Titouan Rapport de colle

D

Considérons l' équation différentielle :

$$(E)\ :\ t\,y'' + 3\,y' - 4\,t^3\,y = 0.$$

Q1. — Déterminer une solution y_1 de (E) non nulle et développable en série entière au voisinage de 0.

Q2. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière associée à y_1, puis exprimer y_1 à l'aide de de fonctions usuelles.

Q3. — Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.

(E) est une $EDLSH_2$ donc ses solutions forment un plan vectoriel

Q1) Soit y_1 solution de (E) non nulle et developpable en série sur un voisinage V de 0

$$\forall t \in V \qquad y_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$y_1'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n t^{n-1}$$

$$y_1''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) t^{n-2}$$

y_1 solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall t\in V \quad t\sum_{n=2}^{+\infty} a_n (n-1)n t^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n t^{n-1} - 4t^3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3a_1 + 8a_2 t + 15 a_3 t^2 + t\sum_{n=3}^{+\infty}\left(n(n+2)a_{n+2} - 4a_{n-2}\right)t^n = 0$$

On a une fonction devellopable en serie entière nulle sur un ouvert non vide et non réduit à un point donc tous les coefficients de la serie sont nuls, ie

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \forall k\in\mathbb{N} \quad a_{k+4} = \dfrac{4}{(k+4)(k+6)}\, a_k \end{cases}$$

Par récurrence, cette formule livre $\forall k\in\mathbb{N}$ $\quad a_{4k} = \dfrac{1}{(2k+1)!}\, a_0$

Initialisation à $k=0$

$$a_0 = \frac{1}{1!} a_0$$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que la propriété soit vraie

$$a_{4(k+1)} = \frac{4}{(4k+4+4)(4k+4+6)} a_{4k}$$

$$= \frac{4}{4(2k+2)(2k+3)(2k+1)!} a_0$$

$$= \frac{1}{(2k+3)!} a_0$$

Sur V on a donc $y_1 : t \mapsto a_0 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (t^2)^{2k} \right)$

En fixant $a_0 = 1$ on a $\boxed{y_1 : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (t^2)^{2k} \text{ convient}}$

Q2) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{(2k+1)!\ (t^2)^{2k+2}}{(2k+3)!\ (t^2)^{2k}} \right| = \left| \frac{t^4}{(2k+3)(2k+2)} \right| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 < 1 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Donc $\boxed{R(y_1) = +\infty}$

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ $\quad y_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (t^2)^{2k}$

$$= \frac{1}{t^2} \sum_{k=0} \frac{1}{(2k+1)!} (t^2)^{2k+1}$$

$$= \frac{\cancel{s}h(t^2)}{t^2}$$

Ainsi $\boxed{y_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{sh(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array} \right.}$ et y_1 est bien C^2 car développable en série entière sur $\mathbb{R}$

Titouan Rapport de colle

D

Q3) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto t$ ne s'annule pas. On normalise donc (E)

$$(E) : y'' = -\frac{3}{t} y' + 4t^2 y$$

Q3) on sait déjà $x_1 = y_{|\mathbb{R}_+^*}$ solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $x_2 = \lambda x_1$ soit solution de (E)

Par variation de la constante

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$x_2''(t) = \lambda''(t) x_1(t) + 2\lambda'(t) x_1'(t) + \lambda(t) x_1''(t)$$

$$x_2'(t) = \lambda'(t) x_1(t) + \lambda(t) x_1'(t)$$

x_2 solution de (E)

$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\lambda''(t) x_1(t) + 2\lambda'(t) x_1'(t) + \lambda(t) x_1''(t) = \frac{-3}{t}\left(\lambda'(t) x_1(t) + \lambda(t) x_1'(t)\right) + 4t^2 \lambda(t) x_1(t)$

$\underset{x_1 \text{ solution de } E}{\iff} \forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\lambda''(t) x_1(t) = \lambda'(t)\left(-\frac{3}{t} x_1(t) - 2 x_1'(t)\right)$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $sh(t) \neq 0$ donc x_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

ainsi

x_2 solution de (E) $\iff$ λ' solution de (E_{aux}) $\lambda''(t) = \lambda'(t)\underbrace{\left(-\frac{3}{t} - 2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)}\right)}_{a(t)}$

$\iff \lambda' : t \mapsto e^{A(t)}$ avec A primitive de a

$\iff \lambda' : t \mapsto e^{(-3\ln(t) - 2\ln(x_1(t)))} = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{x_1^2(t)}$

ainsi $\lambda \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2} + \int_0^t \frac{1}{x_1^2(t)} dt \end{array} \right.$

et $x_2 : t \mapsto \lambda(t)\, x_1(t)$ convient

Par variation de la constante (x_1, x_2) système fondamental de solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\boxed{Sol_{(E/\mathbb{R}_+^*)} = Vect(x_1, x_2)}$

Ibrahim · K.

Colle de la Semaine

Soit $p \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ continu et croissante

on considère $(\mathcal{E})$: $y'' + p(t)y = 0$ où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Soit f une solution non nul de $(\mathcal{E})$

on pose $A = \{x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.

et $B = (f')^{-1}(\{0\})$.

montrer que A et B sont.

- infini
- dénombrable
- entrecalé :
- disjoint
- sans point d'accumulation

* Caractère disjoints :

Soit, par l'absurde, $x_0 \in A \cap B$ on pose

$$(P) : \begin{cases} y'' + p(t)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

on a f est solution de (P) et la fonction nulle aussi

donc $f = 0$ or ceci est absurde.

* ~~disj~~ sont sans point d'accumulation :

Par l'absurde soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$.

ainsi par continuité de f on a $a \in A$.

ainsi $\underbrace{\dfrac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}}_{=0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(a)$.

donc $a \in B$ or ceci est absurde

Come f verifie $(\mathcal{E})$ alors on prouve de même que B est sans pt d'accumulation

Le constant entrecoté :

- Soit $(a_1, a_2) \in A^2$ on suppose $a_1 < a_2$

  f est $\mathcal{C}^0$ sur $[a_1, a_2]$

  dérivable sur $]a_1, a_2[$

  $f(a_1) = f(a_2) = 0$

  Par le théorème de Rolle.

  $\exists\, c \in]a_1, a_2[$ tq $f'(c) = 0$

  donc $c \in B$.

- de même on prend $b_1 < b_2$ deux points de B.

  f' est $\mathcal{C}^0$ sur $[b_1, b_2]$

  dérivable sur $]b_1, b_2[$.

  $f'(b_1) = f'(b_2) = 0$.

  $\exists\, a \in]b_1, b_2[$ tq $f''(a) = 0$.

  en évaluant (E) en a on a.

  $p(a) f(a) = 0$.

  or $p(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc

  $f(a) = 0$

Léa N.   Colle de la semaine n°: 23

Énoncé,

Exercice 2 :

Soient $\theta \in \mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π – périodique.
On désigne par g une solution de l'équation différentielle : $y' + \theta y = f.$ (E)

1. Montrer que g est 2π – périodique si et seulement si $g(0) = g(2\pi)$.

2. En déduire qu'il existe une unique solution de (E) qui soit 2π – périodique.

Solution :

$(\mathcal{E})$ $\quad y' + \theta y = f \quad , \quad y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$(\mathcal{E}_H)$ $\quad y' + \theta y = 0 \quad , \quad y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$a : t \longmapsto -\theta \quad \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique

Donc $(\mathcal{E})$ est une équation différentielle scalaire d'ordre 1,
et $(\mathcal{E}_H)$ sont équation homogène associée.

$$Sol(\mathcal{E}_H) = Vect\left(\begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{-\theta t} \end{vmatrix} \right)$$

Et par méthode ~~de~~ de la variation de la constante,

$x_p : t \longmapsto e^{-\theta t} \int_0^t f(u) e^{\theta u} \, du$ est une solution de $(\mathcal{E})$

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ~~g~~ $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) = e^{-\theta t} \int_0^t f(u) e^{\theta u} du + \lambda e^{-\theta t}$

En évaluant en 0, on trouve $\lambda = g(0)$.

1/ Montrons que $\forall t \in \mathbb{R}\ g(t) = g(t+2\pi) \iff g(0) = g(2\pi)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Clair

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $g(0) = g(2\pi)$

On pose $P \left| \begin{array}{l} (\mathcal{E})\ y' + \theta y = f \\ y(0) = g(2\pi) \end{array} \right.$ ~~un~~ problème de Cauchy

On sait que $g \in Sol(P)$

Posons $h : t \longmapsto g(t+2\pi)$

On remarque que $h \in Sol(\mathcal{E})$

et $h(0) = g(2\pi)$

donc $h \in Sol(P)$

Alors par unicité de la solution du problème de Cauchy,

$\forall t \in \mathbb{R}\quad h(t) = g(t)$

ie $\forall t \in \mathbb{R}\quad g(t+2\pi) = g(t)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}\ g(t+2\pi) = g(t) \iff g(0) = g(2\pi)$

2/ <u>Unicité :</u>

Supposons qu'il existe $g, h \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^2$ solutions de $(\mathcal{E})$

qui sont 2π - périodique.

On sait que $\forall t \in \mathbb{R}$.

