbb{Z}$

$\square$

Tigüin, David

Colle de le semaine 4

Exercice 2. (CC INP n° 87) Soient $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts.

1. Pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme P réel tel que

$$\deg(\mathrm{P}) \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{P}(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On choisit $(b_0, \dots, b_n) = (\delta_{i,k})_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Déterminer alors la solution du problème précédent. On la note L_k.
3. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, prouver l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p \, \mathrm{L}_k = \mathrm{X}^p$.

1. On pose l'application linéaire $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1} \\ P \to (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array} \right.$

Montrons qu'elle est injective : soit $P \in \ker(f)$ alors $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $P(a_i) = 0$ et P de degré $\leq n$ possède $n+1$ racines ainsi $P = 0$ et l'application est injective et bijective par egalité de dimensions

2. D'après 1 on sait que L_k possède n racines et donc $L_k = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ de plus $L_k(a_k) = 1$ d'où $\lambda = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}} (a_k - a_i)}$ d'où $L_k = \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{(X - a_i)}{a_k - a}$

3. Soit $p \in [\![0, n]\!]$, alors $Q_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et $Q_2(X^p)$ vérifient

- degré $\leqslant n$
- $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $Q_1(a_i) = a_i^p$ et $Q_2(a_i) = a_i^p$ donc comme f est bijective $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$

Mehdi B. Colle de la semaine 4

Soit $a_1 \dots a_n$ complexes non nuls 2 à 2 distincts,

$$A_i = \frac{X \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} X-a_j}{a_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_i-a_j} \quad , \quad P = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P = 1 + \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-a_i)$$

Solution : Soit $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$. On évalue A_i en a_k :

$$A_i(a_k) = \frac{1}{a_i} a_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_k-a_j}{a_i-a_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k\neq i \end{cases}$$

Puis on évalue P en a_i :

$$P(a_i) = \sum_{k=1}^{n} A_i(a_k) = 1$$

Donc $P-1$ a n racines 2 à 2 distinctes.

Or $\deg P \leq \max\{\underbrace{\deg A_1}_{=n} \dots \underbrace{\deg A_n}_{=n}\} = n$

Nous pouvons conclure en distinguant deux cas.

- Si $\underline{\deg P < n}$

alors $P - 1$ est le polynôme nul et $P = 1$.
(ie $\lambda = 0$)

- Si $\underline{\deg P = n}$

alors comme les $a_1 \dots a_n$ sont racines distinctes de $P - 1$, on a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \qquad P = 1 + \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$$

On remarque que le cas $\deg P < n$ mène à une contradiction. En effet, si $\deg P < n$, alors $P = 1$, en particulier $P(0) = 1$. Or $P(0) = \sum_{k=1}^{n} A_i(0) = 0$ ↯.

Donc :

$$\boxed{\deg(P) = n \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \quad P = 1 + \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)}$$

REUTER
Robin

MPI

Rapport Colle

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

On pourra utiliser le polynôme $(1 + X + X)^n$.

On a d'une part :

$[(1 + 2X)^n]_p$

$= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2X)^k\right]_p = 2^p \binom{n}{p}$ par la formule du Binome de Newton.

et d'autre part :

$[(1 + X + X)^n]_p$

$= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+X)^{n-k} X^k\right]_p$ par la formule du Binome de Newton

$= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^{k+i}\right]_p$

$= \left[\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{i} X^{k+i}\right]_p$

$= \sum_{\substack{(k,i) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,n-k]\!] \\ k+i=p}} \binom{n}{k}\binom{n-k}{i}$

$i = p - k \geqslant 0$

Donc $0 \leqslant p - k \leqslant n - k$

Ainsi $0 \leqslant k \leqslant p$.

et $[(1 + X + X)^n]_p$

$= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}}$$

Exercice 5 :
Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il admet deux racines rationnelles.

Analyse :

$\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

$\exists (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = \frac{n}{m}$ et $n \wedge m = 1$.

Donc $3\frac{n^4}{m^4} + 11\frac{n^3}{m^3} + 20\frac{n^2}{m^2} + 7\frac{n}{m} - 5 = 0$

donc $3n^4 + 11m^3n + 20n^2m^2 + 7nm^3 - 5m^4 = 0$

On déduit

$n \mid 5m^4$ et $m \mid 3n^4$

Par une utilisation succesive du lemme de Gauss, on trouve

$n \mid 5$ et $m \mid 3$.

