Énoncé : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Montrer que la va $Y = \frac{1}{1+X}$ admet une espérance et la calculer

Solution : · Déterminer l'espérance de Y reviens à déterminer si

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} |y| P(Y=y) < \infty$$

Introduisons la fonction $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1+x} \end{array} \right.$ bien définie.

Grâce au <u>théorème de transfert</u>, la question reviens à déterminer si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \left| \frac{1}{1+x} \right| P(X=x) < \infty$$

· Comme $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$

· Calculons alors : $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+n} P(X=n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1+n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ $\quad [X \sim \mathcal{P}(\lambda)]$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \quad [\text{Changement d'indice}]$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\lambda^{n-1}}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!}}_{e^{\lambda} - 1} \quad [\text{Serie usuelle} + e^0 = 1]$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Ainsi, ce calcul nous livre directement que Y admet une espérance ainsi que sa valeur, tel que :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}}$$

Rapport de Colle, semaine n° 21

Wassim

M.

Exercice : Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$

1) Décomposer en éléments simples $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

2) Calculer λ

3) Prouver que X admet une espérance puis la calculer

4) X admet-elle une variance ? justifier

Solution :

1) $R(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+1)}$

2) $(P(X=n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilités

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)} = 1$ Soit $N \in \mathbb{N}$

or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)}$

(telescopage)

donc $\displaystyle\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4}$ ainsi $\lambda = 4$

3) X est positive donc admet une espérance sur $[0,+\infty]$

$\displaystyle E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 4\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle = 2 - \frac{4}{n+2}$

d'où $X \in L^1$ $E(X) = 2$

4) de même $E(X^2)$ existe dans $[0, +\infty]$

$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$

or $\frac{4n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{4}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

donc $\sum_{n \geq 1} n^2 P(X=n)$ diverge donc $E(X^2) = +\infty$ et

$X \notin L^2$

Stanislas G

Enoncé : Soit $(Y, \mathcal{A})$ un espace probabilisable
X un ensemble et $f : X \longrightarrow Y$ une application
$f^{-1}(\mathcal{A})$ est une tribu de X ? sachant que $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$

Solution :

Montrons que :

① $\emptyset \in f^{-1}(\mathcal{A})$
② I ensemble dénombrable $(A_i)_{i \in I} \in f^{-1}(\mathcal{A})^I$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in f^{-1}(\mathcal{A})$
③ $A \in f^{-1}(\mathcal{A})$ alors $\overline{A} \in f^{-1}(\mathcal{A})$

① $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ donc $\emptyset \in f^{-1}(\mathcal{A})$

② Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in f^{-1}(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists B_n \in \mathcal{A} \quad A_n = f^{-1}(B_n)$.

Comme $\mathcal{A}$ stable par réunion dénombrable alors

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ donc $f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \in f^{-1}(\mathcal{A})$

Or $f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$ donc

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in f^{-1}(\mathcal{A})$

donc $f^{-1}(\mathcal{A})$ stable par union dénombrable

③ Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{A})$

$\exists B \in \mathcal{A}$ tel que $A = f^{-1}(B)$

Comme $\mathcal{A}$ est une tribu $\overline{B} \in \mathcal{A}$

donc $f^{-1}(\overline{B}) \in f^{-1}(\mathcal{A})$

Comme $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ alors

$\overline{f^{-1}(B)} \in f^{-1}(\mathcal{A})$

donc $f^{-1}(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire

$\boxed{\text{Donc } f^{-1}(\mathcal{A}) \text{ est une tribu de } X}$

Raphaël Mouchonnet : colle semaine n° 21

Enoncé : Soit $p \in]0,1[$, X variable aléatoire tel que
- X est à valeur dans $\mathbb{N}$
- $X \sim \mathcal{G}(p)$

Soit Y variable aléatoire tel que

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \equiv 0 [2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Valeur et espérance de Y.

Solution : Remarquons que Y est à valeurs dans $\mathbb{N} \subset [0,+\infty[$ et que

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $(Y=k) = (X=2k)$ et

$$(Y=0) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (X=2k+1)$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(Y=k) = p(1-p)^{2k-1}$

et par sigma additivité $P(Y=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(\underbrace{1-p}_{\in]0,1[})^{2k}$

$= \frac{1}{2-p}$

Espérance :

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\, P(Y=y)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} m\, p(1-p)^{2n-1}$$

$$= p(1-p) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} m\left(\underbrace{(1-p)^2}_{\in]0,1[}\right)^{m-1}$$

On reconnait la dérivé de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ évaluée en $(1-p)^2$

Soit $f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{1}{1-x} \end{array} \right.$ dérivable sur $]-1,1[$

et $f' \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{array} \right.$ tel que

$$E(Y) = p(1-p)\, f'((1-p)^2)$$

$$\boxed{= \frac{(1-p)}{p\,(2-p)^2}}$$

Nicolas H Colle de la semaine 21

Énoncé

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soient $s > 1$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{\zeta(s)\, n^s}.$$

Pour tout nombre $p \in \mathcal{P}$, on note X_p l'indicatrice de l'événement $(p \mid N)$.