$g(t) = e^{-\theta t} \int_0^t f(u)\, e^{\theta u} du + g(0) e^{-\theta t}$

$h(t) = e^{-\theta t} \int_0^t f(u)\, e^{\theta u} du + h(0) e^{-\theta t}$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$(h-g)(t) = (h(0) - g(0)) e^{-\theta t}$

On d'après Q.1, $h(0) = h(2\pi)$ et $g(0) = g(2\pi)$

Par l'absurde, supposons que $h(0) \neq g(0)$

On remarque que

$$(h-g)(t) = (h-g)(t+2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad (h(0)-g(0))\, e^{-\theta t} = (h(0)-g(0))\, e^{-\theta t} e^{-2\pi\theta}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-2\pi\theta} = 1 \quad (*)$$

$h(0)-g(0) \neq 0$ par hypothèse et $e^{-\theta t} \neq 0$

Or $\theta \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Posons $\theta = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a,b) \neq (0,k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

$$|e^{-2\pi\theta}| = |e^{-2\pi a}| \times |e^{-i2\pi b}|$$

$$= |e^{-2\pi a}|$$

- Si $b \in \mathbb{Z}$, alors $a \neq 0$ donc $|e^{-2\pi\theta}| \neq 1$

  contradiction $(*)$

- Sinon, Si $b = \frac{1}{2}$

  alors $e^{-i2\pi b} = e^{-i\pi} = -1$

  Or $e^{-2\pi a} \in \mathbb{R}_{>0}$

  Alors $e^{-2\pi\theta} \neq 1$, contradiction $(*)$

  Si $b \neq \frac{1}{2}$

  $$e^{-i2\pi b} \notin \mathbb{R}$$

  donc $e^{-i2\pi\theta} \notin \mathbb{R}$, à fortiori $e^{-i2\pi\theta} \neq 1$, contradiction

  *

On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}$ $(h-g)(t) = 0$

alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $h(t) = g(t)$

Existence :

Soit $y \in Sol(\mathcal{E})$

$\exists K \in \mathbb{R}$ $\quad y = Ke^{-\theta t} + e^{-\theta t}\int_0^t f(u)e^{\theta u}\,du$

Analyse :

Supposons que y est 2π-périodique.

$y(0) = K = y(2\pi)$ (d'après Q.1)

$= e^{-\theta 2\pi}\left(y(0) + \int_0^{2\pi} f(u)e^{\theta u}\,du\right)$

On trouve alors une condition sur K.

Synthèse

D'après Q.1, comme $y(0) = y(2\pi)$

alors y est 2π-périodique.

Rapport de Colle, semaine n° 23

Wassim
M.

Exercice : Déterminer les solutions réelles du système $\begin{cases} x' = -x+3y+e^t \\ y' = -2x+4y \end{cases}$

_ Solution :

• C'est une SDL1

$A : t \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B : t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathcal{E}^0$

$X' = AX + B$

• Sol (φ) est un espace affine de dimension 2
Sol (φ_H) est un espace vectoriel de dimension 2

• $\chi_A = (X+1)(X-4)+6 = (X-1)(X-2)$
donc A possède 2 valeurs propres distinctes et est de format $(2,2)$. A est donc diagonalisable.

$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $X_2(t) = e^t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $X_1'(t) = 2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\, e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = AX_1(t)$

X_1, X_2 sol de (φ_H) or $(X_1(0), X_2(0)) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ libre car $E_2(A) \oplus E_1(A) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc (X_1, X_2) système fondamental de

~~solution~~ $\mathrm{Sol}(\varphi_H)$. $\mathrm{Sol}(\varphi_H) = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

. On cherche une solution particulière de (φ) de la forme

$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$

$$X \text{ sol de } (\varphi) \iff \forall t \in \mathbb{R} \; X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \; \lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_1(t)X_1'(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) + \lambda_2(t)X_2'(t) = \lambda_1 A X_1(t) + \lambda_2 A X_2(t) + B(t)$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \; \lambda_1'(t)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \lambda_2'(t)\begin{pmatrix} 3e^{t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \; \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{t} \\ e^{2t} & 2e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \; \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = -e^{-3t}\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 : t \mapsto 2e^{-t}$ et $\lambda_2 : t \mapsto t$ conviennent

$$X : t \mapsto 2e^{2t}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 2+3t \\ 2+2t \end{pmatrix} + \lambda_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sol}(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto e^{t}\begin{pmatrix} 2+3t \\ 2+2t \end{pmatrix} + \lambda_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Sophie G

Semaine de colle n° 23

$$\boxed{\text{Résoudre } \quad y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{1+t^2}}$$

Solution

$$(\mathcal{E}) \left| \begin{array}{l} y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2t}}{1+t^2} \\ y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \left| \begin{array}{l} y''+4y'+4y=0 \\ y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

Il s'agit d'une equation differentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Sol$(\mathcal{E})$ est plan affiné dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$(\mathcal{E}ca)$: $x^2+4x+4=0 = (x+2)^2$

$(\mathcal{E}ca)$ a une unique solution reelle : -2.

d'où

$$\boxed{\mathrm{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H})=\mathrm{Vect}\left(y_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto e^{-2x} \end{array}\right., y_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto xe^{-2x} \end{array}\right.\right)}$$

Cherchons une solution particulière de $(\mathcal{E})$

Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$

tel que $\lambda_1'y_1+\lambda_2'y_2 \underset{\forall t\in\mathbb{R}}{=} 0$

$$\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\in\mathrm{Sol}(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1' \\ \lambda_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}\end{pmatrix}}_{(*)}$$

$$\circledast = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t}(1-2t) \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{R})$$

et

$$\circledast^{-1} = e^{4t} \begin{pmatrix} e^{-2t}(1-2t) & -te^{-2t} \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{pmatrix} \circledast^{-1}$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(t) = \dfrac{-t}{1+t^2} \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

d'où (théorème fondamental de l'analyse)

$\lambda_1 : t \longmapsto -\frac{1}{2} \ln(1+t^2)$

$\lambda_2 : t \longmapsto \arctan(t)$

Une solution particulière de (E) est

$$\boxed{x_{part} = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}$$

$$\boxed{Sol(E) = \left\{ \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan(t)t + k_1 + tk_2\right) \end{vmatrix} : \begin{matrix}(k_1,k_2) \\ \in \mathbb{R}^2\end{matrix} \right\}}$$

Stanislas G

Enoncé : Montrer que toutes les solutions de (E) $y' + e^{x^2} y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$

Solution :

Soit $y \in Sol_{(E)}$

On peut écrire y de cette façon

$$y \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k e^{A(x)} \end{array} \right.$$

où $k \in \mathbb{R}$

$f \left| t \longmapsto e^{t^2} \right.$ est $\mathcal{C}^0$ donc intégrable et $A \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\int_0^x e^{t^2} dt \end{array} \right.$

Soit $t \geqslant 0$

alors $e^{t^2} \geqslant 1$ (croissance d'exponentielle)

donc $\forall x \geqslant 0 \quad -A(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \geqslant \int_0^x 1 \, dt = x$ (croissance de l'intégrale)

~~...~~ donc $-A(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ (par domination)

donc $A(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

donc $\boxed{y(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

Alexandre M.

Colle semaine 23

Enoncé

> Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$
>
> (EH) $\quad ay'' + by' + cy = 0$, où $a = t$; $b = 1-2t$; $c = t-1$

Résolution :

Comme a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, il est possible de normaliser l'équation :

$$(EH) \iff y'' = \left(\frac{1}{t} - 1\right) y + \left(2 - \frac{1}{t}\right) y' \quad , y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2.

- Le théorème de Cauchy livre $Sol(EH)$ est un plan de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

- Il s'agit d'abord de déterminer une solution particulière de (EH).

Comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad a(t) + b(t) + c(t) = t + 1 - 2t + t - 1$
$= 0$

Il est naturel de considérer $\boxed{x_1 \,\Big|\, \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t \end{array}}$

qui est de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ car
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$$a(t)\, x_1''(t) + b(t)\, x'(t) + c(t)\, x(t) = e^t \underbrace{\left(a(t) + b(t) + c(t) \right)}_{0} = 0$$

donc $x_1 \in \mathcal{S}ol(EH)$.

- Grâce à la méthode du wronskien, il est possible de déterminer $x_2 \in \mathcal{S}ol(EH)$ tel que x_1 et x_2 soient linéairement indépendantes.

$$W \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{\int_*^u -\frac{b(t)}{a(t)}\,dt} = e^{\overbrace{\int_*^u 2-\frac{1}{t}\,dt}^{2u-\ln(u)}} = \frac{e^{2u}}{u} \end{array}\right.$$

Ainsi

$$x_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto x_1(t)\int_1^t \frac{W(u)}{x_1(u)^2}\,du \end{array}\right.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad x_2(t) = e^t\int_1^t \frac{e^{2u}}{u} \times \frac{1}{(e^u)^2}\,du$$

$$= e^t\int_1^t \frac{1}{u}\,du$$

donc $\boxed{x_2(t) = e^t \ln(t)}$

Donc $\boxed{\mathcal{S}ol(EH) = \mathrm{Vect}\left(x_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t \end{array}\right. ; x_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t \ln(t) \end{array}\right.\right)}$

ELIOTT S^T-V. SEMAINE 23

ÉNONCÉ

> Résoudre $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

UNE SOLUTION

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \exists (p,i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ p(-x) = p(x),\quad i(-x) = -i(x) \end{cases}$$

De plus, $\forall (p,i) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, i impaire, p paire

alors i'' impaire et p'' paire.