Donc l'ensemble des racines est inclus dans $\{1, -1, 5, -5, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\}$

Synthèse :

$P(1) = 36 \neq 0$. 1 n'est pas racine.

-1 est racine et

$P = (X+1)(3X^3 + 8X^2 + 12X - 5)$

5 n'est pas racine. -5 non plus.

$\frac{1}{3}$ est racine donc

$$\boxed{P = (X+1)\left(X - \frac{1}{3}\right)(3X^2 + 9X + 15)}$$

De plus le discriminant de $3X^2 + 9X + 15$ est strictement négatif, donc n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Youssef.B

Colle de la semaine 4

Exercice. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non constant tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $P(n)$ soit un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $P(n + P(n))$ est divisible par $P(n)$.
2. Montrer : $P(X + P(X)) = P(X)$, et en déduire une contradiction.

Solution:

1) Soit $m \in \mathbb{N}$

On pose $P(m) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i m^i$ tel que $d = \deg(P(m))$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$

On peut utiliser le calcul modulaire dans $\mathbb{Z}/P(m)\mathbb{Z}$:

$m + P(m) \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(m + P(m)) &\equiv \sum_{i=0}^{d} \alpha_i (m+P(m))^i \ [P(m)] \\ &\equiv \sum_{i=0}^{d} \alpha_i m^i \ [P(m)] \\ &\equiv P(m) \ [P(m)] \\ &\equiv 0 \ [P(m)] \end{aligned}$$

Donc $P(m + P(m))$ est divisible par $P(m)$

2) On a $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(m)$ est premier

Comme $m + P(m) \in \mathbb{N}$, $P(m + P(m))$ est aussi premier

Or, on sait que $P(m+P(m))$ est un multiple de $P(m)$

On peut alors en déduire que $\forall m \in \mathbb{N}$ $P(m) = P(m+P(m))$

On peut généraliser en exhibant un polynôme avec une infinité de racines et en déduire une contradiction par une analyse de degrés de l'égalité $P(X+P(X)) = P(X)$ (si $\deg(P) \geq 2$)

Et donc avec un polynôme de degré 1, on peut pas vérifier l'hypothèse de l'énoncé.

Rémi S

Semaine de colle n°2

Soit $n \in \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad \omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} - 1$

Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} |\omega_k|$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = e^{i\frac{\pi k}{n}}\left(e^{i\frac{\pi k}{n}} - e^{-i\frac{\pi k}{n}}\right)$

angle moitier $\rightarrow$ $= 2i\, e^{i\frac{\pi k}{n}} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$

Donc $|\omega_k| = 2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}_{>0}$

et $\arg(\omega_k) = \frac{\pi k}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\omega_k| = 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{\pi k}{n}}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{i\frac{\pi n}{n}}}{1 - e^{i\pi/n}}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{2}{\cancel{2}i e^{i\pi/2n} \sin(\pi/2n)}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{-i\pi/2n - \pi/2}\right) \frac{1}{\sin(\pi/2n)}$$

$$= -2 \underbrace{\sin\left(\pi/2n + \pi/2\right)}_{-\cos(\pi/2n)} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$= \frac{2}{\tan(\pi/2n)}$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\tilde{P}'(x) \neq 0$. Qu'a-t-on démontré sur le polynôme P ?

SOLUTION : On raisonne par l'absurde. Supposons $\tilde{P}'(x) = 0$.

Comme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$, $P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$$

De plus, x racine de $P \Rightarrow x \neq 0$ (sinon $1 = 0$).

Comme x racine de P et de P', il vient :

$$\tilde{P}(x) = \tilde{P}'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{n!} = 0 \quad ↯ \quad (x \neq 0).$$

Ainsi, pour toute racine x de P, $\tilde{P}'(x) \neq 0$.

On a donc montré que P est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Rayon 6

Colle de la semaine n°4

Énoncé : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

Q1. On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$

Démontrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$

Q2. Posons $H_0 = 1$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k)$$

Démontrer que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base de $\mathbb{C}[X]$

Q3. On suppose que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Que dire de P ?

Solution :

Q1) On suppose $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$

Si $P=0$ alors $P \in \mathbb{Q}[X]$

Sinon, on note $n := \deg(P) \in \mathbb{N}$

On introduit $x_0, \dots, x_n$ des rationnels 2 à 2 distincts

On considère donc $P(x_0), \dots, P(x_n)$ qui sont par hypothèse des rationnels.