En effet : $\begin{cases} p(-x) = p(x) & \Rightarrow -(-p''(x)) = p''(x) \\ i(-x) = -i(x) & \Rightarrow -(-i''(-x)) = -i''(x) \end{cases}$

Comme $x \mapsto x$ est impaire et $x \mapsto \cos(x)$ est paire,

$$f = i + p \in Sol(\mathcal{E}) \iff \begin{cases} \underset{i \text{ impaire}}{i \in Sol(\mathcal{E}_i)}, & (\mathcal{E}_i)\ f'' - f = x \\ \underset{p \text{ paire}}{p \in Sol(\mathcal{E}_p)}, & (\mathcal{E}_p)\ f'' + f = \cos(x) \end{cases}$$

Déterminons $Sol(\mathcal{E}_i)$, $Sol(\mathcal{E}_p)$:

- Toutes les fonctions paramètres de $(\mathcal{E}_i)$ et $(\mathcal{E}_p)$ sont continues sur $\mathbb{R}$: $Sol(\mathcal{E}_i)$ et $Sol(\mathcal{E}_p)$ sont des plans affines de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de $(\mathcal{E}_pH)$

  $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin(x)$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_p)$ obtenue à l'aide de la méthode de variation des constantes.
- $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est un système fondamental de $(\mathcal{E}_iH)$

  $x \mapsto -x$ est une solution évidente particulière de $(\mathcal{E}_i)$

Donc :

$$Sol(\mathcal{E}_p) = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k_1\cos(x) + k_2\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) \end{array} \right. : (k_1 k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$Sol(\mathcal{E}_i) = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k_1 ch(x) + k_2 sh(x) - x \end{array} \right. : (k_1 k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Par suite :

$$\left. \begin{array}{l} p \in Sol(\mathcal{E}_p) \\ p \text{ paire} \end{array} \right| \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = k_1\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} i \in Sol(\mathcal{E}_i) \\ i \text{ impaire} \end{array} \right| \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad i(x) = k_2 sh(x) - x.$$

Enfin :

$$\left. \begin{array}{l} f : i + p \\ f \in Sol(\mathcal{E}) \end{array} \right| \Rightarrow \exists (k_1 k_2) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = k_1\cos(x) + k_2 sh(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) - x$$

Donc :

$$Sol(\mathcal{E}) = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k_1\cos(x) + k_2 sh(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) - x \end{array} \right. \quad (k_1 k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Louis D. Semaine de colle n° 23

Énoncé :

1) Résoudre $(\mathcal{E})$ $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$

2) En déduire une expression de
$x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{dt}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

3) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Une solution :

1) $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y'' = -y + \frac{1}{x}$ une EDL2

Comme $a_0 : x \mapsto -1$ et $b : x \mapsto \frac{1}{x}$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par le théorème de Cauchy,
$Sol(\mathcal{EH})$ est un plan vectoriel
$Sol(\mathcal{E})$ est un plan affine

On remarque que $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de $Sol(\mathcal{EH})$.

$$\boxed{Sol(\mathcal{EH}) = Vect(\cos, \sin)}$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$
$\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin \in Sol(\mathcal{E})$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/x \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/x \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix}\right.$ matrice de rotation$\left.\right]$ donc inversible

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(x) = -\sin(x) \, 1/x \\ \lambda_2'(x) = \cos(x) \, 1/x \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

On en déduit que $x_{part} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos(x) \int_*^x \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \int_*^x \frac{\cos(t)}{t} dt \end{array} \right.$

est solution de $(\mathcal{E})$

Alors $\boxed{\mathcal{S}ol(\mathcal{E}) = x_{part} + \mathcal{S}ol(\mathcal{E}\mathcal{H})}$

2) $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ (x, t) \mapsto e^{-tx} \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right.$

(H_1) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2} e^{-tx}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-tx}$

(H_2) $\forall l \in [\![0,2]\!]$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $t \mapsto \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x,t)$ est cpm sur $\mathbb{R}_+^*$

(H_3) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

$t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^3}{1+t^2} e^{-tx} \sim -t e^{-t\overset{>0}{x}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$t \mapsto \frac{1}{t^2} > 0$ et intégrable en $+\infty$ par Riemann

Par théorème de comparaison, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable en $+\infty$ et de limite finie en 0.

Par un raisonnement analogue, $f(x, \cdot)$ est intégrable en $+\infty$ et de limite finie en 0.

(H4 locale) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in [a,b]$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$a \leq x$$

$$\Rightarrow e^{-at} \geq e^{-xt} \quad (t>0)$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)\right| \leq \frac{t^2}{1+t^2} e^{-at} =: \varphi(t)$$

- φ est intégrable en $+\infty$ car $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-at} \geq 0$ qui est intégrable en $+\infty$ car $a>0$ et théorème de comparaison.

- φ est cpm sur $\mathbb{R}_+^*$

Le théorème s'applique

(C1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\cdot)$ est intégrable en $+\infty$

(C2) $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^2$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-tx}\, dt$$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g''(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{1+t^2} e^{-tx}\, dt \quad \text{[linéarité d'}\textstyle\int\text{ convergente]}$$

$$= \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{x}$$

et g solution de $(\mathcal{E})$

Il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^2$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{dt}{1+t^2} = \sin(x) \int_*^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \cos(x) \int_*^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$
$$+ k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)$$

On choisit $* = +\infty$, $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

existent car $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$

convergent (intégration par partie + Riemann)

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{dt}{1+t^2} = k_1 \underbrace{\cos(x)}_{\text{borné}} + \underbrace{\cos(x)}_{\text{borné}} \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt}_{\to 0 \; x \to +\infty}$$
$$+ k_2 \underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}} - \underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}} \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt}_{\to 0 \; x \to +\infty}$$

Or, $\left| \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1}{\underbrace{1+t^2}_{\geq 1}}\,dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par théorème d'encadrement

On en déduit $k_1 = k_2 = 0$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\underbrace{g(x)}_{g(0) = \frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos(x)}_{\to 1 \; x \to 0} \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt}_{\xrightarrow[x \to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt} - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt}$$

Q3) Mq : $\sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Lina. A

Colle de la semaine 23

Énoncé :

$$\boxed{\text{Résoudre } |y''| = y : (\mathcal{E}) \quad y \in D^2(I, \mathbb{R})}$$

Solution :

• 1er cas : $y'' \leq 0$.

$(\mathcal{E})$ devient $y'' = -y$.

• $Sol_{(\mathcal{E})}$ est un ~~plan~~ plan vectoriel de $D^2(I, \mathbb{R})$.

On remarque que $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos(t)$ sont solution de $(\mathcal{E})$: $Sol_{(\mathcal{E})} = Vect\left(\begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(t) \end{vmatrix} \right)$

• 2e cas : $y'' \geq 0$

$(\mathcal{E})$ se réécrit $y'' = y$

• $Sol_{(\mathcal{E})}$ est un plan vectoriel de $D^2(I, \mathbb{R})$

On remarque que $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont Sol de $(\mathcal{E})$

Donc $Sol_{(\mathcal{E})} = Vect\left(\begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} \end{vmatrix} \right)$.

Comme $y = |y''|$ et que $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0, si il existe un point intérieur de I, qu'on note a, tel que :

$$y(a) = 0$$

alors y ne sera pas dérivable en 0.

Supposons qu'il existe un tel point.

Posons $h \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (y(t) - y'(t))e^t \end{vmatrix}$ et $g \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (y(t) + y'(t))e^{-t} \end{vmatrix}$

de sorte que $y' = \frac{1}{2}(g e^{-t} - h e^t)$

• $(\mathcal{E})$ livre y est positive et $y'' \leq y$

• Soit $t \in I$.

$$h'(t) = (y(t) + y'(t) - y'(t) - y''(t))e^t = (y(t) - y''(t))e^t \geq 0$$

$$g'(t) = (-y(t) + y'(t) - y'(t) + y''(t))e^{-t} = (y''(t) - y(t))e^{-t} \leq 0$$

Donc $-h$ et g sont décroissantes sur I.

~~Donc f est décroissantes sur I.~~

• D'autre part comme $y \geq 0$ et que $y(a) = 0$ alors a est un minimum et $y'(a) = 0$.

Donc $h(a) = g(a) = 0$

• Des deux points précédents, nous pouvons déduire:

t	$\inf(I)$	a	$\sup(I)$
$-h(t)$	$+$	0	$-$
$g(t)$	$+$	0	$-$
$y'(t)$	$+$	0	$-$
$y(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Ce qui dire que $y \leq 0$ et nous savons que $y \geq 0$

Donc $y = 0$.

Conclusion: • Soit y ne s'annule en aucun point intérieur et dans ce cas

$$Sol_{(E)} = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(t) \end{array} \right., \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(t) \end{array} \right. \right)$$

ou

$$Sol_{(E)} = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{t} \end{array} \right., \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} \end{array} \right. \right)$$

• Soit y s'annule en un point intérieur et dans ce cas. y est identiquement nul.

Oudoire Gatien

Resoudre l'équation différentielle

(E) $y'' + y = \cotan(x)$ sur $I =]0, \pi[$

(EH) $y'' + y = 0$ sur I

Sol (EH) est un plan de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$

Sol (E) est un plan affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$

Sol (EH) $= \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$

On applique donc la méthode de variation des constantes pour resoudre (E).

Soit $(A, B) \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, $A\cos + B\sin$ est solution de (E) sur I.

Soit $x \in I$,

$$\begin{cases} (1)\quad A'\cos(x) + B'\overset{\sin}{\cancel{\cos}}(x) = 0 \\ (2)\quad -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) = \cotan(x) \end{cases}$$

(1) donc $A'(x) = -B'(x)\tan(x)$

(2) donc $B'(x)\left(\dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)} + \cos(x)\right) = \cotan(x)$

donc $B'(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\sin(x)} = \dfrac{1-\sin^2(x)}{\sin(x)}$

$$\int^{x} B'(t)\,dt = \int^{x} \frac{1}{\sin(t)}\,dt - \int^{x} \sin(t)\,dt$$

Calculons $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$

on effectue le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

donc $dt = \dfrac{2}{1+u^2}\,du$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$

donc $$\int^{\overset{x}{\cancel{u(x)}}} \frac{1}{\sin(t)}\,dt = \int^{u(x)} \frac{1+u^2}{2u} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

donc $B(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)$

On détermine A de la même manière.

on trouve $$\mathrm{Sol}(E) = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{1}{2}\sin(x)\ln\left(\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos x}\right) + A\cos(x) + B\cos(x) \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Mehdi B. Colle de la semaine

$$\boxed{\text{Résoudre } (\mathcal{E}) : y'' + y = \cos(x)}$$

Solution : 1) Sur $\mathbb{R}$, $(\mathcal{E})$ se réécrit : $y'' = \underbrace{-1}_{a_0(x)} \cdot y + \underbrace{\cos(x)}_{b(x)}$

a_0 et b sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Par théorème de Cauchy, $Sol(\mathcal{E})$ est un plan affine de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2) $Sol(\mathcal{E}H) = Vect(\cos, \sin)$

3) Soit $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ tel que $\lambda_1' \cos + \lambda_2' \sin = 0$

$\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin$ solution de $(\mathcal{E})$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\forall x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} \lambda_1'(x) = -\sin(x)\cos(x) \\ \lambda_2'(x) = \cos^2(x) \end{cases}$$

$\lambda_1 : x \mapsto \frac{\cos^2(x)}{2}$ convient.

$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2} = \frac{1}{4} 2\cos(2x) + \frac{1}{2}$.

Donc $\lambda_2 : x \mapsto \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x$ convient.

$x \mapsto \frac{\cos^3(x)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x)$ est solution

Ainsi :

$$\mathcal{S}ol(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + y(x) \end{array} : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Rapport de Colle

Exercice 1 : Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\begin{cases} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t}. \\ y' = 2x - y \end{cases}$ $(\mathcal{E})$

Chercher l'ensemble des solutions à valeurs réelles.

$I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

(A) On cherche d'abord les solutions complexes ;

$(\mathcal{E})$ se traduit en ; $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(t)} \\ 0 \end{pmatrix}}_{:= B(t)}}_{(\mathcal{Y})}$

$\rightsquigarrow (\mathcal{Y}H)$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{:= A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\chi_A = (X - i)(X + i)$ donc A diagonalisable

et $E_i(\varphi_A) \oplus E_{-i}(\varphi_A)$ où φ_A est l'endo de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

À l'aide d'un système on trouve ;

$E_i(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}\right)$, $E_{-i}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}\right)$

puis $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}}_{:= P}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix}}_{:= P^{-1}}$

On pose $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a ; $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} u' = iu \\ v' = -iv \end{cases}$ donc $\begin{cases} u : t \mapsto A e^{it} \\ v : t \mapsto B e^{-it} \end{cases}$ où $(A,B) \in \mathbb{C}^2$

puis $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ (1-i)u + (1+i)v \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}$

Il faut que x, y soient à valeurs réelles,

$L_1 \in \mathbb{R} \iff \forall t \in I \quad A e^{it} + B e^{-it} = \bar{A} e^{-it} + \bar{B} e^{it}$

$\iff \forall t \in I \quad (A - \bar{B}) e^{it} + (B - \bar{A}) e^{-it} = 0$

$\underset{(t \mapsto e^{it},\, t \mapsto e^{-it}) \text{ libre}}{\iff} A = \bar{B}$

$L_2 \in \mathbb{R}$ sachant $A = \bar{B}$;

$\forall t \in \mathbb{R}$
$$(1-i) A e^{it} + (1+i) \bar{A} e^{-it} = 2 \mathrm{Re}\left((1-i) A e^{it}\right)$$

donc la condition $A = \bar{B}$ suffit pour que L_1, L_2 soient à valeurs réelles.

Finalement, en notant $A = a + ib$,

$\forall t \in I \quad \begin{cases} x(t) = 2[a \cos(t) - b \sin(t)] \\ y(t) = 2[(a+b)\cos(t) + (a-b)\sin(t)] \end{cases}$

donc $(x,y) \in \left\{ \left(\begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto k_1 \cos(t) - k_2 \sin(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (k_1 + k_2)\cos(t) + (k_1 - k_2)\sin(t) \end{vmatrix} \right) : (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

On a : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)+\sin(t) \end{pmatrix}}_{:= X_1(t)},$

$\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t)-\sin(t) \end{pmatrix}}_{:= X_2(t)}\Bigg)$

5) On montre (X_1, X_2) libre et on peut conclure car $\dim(\mathcal{Sol}(\mathcal{E}(t)))=2$.

$\left(X_1(0), X_2(0)\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ libre dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc par caractérisation des systèmes fondamentaux (X_1, X_2) est un système fondamental.

On cherche désormais une solution particulière à l'aide de la variation des constantes :

On a : $\forall t \in I$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)-\sin(t) & \sin(t) \\ -\cos(t)-\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \times B(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \tan(t) \\ -1 - \tan(t) \end{pmatrix}$$

$\forall t \in I$

donc $\begin{cases} \lambda_1 = t + \ln(|\cos(t)|) \\ \lambda_2 = -t + \ln(|\cos(t)|) \end{cases}$

puis $X_{part}(t) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \ (t)$

$$= \begin{pmatrix} \left(t + \ln(|\cos(t)|)\right)\cos(t) - \left(-t + \ln(|\cos(t)|)\right)\sin(t) \\ t + \ln(|\cos(t)|)\left(\cos(t) + \sin(t)\right) + \left(-t + \ln(|\cos(t)|)\right)\left(\cos(t) - \sin(t)\right) \end{pmatrix}$$

Raphaël Mouchonnet — colle de la semaine n° 23

__Énoncé :__

Soit $k \in \mathbb{R}$ (E_k) $xy'' + 2y' + kxy = 0$ sur $]0,+\infty[$
à l'aide du changement de fonction inconnue
$z : x \mapsto xy(x)$

__Solution :__ Si $y \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$

Alors $z \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ et
$z : x \mapsto x.y(x)$
$z' : x \mapsto x.y'(x) + y(x)$
$z'' : x \mapsto x.y''(x) + 2y'(x)$

Et
$y \in Sol(E_k) \iff z$ solution de (E_k') $z'' + kz = 0$
$|x \mapsto 0$ et $|x \mapsto k$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc (E_k') est une EDLS$_2$ de plus elle est homogène.
Par le théorème de Cauchy : (corollaire)

$\dim(Sol(E_k')) = 2$

On distingue

Si $k \neq 0$:
Remarquons que

$$\boxed{x_1 \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(\sqrt{k}t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_2 \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(\sqrt{k}t) \end{array} \right.}$$

sont solutions de (E_k').
Il suffit de montrer la liberté de (x_1, x_2).
Soit $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}$ tel que $d_1 x_1 + d_2 x_2 = 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

En particulier

$$d_1 x_1(0) + d_2 x_2(0) = d_1 = 0$$

et $d_1 x_1\left(\frac{\pi}{2\sqrt{k}}\right) + d_2 x_2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{k}}\right) = d_2 = 0$

Donc (x_1, x_2) est une base de $Sol(E_k')$ comme famille libre de 2 éléments.

Donc $Sol(E_k') = Vect(x_1, x_2)$

et $\boxed{Sol(E_k) = Vect\left(\left|\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\cos(\sqrt{k}t)}{t} \end{array}\right., \left|\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(\sqrt{k}t)}{t} \end{array}\right.\right)}$

Si $k=0$:

On remarque que $\left\{\left|\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow ax+b \end{array}\right. : (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est inclus dans $Sol(E_0')$ donc par dimension il y a égalité.

Donc $\boxed{Sol(E_0) = \left\{\left|\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow a + \frac{b}{x} \end{array}\right. : (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

Piero T. Colle de la semaine 23

Exercice 5 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E_0) : (1+t^2)x'' + 4tx' + 2x = 0$. Commencer par chercher les solutions développables en séries entières.
2. Résoudre ensuite $(E) : (1+t^2)x'' + 4tx' + 2x = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Solution :

1. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe $r > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que

$f \left| \begin{array}{l}]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array} \right.$ soit bien définie et solution de (E_0) sur $]-r, r[$.

donc $\forall t \in]-r, r[\quad (1+t^2) f''(t) + 4t f'(t) + 2f(t) = 0$

donc $\forall t \in]-r, r[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n$

$$+4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n \quad +2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

donc par unicité du développement en série entière sur $]-r, r[$:

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_0 = 0 \\ 6a_3 + 4a_1 + 2a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad (n+1)(n+2) a_{n+2} + n(n-1) a_n + 4n a_n + 2a_n = 0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_3 = -a_1 \\ \forall n \geq 2 \quad a_{n+2} = -\dfrac{(n^2+3n+2)}{(n+1)(n+2)} a_n = -a_n \end{cases}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = (-1)^n a_0$ et $a_{2n+1} = (-1)^n a_1$

donc $r \geq 1$ et $\forall t \in]-r, r[\quad f(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1}$

$$= \frac{a_0}{1+t^2} + \frac{a_1 t}{1+t^2}$$

Synthèse : Soit $x_1 \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2} \end{vmatrix}$ et $x_2 \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

x_1 est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$x_1'(t) = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$ et $x_1''(t) = \dfrac{-2(1+t^2)^2 + 8t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4} = \dfrac{6t^2-2}{(1+t^2)^3}$

donc $(1+t^2)x_1''(t) + 4t x_1'(t) + 2x_1(t) = \dfrac{6t^2-2}{(1+t^2)^2} - \dfrac{8t^2}{(1+t^2)^2} + \dfrac{2+2t^2}{(1+t^2)^2}$

$= 0$

donc x_1 est solution de (E_0).

x_2 est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$x_2'(t) = \dfrac{(1+t^2) - 2t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$

$x_2''(t) = \dfrac{-2t(1+t^2)^2 - (1-t^2)4t(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \dfrac{2t^3-6t}{(1+t^2)^3}$

donc $(1+t^2)x_2''(t) + 4t x_2'(t) + 2x_2(t) = \dfrac{2t^3-6t}{(1+t^2)^2} + \dfrac{4t-4t^3}{(1+t^2)^2} + \dfrac{2t+2t^3}{(1+t^2)^2}$

$= 0$

donc x_2 est solution de (E_0).

Soit $a_0 \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{-2}{(1+t^2)} \end{vmatrix}$ et $a_1 \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{-4t}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

$\forall y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad y \in Sol(E_0) \Longleftrightarrow y'' = a_0(t)y + a_1(t)y'$

or a_0 et a_1 sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc $Sol(E_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 2.

Preuve T. Soit $W \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t) \end{array} \right.$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$W(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^3} + \frac{2t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \neq 0$$

donc (x_1, x_2) est libre, et donc $Sol(E_0) = Vect(x_1, x_2)$.

2. Soit $b \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2} \end{array} \right.$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad y \in Sol(E) \Leftrightarrow y'' = a_0(t)y + a_1(t)y' + b(t)$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

D'après le cours :

$$\left(\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in Sol(E).$$

$$\text{donc } \left(\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{b(t)}{W(t)} \begin{pmatrix} -x_2(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in Sol(E).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\int^t -\frac{b(u)}{W(u)} x_2(u)\,du = \int^t -\frac{u}{1+u^2}\,du = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

$$\int^t \frac{b(u)}{W(u)} x_1(u)\,du = \int^t \frac{1}{1+u^2}\,du = \operatorname{Arctan}(t)$$

donc $x_{part} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{-\ln(1+t^2) + 2\operatorname{Arctan}(t)t}{1+t^2} \end{array} \right.$ est solution de (E).

donc $Sol(E) = \{ x_{part} + k_1 x_1 + k_2 x_2 \; ; \; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \}$.