On applique le théorème des interpolateurs de Lagrange :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$

On définit

$$L_k := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X-x_j}{x_k-x_j}$$

Le théorème nous livre que

$L = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$ a comme propriété

d'être unique, de degré inférieur ou égal à n

et

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad L(x_k) = P(x_k)$$

Puisque $\deg(P) = n$, on remarque que par unicité

$$P = L = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$

$P(x_k) \in \mathbb{Q}$

et

$$L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\overbrace{X-x_j}^{\in \mathbb{Q}[X]}}{\underbrace{x_k-x_j}_{\in \mathbb{Q}}}$$

On en déduit $L_k \in \mathbb{Q}[X]$

Ainsi

$P \in \mathbb{Q}[X]$

Q21) • Tout d'abord, nous remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad H_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$$

• De plus le cas où $n=0$ livre $H_0 = 1$ donc le résultat est prouvé pour $n=0$.

• On pose $n \in \mathbb{N}^*$:

On considère $\ell \in \mathbb{N}$

$$H_n(n+\ell) = \frac{1}{n!} \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} (n+\ell-k)}_{\substack{(n+\ell)(n+\ell-1)\dots(\ell+1) \\ = \frac{(n+\ell)!}{\ell!}}}$$

$$\text{Donc} \quad H_n(n+\ell) = \frac{(n+\ell)!}{n!\,\ell!} = \frac{(n+\ell)!}{(n+\ell-\ell)!\,\ell!} = \binom{n+\ell}{\ell} \in \mathbb{Z}$$

Si $\ell \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n(-\ell) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (-\ell-k)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} (\ell+k)}_{\substack{\ell(\ell+1)\dots(\ell+n-1) \\ = \frac{(n+\ell-1)!}{(\ell-1)!}}}$$

$$\text{On en déduit} \quad H_n(-\ell) = \frac{(n+\ell-1)!}{n!(\ell-1)!}(-1)^n$$

$$H_n(-\ell) = (-1)^n \binom{n+\ell-1}{\ell-1} \in \mathbb{Z}$$

Ainsi $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

Montrons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{C}[X]$

Tout d'abord, nous remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg(H_n) = n$$

On en déduit par le théorème des degrés échelonnés :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (H_n)_{n\in[\![0,m]\!]} \text{ base de } \mathbb{C}_m[X]$$

Démontrons désormais le résultat

Caractère libre

Montrons que toute sous famille est libre

On introduit une sous famille

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \quad \exists (i_1,\dots,i_m) \in \mathbb{N}^m$$

$$\exists (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{C}^m$$

tel que

$$\cancel{\sum_{k=0}} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k H_{i_k} = 0$$

On pose $s = \max((i_k)_{k\in[\![0,m]\!]})$

Ainsi $Q := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k H_{i_k}$ a un degré inférieur ou égal à 1

Or la famille des $(H_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{C}_n[X]$ et

$\forall h\in[\![1,m]\!]$ $H_{i_h}\in\mathbb{C}_n[X]$

On en déduit que

$\forall h\in[\![1,m]\!]$ $\lambda_h=0$

Ainsi la sous famille est libre et le caractère quelconque de cette dernière livre la liberté de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Caractère générateur</u> Soit $\varphi\in\mathbb{C}[X]$

Si $\varphi=0$, le résultat est clair

Sinon, on note $m:=\deg(\varphi)\in\mathbb{N}$

Nous savons que

$\varphi\in\mathrm{Vect}((H_h)_{h\in[\![0,m]\!]})$

Or $\mathrm{Vect}((H_h)_{h\in[\![0,m]\!]})\subset\mathrm{Vect}((H_n)_{n\in\mathbb{N}})$

Cela livre le caractère générateur, l'autre sens de l'inclusion étant livré par la minimalité ($\forall h\in[\![0,m]\!]$ $H_h\in\mathbb{C}[X]$) et le fait que $\mathbb{C}[X]$ soit un sous ~~espace~~ espace vectoriel.

Q7. On décompose P dans cette nouvelle base

$\exists m\in\mathbb{N}$ $\exists(\lambda_0,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{C}^{m+1}$

$$P=\sum_{h=0}^{m}\lambda_h H_h$$

Par des raisons de degré, nous déduisons que $m=\deg(P)$ si $P\neq 0$.