Celia A

Rapport de colle.
Avant-dernière semaine :)

énoncé

$$\boxed{\text{Résoudre } y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}}$$

Solution

$a_1 : t \mapsto 4$
$a_0 : t \mapsto 4$
$b : t \mapsto \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

. Résolvons (EH) $y'' + 4y' + 4y = 0$
d'inconnu $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Posons l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_{car})$ $z^2 + 4z + 4 = 0$
d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

$\Delta : 16 - 16 = 0$. Ainsi, $Sol(\mathcal{E}_{car}) = \{-2\}$.

. Posons $X_1 : t \mapsto te^{-2t}$
$X_2 : t \mapsto e^{-2t}$

Par conséquent, $\boxed{Sol(SH) = \mathrm{Vect}(X_1, X_2).}$

Cherchons désormais une solution particulière de (E) sous la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Selon la méthode de variation des constantes, nous résolvons

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) \\ X_1'(t) & X_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi
$$\begin{pmatrix} te^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{-2t}(1-2t) & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

D'où
$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = -e^{4t} \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{-2t}(1-2t) & te^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Donc
$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{-t}{1+t^2} \end{cases}.$$

Ainsi, $\lambda_1 : t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)$ et $\lambda_2 : t \mapsto -\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$ sont solutions.

Donc $X_{part} : t \mapsto \lambda_1(t) X_1(t) + \lambda_2(t) X_2(t)$ est une solution particulière de (E).

Par conséquent,

$$\boxed{Sol(E) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto AX_1(t) + BX_2(t) + X_{part}(t) \end{array} : (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Rapport de colle semaine 23 Uta. BdN

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, monotone et de limite finie en $+\infty$.
Montrer que les solutions de l'equations différentielle $(E) : y'' + y = f$ sont bornées.

- On introduit $(EH) : y'' = -y$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ un EDLS$_2$H associé à (E).
Par le théorème de Cauchy $Sol_{(EH)}$ est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\cos''(t) = -\sin'(t) = -\cos(t)$
$\sin''(t) = \cos'(t) = -\sin(t)$

Donc cos et sin sont solutions de (EH), comme cos et sin sont linéairement indépendante $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de (EH)

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$,
Par le cours,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \text{ solution de}$$

$$(\varphi)(1) : \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\sin(t) f(t) \\ \cos(t) f(t) \end{pmatrix}$

Donc, par le théorème fondamental de l'analyse $t \mapsto -\sin(t) f(t)$, $t \mapsto \cos(t) f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ donc il existe une primitive.

Il existe une solution de (E) de la forme

$x_p : t \mapsto \int_0^t -\sin(x) f(x)\,dx \cos(t) + \int_0^t \cos(x) f(x)\,dx \sin(t)$

$= \int_0^t \sin(t-x) f(x)\,dx$

- Comme f a une limite finie en $+\infty$, $\exists y \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq y \quad |f(x) - \lim_{x \to +\infty} f(x)| \leq 1$

Donc f bornée sur $[y, +\infty[$,

De plus par le théorème des bornes atteintes f est bornées sur $[0, y]$, ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- $\forall t \in \mathbb{R} \quad x_p(t) \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \int_0^t \sin(t-x)\,dx$

$\leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}_+}(-\cos(t)) \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$

Et $\quad x_p(t) \geq -\|f\|_{\infty, \mathbb{R}_+}(-\cos(t)) \geq -\|f\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$

Donc x_p est bornée sur $\mathbb{R}_+$

- $Sol_{(E)} = x_p + Sol_{(EH)} = x_p + \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$

Donc tous éléments de $Sol_{(E)}$ sont bornée (bornées)

Tiguin, David

Colle de la semaine 23.

EXERCICE 1

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)\, y = -1.$$

Q1. — Déterminer une fonction puissance solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q2. — Déterminer une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

Q3. — Résoudre (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.

1) On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

$(-2)(-3)x^{-4} \times x^2 + 4x \times (-2)x^{-3} + (2-x^2)\, x^{-2}$

$= 6x^{-2} - 8x^{-2} + 2x^{-2} - 1$

$= -1$

Ainsi $f : x \mapsto x^{-2}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Soit $r > 0$ et $\sum a_n r^n$ série entière de rayon r

et $y \left| \begin{array}{l}]-r, r[\mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$, y est C^∞ et $\forall x \in]-r, r[$

y solution de $(E) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in]-r, r[\\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + (2-x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -1 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_0 = -1 \\ 6a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad n(n-1)a_n + 4n a_n + 2a_n - a_{n-2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad a_n(n^2 + 3n + 2) - a_{n-2} = a_n(n+1)(n+2) - a_{n-2} = 0 \end{cases}$

donc $\forall n \geq 2$

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$$

Pour a_2 :

$$a_2 = \frac{a_0}{3 \times 4} = -\frac{1}{4!}$$

Pour a_3 :

$$a_3 = \frac{a_1}{4 \times 5} = 0$$

Par récurrence immédiate on obtient :

$$\forall n \geq 0 \quad \begin{cases} a_{2n} = -\frac{1}{(2n+2)!} \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

Donc $r = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(2n+2)!} x^{2n} = \frac{-1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n!)} = -\frac{1}{x^2}\left(-1 + ch(x)\right)$$

Ainsi

$$y \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2}(-1 + ch(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

3) Montrons que f et y son linéairement indépendents :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f + \lambda_2 y = 0$

en évaluant en 1 et 2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 (ch(1) - 1) = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 (ch(2) - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 (ch(1) - 1) = 0 \\ -\lambda_2 \frac{1}{2}(ch(2) - ch(1)) = 0 \end{cases}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & ch(1)-1 \\ 0 & -\frac{1}{2}(ch(2)-ch(1)) \end{pmatrix}$ est inversible alors

$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ donc

$$Sol(EH) = Vect\left(\begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{x^2}(ch(x)-1) \end{vmatrix} \right)$$

On peut alors utiliser la méthode des variations des constantes pour trouver une solution particulière x_p

et $Sol(E, \mathbb{R}_+^*) = Sol(EH, \mathbb{R}_+^*) + x_p$

Pierre V. Colle de la semaine 23

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$: $(E)\ xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$

Résoudre (E) à l'aide du changement de fonction inconnue $z = e^{-x}y$

Solution

Analyse Soit $y = e^x z$ où $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$

Supposons y solution de (E)

$y = e^x z$, $y' = e^x(z'+z)$, $y'' = e^x(z''+2z'+z)$

Ainsi, on a z qui vérifie sur $\mathbb{R}_{>0}$

$$x\, e^x(z''+2z+z) - 2(x-1)e^x(z'+z) + (x+2)e^x z = xe^x$$

donc ($e^x>0$) $xz'' + 2z' + = x$

donc ($x>0$) $z'' + \frac{2}{x}z' = 1$

z' vérifie l'équation $(E')\ y' + \frac{2}{x}y = 1$

$a_0 : x \mapsto \frac{2}{x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et a pour primitive $A : x \mapsto 2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$

Ainsi $Sol(E'H) = Vect\left(y_H \middle| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-2\ln(x)} = \frac{1}{x^2} \end{array} \right)$

On cherche une solution de (E') sous la forme $y_P = \lambda y_H$ où $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$

y_P solution de (E') $\iff \forall x \in \mathbb{R}_{>0}\ y_P'(x) + a_0(x)y_P(x) = 1$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}_{>0}\ \lambda'(x)y_H(x) + \lambda(x)y_H'(x) + a_0(x)y_P(x) = 1$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}_{>0}\ \lambda'(x)y_H(x) = 1$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}_{>0}\ \lambda'(x) = x^2$

$\lambda : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ convient

Ainsi $y_P : x \mapsto \frac{x}{3}$ est solution de (E')

Donc $Sol(E') = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{k}{x^2} + \frac{x}{3} \end{array} : k \in \mathbb{R} \right\}$

donc $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ z'(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{x}{3}$

donc $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ z(x) = -\frac{A}{x} + \frac{x^2}{6} + B$

donc $\exists A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = e^x\left(-\frac{A}{x} + \frac{x^2}{6} + B\right)$

Synthèse : Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que

$$y \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x\left(-\frac{A}{x}+\frac{x^2}{6}+B\right) \end{array}\right.$$ est solution de (E)

$y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0},\mathbb{R})$

Soit $x\in\mathbb{R}_{>0}$

$$y(x) = e^x\left(-\frac{A}{x}+\frac{x^2}{6}+B\right)$$
$$y'(x) = e^x\left(-\frac{A}{x}+\frac{x^2}{6}+B+\frac{A}{x^2}+\frac{x}{3}\right)$$
$$y''(x) = e^x\left(-\frac{A}{x}+\frac{x^2}{6}+B+\frac{A}{x^2}+\frac{x}{3}+\frac{A}{x^2}+\frac{x}{3}-\frac{2A}{x^3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$x\,y''(x)-2(x-1)y'(x)+(x-2)y(x)$$
$$= xe^x\left(\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}x-\frac{A}{x}+\frac{2A}{x^2}-\frac{2A}{x^3}+B+\frac{1}{3}\right)$$
$$-2(x-1)e^x\left(-\frac{A}{x}+\frac{x^2}{6}+B+\frac{A}{x^2}+\frac{x}{3}\right)$$
$$(x-2)e^x\left(-\frac{A}{x}+\frac{x^2}{6}+B\right)$$
$$= e^x\Big[\cancel{x^3\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)}^{0}+\cancel{x^2\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}-\frac{2}{6}\right)}^{0}$$
$$+x\left(B+\frac{1}{3}-2B+\frac{2}{3}+B\right)$$
$$+\cancel{\frac{1}{x}\left(2A-2A-2A+2A\right)}^{0}$$
$$+\cancel{\frac{1}{x^2}\left(-2A+2A\right)}^{0}$$
$$\cancel{-A+2A+2B-A-2B}^{0}\Big]$$
$$= xe^x$$

donc $y\in \mathcal{S}ol(E)$

Ainsi

$$\mathcal{S}ol(E) = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x\left(\frac{x^2}{6}-\frac{k_1}{x}+k_2\right) \end{array}\right. : (k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

MATHEO.N

1/3

Rapport de colle semaine 23.

Exercice. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série absolument convergente de nombres réels. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que : $\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.

- Nous cherchons à résoudre

$$(\mathcal{E})\ y'' = -y + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) \quad \text{pour } y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

C'est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2, son ensemble solution $Sol_{(\mathcal{E})}$ est un sous espace affine de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ d'après le théorème de Cauchy et son ensemble solution homogène est un plan vectoriel.

- Commençons par vérifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de

$b : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$ par critère de continuité pour les série de fonctions.

$\forall n \in \mathbb{N}$: on pose : $f_n : t \longmapsto a_n \cos(nt)$ définie sur $\mathbb{R}$.

(H_1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Soit $n \in \mathbb{N}$ f_n est bornée car $\cos$ l'est sur $\mathbb{R}$ et soit $t \in \mathbb{R}$:

$|f_n(t)| = |a_n \cos(nt)| \leq |a_n| \to$ indépendant de t.

Par passage au sup et, convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} a_n$ et théorème de domination pour les séries à termes positifs :

$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ converge, $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente donc uniformément, le critère s'applique donc et b est bien continue sur $\mathbb{R}$.

$(\mathcal{E})$ est bien définie.

• Trouvons $Sol_{(EH)}$ avec : $(EH) : y'' = -y \quad ; y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

· On remarque que cos et sin sont solutions de (EH). Montrons que la famille (cos, sin) est libre, par cardinalité dimension nous aurons que c'est une base de $Sol_{(EH)}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin = 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

en évaluant à $0 \rightarrow \lambda_1 = 0$
en évaluant à $\frac{\pi}{2} \rightarrow \lambda_2 = 0$ } donc (cos, sin) est libre

donc : $Sol(EH) = Vect(\cos, \sin)$

(On peut aussi utiliser le caractère supplémentaires des ensembles des fonctions paires et impaires)

• Trouvons une solution particulière à (E) pour cela trouvons en une à (E_n) : $y'' = -y + a_n \cos(nt)$. $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ aussi linéaire scalaire d'ordre 2 avec : $f_n : t \mapsto a_n \cos(nt) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

· Tentons de trouver une solution particulière de la forme $y_n : t \mapsto c_n \cos(nt)$ avec $c_n \in \mathbb{R}$.

(A) Soit y_n une telle solution de (E_n)

on a : $y_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $y''(t) = -c_n n^2 \cos(nt)$

Comme $y_n \in Sol(E_n)$:

$$c_n(1 - n^2)\cos(nt) = a_n \cos(nt)$$

• Si $n \neq 1$: $\quad c_n = \dfrac{a_n}{1-n^2}$ semble convenir.

(S) Considérons le candidat présenté en fin d'analyse : $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

• $y_n : t \longmapsto \dfrac{a_n}{1-n^2} \cos(nt) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

• $\forall t \in \mathbb{R}$ $y_n''(t) = -a_n \dfrac{n^2}{1-n^2} \cos(nt) = a_n\left(1 - \dfrac{1}{1-n^2}\right)\cos(nt)$

Alors : soit $t \in \mathbb{R}$: $y_n''(t) + y(t) = a_n\left(1 - \frac{1}{1-n^2}\right)\cos(nt) + \frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$
$$= a_n \cos(nt)$$

donc : $y_n \in Sol(E_n)$.

MATHEO.N

2/3

- Trouvons une solution particulière dans le cas $n=1$.

$(\mathcal{E}_1) : y'' + y = a_1\cos(t) \iff y'' = -y + a_1\cos(t)$ du même type que $(\mathcal{E})$.

Résoudre $(\mathcal{E}_1)$ revient à résoudre :

$(\mathcal{S})$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_1\cos(t) \end{pmatrix}$

On pose : $\left(X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}, X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right)$ base de $Sol(\mathcal{E}_H)$

On cherche une solution particulière de la forme :

$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ pour : $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

X sol de $(\mathcal{S}) \iff \forall t \in \mathbb{R} : \quad \lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1\cos(t) \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R} : \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1\cos(t) \end{pmatrix}$

[$A = R(-t)$ donc a inversible et $A^{-1} = R(t)$] $\iff \forall t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a_1\cos(t) \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} \lambda_1'(t) = -a_1\sin(t)\cos(t) = -\frac{a_1}{2}\sin(2t) \\ \lambda_2'(t) = a_1\cos^2(t) = \frac{a_1}{2}(\cos(2t)+1) \end{cases}$

[formule de duplication]

$\Leftarrow \forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} \lambda_1(t) = \frac{a_1}{4}\cos(2t) \\ \lambda_2(t) = \frac{a_1}{4}\sin(2t) + \frac{a_1 t}{2} \end{cases}$ conviennent.

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$ $X(t) = \frac{a_1}{4}\cos(2t)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \left(\frac{a_1}{4}\sin(2t) + \frac{a_1 t}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

est solution de $(\mathcal{S})$

Ainsi : $y_1 : t \mapsto \frac{a_1}{4}\cos(2t)\cos(t) + \frac{a_1}{4}\sin(2t)\sin(t) + \frac{a_1}{2}t\sin(t)$

est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

Nous avons donc : $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in Sol(\mathcal{E}_n)$ tel que :

$$y_n = \begin{cases} \frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt) & \text{si } n \neq 1 \\ \frac{a_1}{2}(\cos^3(t) + \sin^3(t)) - \frac{a_1}{4}\cos(t) + \frac{a_1}{2}t\sin(t) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

• Montrons que $\sum_{n\geq 0} y_n$ est solution de $(\mathcal{E})$, montrons le caractère $\mathcal{C}^2$ de cette fonction (nous livrant de même son existence de cette série par critère $\mathcal{C}^2$.

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$: ~~sin~~ $y_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car cos et sin le sont.

(H2) Montrons que $\sum_{n\geq 0} y_n$ et $\sum_{\geq 0} y_n'$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

On peut supposer $n \geq 2$: soit $t \in \mathbb{R}$.

• $|y_n(t)| = \left|\frac{a_n}{1-n^2}\right||\cos(nt)| \leq \left|\frac{a_n}{n^2-1}\right| \leq |a_n| \to$ indépendant de t

(inverse décroissante sur $\mathbb{R}^+$)

Par passage au sup et convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} a_n$

on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} y_n$ convergeant normalement donc simplement sur $\mathbb{R}$.

Ainsi : $\sum_{n\geq 2} y_n$ CS sur $\mathbb{R}$ donc : $\sum_{n\geq 0} y_n$ CS vers : $y_0 + y_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} y_n$.

• $|y_n'(t)| = \left|\frac{-a_n \times n}{1-n^2}\sin(nt)\right| \leq \left|\frac{a_n \times n}{n^2-1}\right| \leq \left|\frac{a_n}{n-\frac{1}{n}}\right| \leq |a_n|$

$\underbrace{n-\frac{1}{n}}_{\geq 1}$

Donc : $\sum_{n\geq 2} y_n$ converge simplement :

Ainsi : $\sum_{n\geq 0} y_n$ CS vers : $y_0' + y_1' + \sum_{n=2}^{+\infty} y_n'$

(H3) Montrons que $\sum y_n''$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$; Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$; $t \in [-a, a]$

$|y_n''(t)| = \left|-\frac{a_n n^2}{1-n^2}\cos(nt)\right| \leq \left|a_n + \frac{a_n}{\underbrace{n^2-1}_{\geq 1}}\right|$

$\leq 2|a_n| \to$ indépendant de t

De la même manière que précédemment cela nous livre la convergence normale donc uniforme de $\sum_{n\geq 2} y_n''$

• on a pour $n=0$: $y_0(t) = \frac{a_n}{1-n^2}$ donc : $y_0''(t) = 0$.

• pour $n=1$: y_1'' est continue entre $[-a, a]$ segment donc par théorème des bornes atteintes atteint ses bornes, il existe $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $\forall t \in [-a, a] \, |y_1''(t)| \leq M$ ie : $\|y_1''\|_{\infty, [-a,a]} \leq M$.

Ainsi : $\sum_{n\geq 0} y_n''$ converge normalement donc uniformément le critère s'applique et $\sum_{n\geq 0} y_n$ est bien $\mathcal{C}^2$.

MATHEO.N

3/3

Ainsi, comme $\forall n \in \mathbb{N}$: y_n est sol de $(\mathcal{E}_n)$

Par principe de superposition nous avons que $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ est solution particulière de $(\mathcal{E})$

Ainsi : $Sol_{(\mathcal{E})} = \left\{ t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t) + \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Anaë . D

Rapport de colle S23

$E = \{ f \in \mathcal{C}^2([0,\pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \}$ espace vectoriel

$N\ f \longmapsto \|f'' + f\|_\infty \quad V : \|f''\|_\infty + \|f\|_\infty$ norme sur E

Montrer que N et V sont équivalentes

Solution :

On remarque que $N \leq V$.

On cherche $k > 0$ tel que $kV \leq N$.