Le cas où $P=0$ est peu intéressant dans l'étude, nous l'excluons. De même pour le cas où $\deg(P)=0$.

Ainsi pour $m:=\deg(P)$:

$$P=\sum_{k=0}^{m} \lambda_k H_k$$

On évalue en 0:

$$P(0)=\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \underbrace{H_k(0)}_{=0 \text{ si } k\in\mathbb{N}^*,\ =1 \text{ sinon}}$$

$$P(0)=\lambda_0$$

Par hypothèse, on obtient $\lambda_0 = 0 \in \mathbb{Z}$

On conjecture que

$$\forall k\in [\![0,m]\!] \quad \lambda_k \in \mathbb{Z}$$

On raisonne par récurrence finie sur ~~$k\in[\![0,m-1 m-1]\!]$~~ $k\in[\![0,m]\!]$ et on pose

$$\forall k\in[\![0,m]\!] \quad P(k): \text{« } \lambda_k \in \mathbb{Z} \text{ »}$$

<u>Initialisation à $m=0$:</u> Déjà prouvé

<u>Hérédité:</u> Soit $k\in[\![0,m-1]\!]$ tel que $P(k)$

$$P(k+1)=\sum_{l=0}^{m} \lambda_l H_l(k+1)$$

$$P(k+1)=\sum_{l=0}^{k} \lambda_l H_l(k+1) + \lambda_{k+1} H_{k+1}(k+1)$$

L'hypothèse de récurrence et le fait que $H_{k+1}(k+1) = 1$ nous livre que :

$$\alpha_{k+1} = P(k+1) - \sum_{l=0}^{k} \alpha_l H_l(k+1) \in \mathbb{Z}$$

Conclusion :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \alpha_k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, les coefficients dans la base des $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des entiers. Nous remarquons par ailleurs que ce résultat s'étend pour $\deg(P) \leq 0$.

Nauer Léon

Rapport de colle de la semaine n°2

Déterminer tous les polynômes $P \overset{\in \mathbb{R}[X]}{}$ non-nuls tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X-1)P(X)$, on résout la question pour les polynômes non-constants, on suppose $\deg P \geqslant 1$

Par le théorème de d'Alembert - Gauß, $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $P(\alpha) = 0$

Ainsi $P(\alpha^2) = P(\alpha-1)\underbrace{P(\alpha)}_{0} = 0$

donc $\alpha^2 \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P)$, de même pour tout $l \in \mathbb{N}$ $\alpha^{2^l} \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P)$

Comme P est non-nul, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P)$ est fini, ainsi l'application

$\left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P) \\ l & \longmapsto & \alpha^{2^l} \end{array} \right. \right)$ ne peut être injective, ainsi $\exists (l, h) \in \mathbb{N}^2$, $h < l$ et $\alpha^{2^l} = \alpha^{2^h}$ ainsi, $\alpha^{2^h(1-2^{l-h})} = 1$ si $\alpha \neq 0$

ainsi α est une racine de l'unité :

$\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha = e^{i\theta}$, $P((\alpha+1)^2) = \underbrace{P(\alpha+1-1)}_{0} P(\alpha+1)$

ainsi $(\alpha+1)^2$ est racine de P

$$(\alpha+1)^2 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right)^2$$

$$= e^{i\theta}\, 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{(formule d'Euler)}$$

Comme $(\alpha+1)^2$ est racine de ~~l'unité~~ P, elle est racine de l'unité ainsi

$$|(\alpha+1)|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\Rightarrow$ $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$ ou $\frac{\theta}{2} = \frac{2\pi}{3} \; [2\pi]$

cas d'égalité
des cosinus et
réunion 2 à 2
des cas identiques

$\Rightarrow$ $\alpha = j^2$ ou $\alpha = \bar{j}^2$

si $\alpha = 0$ alors $P((0+1)^2) = \underbrace{P(0+1-1)}_{0} P(0+1)$

alors 1 est racine $\Rightarrow$ ~~$P((1+1)^2) = \underbrace{P(1+1-1)}_{0} P(1+1)$~~

~~alors 2 est racine~~ contradiction car

1 est racine et $1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $1 = \bar{j}$ ou $1 = j$.