On pose $g = f'' + f$ avec $f \in E$

On résout l'équation différencielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$(\mathcal{E}) \quad f'' + f = g(t)$

$(\mathcal{E}_H) \quad f'' + f = 0$

On remarque que $(\cos(t), \sin(t))$ est une base de $Sol(\mathcal{E}_H)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^2([0,\pi], \mathbb{K})$

Soit $t \in [0,\pi]$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}}_{\in SO_2(\mathbb{K}) \subset GL_2(\mathbb{K})} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0,\pi] \quad \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0,\pi] \quad \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin(t)\, g(t) \\ \lambda_2'(t) = \cos(t)\, g(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0,\pi] \quad \begin{cases} \lambda_1(t) = \int_0^t -\sin(u) g(u)\, du \\ \lambda_2(t) = \int_0^t \cos(u) g(u)\, du \end{cases}$$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc les fonctions de la forme

$$f : t \longmapsto \cos(t) \int_0^t -\sin(u) g(u)\, du + \sin(t) \int_0^t \cos(u) g(u)\, du + \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)$$

$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Or, on sait que $f(0) = f'(0) = 0$ $(f \in E)$

Donc on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ainsi $f : t \longmapsto \cos(t) \int_0^t -\sin(u) g(u)\,du + \sin(t) \int_0^t \cos(u) g(u)\,du$

$$= \int_0^t \sin(t-u) g(u)\,du$$ (linéarité de l'intégrale et formule d'addition du sinus)

Il vient donc

$$\|f\|_\infty = \left\|\int_0^t \sin(t-u) g(u)\,du\right\|_\infty \leq \pi \|f'' + f\|_\infty$$

(inégalité triangulaire)

et $\|f''\|_\infty = \|g - f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \leq \underbrace{\|g\|_\infty}_{\|f''+f\|_\infty} + \pi \|f'' + f\|_\infty = (1+\pi)\|f'' + f\|_\infty$

Finalement on a

$$\nu(f) = \|f''\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2(\pi+1)\|f''+f\|_\infty = 2(\pi+1) N(f)$$

Ainsi $\boxed{\underbrace{\frac{1}{2(\pi+1)}}_{>0} \nu(f) \leq N(f)}$

Donc ν et N sont équivalentes.

Youssef.B

Colle de la semaine 23

Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$$

Solution :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = -2(2-X) + (X-2)\left[(X-1)(X-3) - 1\right] = (X-2)^3$$

Donc 2 est l'unique valeur propre de A

On pose $N = A - 2I_3$, donc $A = N + 2I_3$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $N^3 = 0$

Donc N est une matrice nilpotente d'indice 3, et comme I_3 et N commutent :

$$e^{tA} = e^{tN} e^{t2I_3} = e^{2t}\left(e^{tN}\right) = e^{2t}\left(I_3 + N + \frac{1}{2}N^2\right)$$

on calcule :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors $e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (C_1(t), C_2(t), C_3(t))$

Donc $(C_i)_{i \in [\![1,3]\!]}$ base de $\cancel{\mathcal{B}}$ Sol(S)

Nicolas.H Colle de la semaine 23

Enoncé

Exercice 2. Résoudre $y'' + y = \cos(x)$.

Solution

$x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos(x)$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

donc $(\mathcal{E})$: $y'' = -y + \cos(x)$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2. Par théorème de Cauchy :

$Sol_{(\mathcal{E})}$ est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit $(\mathcal{E}\mathcal{H})$: $y'' = -y$, $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$(\cos, \sin)$ est un système fondamental de $Sol_{(\mathcal{E}\mathcal{H})}$.

$(\mathcal{S})$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ est un système

différentiel linéaire d'ordre 1, $\left(X_1 = \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix} ; X_2 = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \right)$

forment une base de $Sol_{(\mathcal{S}\mathcal{H})}$

Soit $(z_1, z_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$

$X = z_1 X_1 + z_2 X_2 \in Sol_{(\mathcal{S})} \iff \forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} z_1'(t) = -\sin(t)\cos(t) \\ z_2'(t) = \cos^2(t) \end{cases}$

$z_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\cos^2(t)}{2} \end{array} \right.$ et $z_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) \end{array} \right.$

donc

$\forall t \in I$, $X \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow M_{2,1}(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto \dfrac{\cos^2(t)}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4} \right) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$

est solution de $(\mathcal{Y})$

donc

$x_{part} : t \longmapsto \dfrac{\cos^3(t)}{2} + \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4} \right) \sin(t)$ est solution de $(\mathcal{E})$

Ainsi, $Sol_{(\mathcal{E})} = \left\{ x_{part} + \gamma_1 \cos + \gamma_2 \sin \ : \ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Antoine B. colle de la semaine

Trouver la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} (E) : y'' + y = e^{-|x|} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Une solution :

· $(EH) : y'' + y = 0$.

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{array} , \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{array} \right)$ système fondamentale de $Sol(EH)$.

· étudions d'abord (E) sur $\mathbb{R}_+$.

car $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-|x|} = e^{-x} \end{array} \right.$

On remarque ainsi que

$x \mapsto \frac{1}{2} e^{-x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Analyse : $y_+ \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution de ce problème de Cauchy.

$y_+ : x \mapsto \lambda_+ \cos(x) + \mu_+ \sin(x) + \frac{e^{-x}}{2}$ où $(\lambda_+, \mu_+) \in \mathbb{R}^2$.

· $y_+(0) = 0 \Rightarrow \lambda_+ = -\frac{1}{2}$.

· $y_+'(0) = 0 \Rightarrow \mu_+ = \frac{1}{2}$.

$y_+ : x \mapsto \frac{1}{2}\left(-\cos(x) + \sin(x) + e^{-x}\right)$ solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+$

Synthèse : y_+ convient.

· étudions maintenant (E) sur $\mathbb{R}_-$

Dans ce cas, on remarque que $x \mapsto e^{x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-$

Analyse : Soit $y_- : x \mapsto \lambda_- \cos(x) + \mu_- \sin(x) + e^{x}$ où $(\lambda_-, \mu_-) \in \mathbb{R}^2$ solution de (P) sur $\mathbb{R}_-$

$y_-(0) = 0$ et $y_-'(0) = 0$ implique que

$$\lambda_- = \varphi_- = -1/2 .$$

donc $y_- : x \mapsto \frac{1}{2}\left(-\cos(x) - \sin(x) + e^{x}\right)$ sol du pb de Cauchy sur $\mathbb{R}_-$.

<u>Synthèse</u> : y_- convient.

<u>sur $\mathbb{R}$</u> :

$$y : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-\cos(x) + \sin(x) + e^{-x}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(-\cos(x) - \sin(x) + e^{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_-$. $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

<u>dérivabilité en 0</u> :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} y_+'(0) = 0$$ ✓

$$\xrightarrow[x \to 0^-]{} y_-'(0) = 0$$

<u>caractère $\mathcal{C}^2$</u> :

$$\frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} y_+''(0) = 1$$ ✓

$$\xrightarrow[x \to 0^-]{} y''(0) = 1$$

Ainsi $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et vérifie (P).

Hugo D. Semaine de colle n° 23

Exercice 4. Résoudre le système différentiel suivant

$$(\mathcal{E})\begin{cases}(1+t^2)x'(t) &= tx(t) + y(t)\\(1+t^2)y'(t) &= -x(t) + ty(t).\end{cases}$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + \mathrm{i}y$.

<u>Solution</u> Soit $(x,y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$(x,y) \in \mathrm{Sol}(\mathcal{E}) \iff \forall t \in \mathbb{R}\ (1+t^2)(x'(t)+iy'(t)) = t\,x(t)+y(t) - i\,x(t) + it\,y(t)$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}\ (1+t^2)(x'(t)+iy'(t)) = (t-i)(x(t)+iy(t))$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}\quad z'(t) = \dfrac{t-i}{1+t^2}\, z(t)$

$\iff \exists a \in \mathbb{C}\ \forall t \in \mathbb{R}\quad z(t) = a\, e^{-i\mathrm{Arctan}(t) + \ln(\sqrt{1+t^2})}$

$= a\sqrt{1+t^2}\,\big(\cos(\mathrm{Arctan}(t)) - i\sin(\mathrm{Arctan}(t))\big)$

$\iff \exists a \in \mathbb{C}\ \forall t \in \mathbb{R}\quad x(t) = \mathrm{Re}(a)\sqrt{1+t^2}\cos(\mathrm{Arctan}(t)) + \mathrm{Im}(a)\sqrt{1+t^2}\sin(\mathrm{Arctan}(t))$

$y(t) = \mathrm{Im}(a)\sqrt{1+t^2}\cos(\mathrm{Arctan}(t)) - \mathrm{Re}(a)\sqrt{1+t^2}\sin(\mathrm{Arctan}(t))$

Or $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \cos(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}\quad \cos(\mathrm{Arctan}(t)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ (car $\mathrm{Arctan}(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)

Et $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \sin(t) = \tan(t)\cos(t)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}\quad \sin(\mathrm{Arctan}(t)) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Donc $\mathrm{Sol}(\mathcal{E}) = \left\{ \left(\begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto a + tb \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto b - at \end{vmatrix} \right),\ a+ib \in \mathbb{C} \right\}$

Maximilien. T. Colle Semaine 23

> $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*)$, f solution de $y'' + py = 0$, $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f \neq 0$.
> On note A les 0 de f, B les 0 de f'.
> Montrer que $A \cap B = \emptyset$, A ne possède pas de points d'accumulations que A est infini, ~~que A est dénombrable~~ et que A et B sont intercalés

Solution :

1) Supposons $\exists x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = f'(x) = 0$

alors comme $(P)\begin{cases} y'' + py = 0 \\ y(x) = 0 \\ y'(x) = 0 \end{cases}$ possède une unique solution.

il vient $f = 0$ $\lightning$.

2) Par l'absurde supposons A possède un point d'accumulation a ~~est~~
alors $\exists (a_k) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} a$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$ $\underset{\substack{\downarrow f \in \mathcal{C}^0 \\ f(a)}}{f(a_k)} = 0$ donc $f(a) = 0$

De plus $\underset{\substack{\downarrow k \to +\infty \\ f'(a)}}{\dfrac{f(a_k) - f(a)}{a_k - a}} = 0$

Ainsi $a \in A \cap B$ $\lightning$.

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ Posons $p_0 = p(x_0)$ et $x_1 = x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{p_0}}$

Posons $\phi(x) = \sqrt{p_0}(x - x_0)$ et considérons $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$g(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & \sqrt{p_0}\cos(\phi(x)) \\ f(x) & \sin(\phi(x)) \end{vmatrix} = f'(x)\sin(\phi(x)) - \sqrt{p_0}f(x)\cos(\phi(x))$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$g'(x) = f(x)\sin(\sqrt{p_0}(x - x_0))(p_0 - p(x))$$

Montrons que f s'annule sur $[x_0, x_1]$ par l'absurde supposons $f > 0$ sur $[x_0, x_1]$
alors $\forall x \in [x_0, x_1]$ $g'(x) \leq 0$ d'où g décroissante sur $[x_0, x_1]$

or $g(x_0) = -\sqrt{p_0}f(x_0) < 0$ et $g(x_1) = \sqrt{p_0}f(x_0) > 0$ ↯

Le cas $f < 0$ est analogue.
En répétant ce processus en posant $\forall k \in \mathbb{N}$ $x_{k+1} = x_k + \frac{\pi}{\sqrt{p_0}}$ il vient que A est infini.

4) Soit $(x_0, x_1) \in A^2$, $x_0 < x_1$ alors $f(x_0) = f(x_1) = 0$
~~or comme $p(x_0) \neq 0$ et $p(x_1) \neq 0$ il vient $f''(x$~~ ainsi par Rolle $\exists c \in]x_0, x_1[$ tel que $f'(c) = 0 \Rightarrow c \in B$.

Soit $(x_0, x_1) \in B^2$ $x_0 < x_1$ alors $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$
$\Rightarrow \exists c \in]x_0, x_1[$ tel que $f''(c) = 0$ or comme $p(c) \neq 0$

alors $f(c) = 0$ donc $c \in A$.

Colle de la semaine n° 23

Royon G

Enoncé: Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$E : y'' - y = \frac{2}{ch^3(x)}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - f(x) \geq \frac{2}{ch^3(x)}$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{sh^2(x)}{ch(x)}$$

Solution: $(E)\ y'' - y = \frac{2}{ch^3(x)}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$a_1 : x \mapsto 0$, $a_0 : x \mapsto 1$, $b : x \mapsto 2ch^{-3}(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et (E) se normalise sous la forme:

$$(E) \quad y'' = a_1 y' + a_0 y + b$$

C'est donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2

Dont l'équation homogène est:

$$(EH) \quad y'' = y$$

Le théorème de Cauchy nous livre que $Sol(EH)$ est un sous espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $Sol(E)$ est un sous espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On résout l'équation homogène :

ch et sh sont solution de (EH)

Montrons que (ch, sh) est une famille libre :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 ch + \lambda_2 sh = 0$

En $t \leftarrow 0$: $\lambda_1 = 0$
En $t \leftarrow 1$: $\lambda_2 = 0$

Par considération de dimension

$$Sol(E) = Vect\left(x_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ch(x) \end{array} \right., x_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto sh(x) \end{array} \right. \right)$$

On recherche désormais une solution particulière :

On applique la méthode de variation des constantes :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
On pose $x_p := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \quad \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
On introduit dans la condition :

$$(*) \quad \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0$$

$$x_p' = \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 + \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' \underset{(*)}{=} \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2'$$

$$x_p'' = \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' + \lambda_1 x_1'' + \lambda_2 x_2''$$
$$\xrightarrow[\text{solution de (EH)}]{(x_1, x_2)} \quad = \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

x_p solution de $(E) \iff \forall t \in \mathbb{R} \quad x_p''(t) - x_p(t) = b(t)$

$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda_1'(t) x_1'(t) + \lambda_2'(t) x_2'(t) = b(t)$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}}_{:= A(t)} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (+)$$

$\det(A(t)) = ch^2(t) - sh^2(t) = 1$

$$A(t)^{-1} = \begin{pmatrix} x_2'(t) & -x_2(t) \\ x_1'(t) & x_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t) & -sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t) & -sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{ch^3(t)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2sh(t)}{ch^3(t)} \\ \frac{2}{ch^2(t)} \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} \lambda_1'(t) &= -2sh(t)\, ch^{-3}(t) \\ \lambda_2'(t) &= 2 \cdot ch^{-2}(t) \end{aligned}$$

$\lambda_1 : t \mapsto ch^{-2}(t)$ conviennent
$\lambda_2 : t \mapsto 2th(t)$

et $x_p = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ solution de (E)

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$x_p(t) = \lambda_1(t) x_1(t) + \lambda_2(t) x_2(t)$$
$$= ch^{-2}(t)\, ch(t) + 2 th(t)\, sh(t)$$

$$x_p(t) = ch(t) + 2\frac{sh^2(t)}{ch(t)} = ch(t) + 2ch(t) - \frac{2}{ch(t)} = 3ch(t) - \frac{2}{ch(t)}$$

$(sh^2(t) = ch^2(t) - 1)$ Ainsi $Sol(E) = Sol(EH) + x_p$

Désormais on souhaite établir le second résultat sur f

On pose $g := f'' - f$

et on considère l'équation différentielle

(γ) $y'' - y = g$

On remarque (γ) respecte les mêmes propriétés que (E) avec h qui est remplacé par g.

De plus, f respecte l'équation différentielle (γ) et $Sol(\gamma H) = Sol(EH) = Vect(x_1, x_2)$

On cherche une solution particulière de (γ) :

De manière analogue à précédemment

x_p solution de (γ) $\iff$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t) & -sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$

où $x_p = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ comme précédemment

$\lambda_1 : t \mapsto -\int_0^t sh(u)\, g(u)\, du$
$\lambda_2 : t \mapsto \int_0^t ch(u)\, g(u)\, du$

$x_p(t) = -ch(t)\int_0^t sh(u)\, g(u)\, du + sh(t)\int_0^t ch(u)\, g(u)\, du$

f est donc de la forme :

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad f(t) = a\,ch(t) + b\,sh(t) - ch(t)\int_0^t sh(u) g(u)\, du + sh(t)\int_0^t ch(u)\, g(u)\, du$$

$f(0)=0$ donne $a=0$

De plus

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad f'(t) = b\,ch(t) - sh(t)\int_0^t sh(t) g(t)\, dt - ch(t)\, sh(t)\, g(t) + sh(t)\int_0^t ch(t) g(t)\, dt + sh(t)\, ch(0)\, g(t) + sh(t)(-ch(0) g(0))$$

Donc $f'(0)=0$ donne $b=0$

Donc

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad f(t) = \int_0^t \big(sh(t)\,ch(u) - sh(u)\,ch(t)\big)\, \overset{g(u)}{\vee}\, du$$

$$f(t) = \int_0^t sh(t-u)\, g(u)\, du$$

Si $t\geq 0$: $f(t) = \int_0^t \underbrace{sh(t-u)}_{\geq 0}\, \overset{\geq 0}{\overline{g(u)}}\, du \quad (ch \geq 0)$

$$\geq \int_0^t \frac{sh(t-u)}{ch^3(u)}\, du$$

$$= \int_0^t \left(\frac{2sh(t)\,ch(u)}{ch^3(u)} - \frac{2ch(t)\,sh(u)}{ch^3(u)}\right) \cancel{g}\, du$$

$\cancel{= \int_0^t}$

$$= sh(t)\, th(t) + ch(t) \times \left[-\tfrac{\cancel{1}}{\cancel{2}} ch^{-2}(u)\right]_0^t$$

$$= 2\frac{sh^2(t)}{ch(t)} - \tfrac{\cancel{1}}{\cancel{2}} ch(t) + \tfrac{\cancel{1}}{\cancel{4}}\, \tfrac{1}{2}(ch(t))^{-1}$$

$$= \frac{sh^2(t)}{ch(t)} + \frac{ch^2(t)-1}{ch(t)} - (ch^2(t)-1)\frac{1}{ch(t)}$$

$$f(t) \geq \frac{sh^2(t)}{ch(t)}$$

Si $t<0$: On pose $v=-u$

$$f(t) = -\int_0^{|t|} sh(t+v)\, g(v)\, dv$$

$$= \int_0^{|t|} \underbrace{\overbrace{sh(-t-v)}^{\geq 0}}_{\geq 0} \overbrace{g(v)}^{\geq 0}\, dv$$

$$\geq \int_0^{|t|} 2\frac{sh(-t-v)}{ch^3(v)}\, dv$$

On retrouve alors de manière analogue :

$$f(t) \geq \frac{sh^2(t)}{ch(t)}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) \geq \frac{sh^2(t)}{ch(t)}$$

Louis B Colle de la semaine 23

$$(\mathcal{E}) \quad ty'' + 3y' - 4t^3 y = 0$$

1) Déterminer une solution y_1 de $(\mathcal{E})$ non nulle et développable en SE au voisinage de 0

2) Déterminer le rayon de CV de la série entière associée à y_1, puis exprimer y_1 à l'aide de fonctions usuelles.

3) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$

---

1) A Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Considérons la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $r > 0$

Soit $f \Big| \begin{array}{l}]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n \end{array}$ tq $f \in Sol(\mathcal{E})$

$\forall t \in]-r,r[$

- $t f''(t) = t\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n t^{n-2}$

$$= \sum_{n\geq 0} n(n+1) a_{n+1} t^n$$

- $3f'(t) = \sum_{n\geq 0} 3(n+1) a_{n+1} t^n$

- $4t^3 f(t) = \sum_{n\geq 3} 4 a_{n-3} t^n$

Alors on a

$$\sum_{n\geq 0} n(n+1) a_{n+1} t^n + \sum_{n\geq 0} 3(n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n\geq 3} 4a_{n-3} t^n = 0$$

Ce qui nous livre pour n allant de 0 à 2

$$0 = 3a_1 \Rightarrow a_1 = 0$$
$$0 = 6a_2 + 2a_2 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$0 = 9a_3 + 6a_3 \Rightarrow a_3 = 0$$

et $\forall n \geq 3 \quad a_{n+1} = \frac{4\, a_{n-3}}{(n+1)(n+3)}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+4} = \frac{4 a_n}{(n+4)(n+6)}$

Par un raisonnement par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{4n} = \frac{2 \times 4^n a_0}{\prod_{i=1}^{2n+1} (2i)} = a_0 \frac{4^n}{2^{2n}(2n+1)!}$$

$$= a_0 \frac{1}{(2n+1)!}$$

Donc $r = +\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} a_{4n} t^{4n}$$

$$= a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} t^{4n}$$

$$= a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{t^2}$$

$$= a_0 \frac{sh(t^2)}{t^2} \quad , \quad a_0 \in \mathbb{R}$$