$\Rightarrow 0 \notin \operatorname{Spec}_{\mathbb{C}}(P)$

De plus $\operatorname{dom}(P(X^2)) = \operatorname{dom}(P(X-1)P(X))$

$\operatorname{dom} P = \operatorname{dom} P \operatorname{dom} P$

comme $\operatorname{dom} P \neq 0$, $\operatorname{dom} P = 1$.

Nous avons montré que $\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \{j, \bar{j}\}$
ainsi comme j est racine complexe non-réelle et $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{j}$ est racine et
$\operatorname{mult}(\bar{j}, P) = \operatorname{mult}(j, P)$
Soit $m = \operatorname{mult}(j, P)$ ainsi

$$P = \operatorname{dom} P \, (X-j)^m (X-\bar{j})^m = \underbrace{(X^2 - X + 1)^m}_{:= Q}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Synthèse : $Q(X^2) = (X^4 - X^2 + 1)^m =$

$$Q(X)\,Q(X+1) = (X^2 - X + 1)^m (X^2 + X + 1)^m = (X^4 - X^2 + 1)^m \; \square$$

Hugo D. Semaine de colle n°4

Soient un entier $n \geqslant 2$, des réels $a_1, \dots, a_n$ et $P := \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.

Q1. — Calculer, sous réserve d'existence, la somme $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$.

Q2. — Calculer, sous réserve d'existence, la somme $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i \cdot P'(a_i)}$.

Solution

Q1) La somme existe ssi $\forall i \in [\![1,n]\!] \ P'(a_i) \neq 0$

$\iff \forall i \in [\![1,n]\!] \ \mathrm{mult}(a_i, P') = 0$

$\iff \forall i \in [\![1,n]\!] \ \mathrm{mult}(a_i, P) \leq 1$

Or $\forall i \in [\![1,n]\!] \ \mathrm{mult}(a_i, P) \geq 1$

Donc la somme existe si $(a_1, \dots, a_n)$ sont 2 à 2 $\neq$

Supposons que c'est le cas.

- $P' = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} (X - a_l)$ Si $i \in [\![1,n]\!]$ $\tilde{P}'(a_i) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} (a_i - a_l)$

- Par le théorème de la décomposition en éléments simples : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - a_k}$

Si $i \in [\![1,n]\!]$ $\frac{X - a_i}{P} = \lambda_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k \frac{X - a_i}{X - a_k}$

$\| $

$\frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} X - a_k}$ En évaluant en a_i on a $\lambda_i = \frac{1}{P'(a_i)}$

On considère le polynôme $\frac{X}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(a_k)} \frac{X}{X - a_k}$ qu'on évalue en $x > \max\{a_i : i \in [\![1,n]\!]\}$

$\frac{x}{\tilde{P}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(a_k)} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\underbrace{\frac{x}{x - a_k}}}$ Or $\tilde{P}(x) \underset{+\infty}{\sim} x^n$ donc $\frac{x}{\tilde{P}(x)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(a_k)} \frac{x}{x-a_k} \to \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(a_k)}$

Par unicité de la limite $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(a_k)} = 0}$

2) La somme existe si $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\begin{cases} a_i \neq 0 \\ P(a_i) \neq 0 \end{cases}$

On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $a_i \neq 0$ et $a_1, \dots, a_n$ 2 à 2 distincts

Comme 0 n'est pas de P, on peut évaluer $\frac{1}{P}$ en 0

$\frac{1}{P(0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} \frac{1}{-a_i}$ Donc $\boxed{(-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i) a_i}}$

$\prod_{i=1}^{n} (-a_i) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

Colle de la semaine 4

Louis B

factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $X^9+X^6+X^3+1$

$$X^9+X^6+X^3+1 = (X^3+1)(X^6+1)$$
$$= (X^6+1)(X^2-X+1)(X+1)$$

on remarque que $\Delta(X^2-X+1) = 1-4=-3<0$

Donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$.

Ensuite (X^6+1) : on remarque que i et $-i$ sont racines, et $\bar{i}=-i$

alors dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{l|l}
X^6 \qquad\qquad +1 & X^2+1 \\ \cline{2-2}
-X^6-X^4 & X^4-X^2+1 \\ \cline{1-1}
\quad -X^4 & \\
\quad +X^4+X^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad X^2+1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

et $(X+i)(X-i) = X^2+1$

Donc $(X^6+1) = (X^2+1)(X^4-X^2+1)$

et on pose $Y = X^2$ $\quad (X^4-X^2+1) = (Y^2-Y+1)$

Les racines sont $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Donc les racines pour X sont les $z\in\mathbb{C}$ tq

(1) $z^2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z^2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (2)

$\iff z^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

donc les racines de $X^4 - X^2 + 1$ sont :

$$e^{i\frac{\pi}{6}} \; , \; e^{-i\frac{\pi}{6}} \; , \; e^{i\frac{5\pi}{6}} \; , \; e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

on remarque que les solutions sont conjuguées pour 1 et 2 et 3 et 4

Donc $(X^4 - X^2 + 1) = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)X + 1\right)$

où les polynômes de degré 2 sont de discriminant strictement négatif (-1)

Donc $X^9 + X^6 + X^3 + 1$

$$= (X^2 - X + 1)(X + 1)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 1\right)$$

MARGIACOMINI
Amélien

Rapport de Colle S4.

Exercice 11. poly1

Soit a un réel et n dans $\mathbb{N}^*$. On définit $P_0 = 1$ et pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $P_k = X(X-ka)^{k-1}$. Pour Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$\varphi(Q) = \sum_{j=0}^{n} \frac{Q^{(j)}(ja)}{j!} P_j$$

1. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, calculer $P_k^{(j)}(ja)$
2. pour $k \in [\![0,n]\!]$ calculer $\varphi(P_k)$
3. Que peut on en déduire pour φ ?

1) Par la formule de Leibniz on a $P_k^{(j)} = \left[X(X-ka)^{k-1}\right]^{(j)}$

$$= \sum_{i=0}^{j} X^{(i)} \left[(X-ka)^{k-1}\right]^{(j-i)} \binom{j}{i}$$

$$= X\left[(X-ka)^{k-1}\right]^{(j)} + j\left[(X-ka)^{k-1}\right]^{(j-1)}$$

$(\forall i \geq 2 \quad X^{(i)} = 0)$

$$= X \frac{(k-1)!}{(k-1-j)!}(X-ka)^{k-1-j} + j\frac{(k-1)!}{(k-j)!}(X-ka)^{k-j}$$

Donc $P_k^{(j)}(ja) = ja\dfrac{(k-1)!}{(k-1-j)!}(ja-ka)^{k-1-j}$

$$+ j\frac{(k-1)!}{(k-j)!}(ja-ka)^{k-j}$$

$$= (ja-ka)^{k-1-j}\overbrace{\left[ja\frac{(k-1)!}{(k-1-j)!} + j\frac{(k-1)!}{(k-j)!}(ja-ka)\right]}^{\oplus}$$

$$\text{(*)} = ja \left[\underbrace{\frac{(k-1)!}{(k-1-j)!} + \frac{(k-1)!}{(k-j)!}(j-k)} \right]$$

$$= \frac{(k-1)!}{(k-1-j)!} - \frac{(k-1)!\,\cancel{(k-j)}}{\cancel{(k-j)!}\,(k-1-j)!}$$

$$= 0 .$$

2) $$\varphi(P_k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P_k^{(j)}(ja)}{j!} P_j$$

$$= P_k(a)\, P_0 \quad \left(\forall j \in \mathbb{N}^* \; P_k^{(j)}(ja) = 0 \right)$$

$$= a^k (1-k)^{k-1}$$

3) Comme $\forall k \in [\![0;n]\!]$ P_k est de degré k donc $(P_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (théorème des degrés échelonnés).

De plus φ est linéaire ; soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]^2$

donc $$\varphi(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) = \lambda_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_1^{(j)}(ja)}{j!} P_j$$

MANGIACOMONI
Amélien

$$+ \lambda_2 \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_2^{(j)}(x_0)}{j!} P_j$$

(linéarité de la somme et de l'évaluation de polynome

$$= \lambda_1 \varphi(Q_1) + \lambda_2 \varphi(Q_2).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{n+1}$

tq $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$ $\left((P_k)_{k \in [0;n]} \text{ base de } \mathbb{R}_n[X] \right)$

et $\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{\varphi(P_i)}_{\in \mathbb{R}_0[X] \text{ d'après Q 2.}}$

donc $\varphi(P) \in \underset{\underset{\mathbb{R}}{\shortparallel}}{\mathbb{R}_0}[X]$ (stable par combinaison linéaire /

donc $\varphi \mid \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.