Démontrer que les variables X_p, où $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendantes.

Solution.

Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $a \wedge b = 1$.

Notons X_a et X_b les évènements $(a \mid N)$ et $(b \mid N)$.

Montrons que $P(X_a \cap X_b) = P(X_a)\, P(X_b)$ ⊛

- Les évènements X_a et X_b ne sont pas négligeables
- $P(X_a \mid X_b) = \dfrac{P(X_a \cap X_b)}{P(X_b)}$
- $P(X_a \mid X_b) = P((a \mid N) \mid (b \mid N))$

$= P(a \mid Nb)$

$= P(a \mid N)$

Gauß, $a \wedge b = 1$

Donc $P(X_a \cap X_b) = P(X_a)\, P(X_b)$.

Soit $J \subset \mathcal{P}$ tel que $|J| < +\infty$.

Montrons que $P(\bigcap_{j \in J} (j \mid N)) = \prod_{j \in J} P(j \mid N)$.

Par récurrence

$\mathcal{P}(n) =$ " $P(\bigcap_{j \in J} (j \mid N)) = \prod_{j \in J} (P(j \mid N))$, $|J| = n$ "

- Initialisation :

$\mathcal{P}(n=1)$ est vrai.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Numérotons les éléments de J : $J = \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$

$P(\bigcap_{j \in J} (j \mid N)) = P(\bigcap_{j \in J \setminus \{p_{n+1}\}} (j \mid N) \cap (p_{n+1} \mid N))$

Car les nombres premiers sont 2 à 2 premiers entre eux, $\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{p_{n+1}\}}(j\,\mathbb{N})\right) = (p_1\times\dots\times p_n\,\mathbb{N})$.

Par ⊛, nous obtenons

$$P\left(\bigcap_{j\in J}(j\,\mathbb{N})\right) = P\left(\bigcap_{j\in I\setminus\{p_{n+1}\}}(j\,\mathbb{N})\right)\times P(p_{n+1}\,\mathbb{N})$$

Puis, par hypothèse de récurrence

$$P\left(\bigcap_{j\in I}(j\,\mathbb{N})\right) = \prod_{j\in I} P(j\,\mathbb{N})$$

Conclusion : par axiome de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vrai pour un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

Donc les variables $X_p, p\in\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendantes

Celia A. Rapport de colle

énoncé

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$.
Posons
$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} : X_n = X_{n-1} = 1\}$$
Démontrer que T est presque fini.

cf TD 15.9.

Solution

Montrons que
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}} (X_n = 1 \cap X_{n-1} = 1) \text{ est presque sûr.}$$

Comme $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (X_{2n} = 1 \cap X_{2n-1} = 1) \subset A$, il suffit de montrer que $\overline{B}$ est négligeable.

$$\overline{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (X_{2n} = 0 \cup X_{2n-1} = 0)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(X_{2n} = 0 \cup X_{2n-1} = 0)$$
$$= P(X_{2n} = 0) + P(X_{2n-1} = 0) - P(X_{2n} = 0 \cap X_{2n-1} = 0)$$
$(X_{2n} \perp\!\!\!\perp X_{2n-1})$
$$= (1-p) + (1-p) - (1-p)^2$$
$$= 1 - p^2.$$

Par lemme des coalitions, avec $N \in \mathbb{N}^*$,
$$P(\overline{B}_N) = \prod_{n=1}^{N} (1-p^2) = (1-p^2)^N.$$

Selon le corollaire de la continuité décroissante d'une probabilité,

$P(\overline{B}) = 0 \qquad (1-p^2 \in]0,1[)$

Ainsi, $\overline{B}$ est négligeable, ce qui nous permet de conclure.

$\boxed{T \text{ est presque fini}}$

Louis B   Colle de la semaine 21

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers
Soit $s>1$ et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tq
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(N=n) = \dfrac{1}{\zeta(s) n^s}$

$\forall p \in \mathcal{P}$, on note X_p la v.a. indicatrice de l'événement $(p|N)$ ("p divise N")

Démontrer que les variables X_p, $p \in \mathcal{P}$ sont mutuellement indépendantes

---

- Montrons d'abord que $\forall (p_1,p_2) \in \mathcal{P}^2, \forall n \in \mathbb{N}$

$$p_1 | n \text{ et } p_2 | n \iff p_1 p_2 | n$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(q_1, \dots, q_r) \in \mathcal{P}^r$
$(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$
tq $n = \prod_{k=1}^{r} q_k^{m_k}$ (thm fondamental arithmétique)

Comme p_1 / n, $\exists\, i \in [\![1,r]\!] : p_1 = q_i$
Comme $p_2 | n$, $\exists\, j \in [\![1,r]\!] : p_2 = q_j$

Alors $n = p_1 \times p_2 \times \underbrace{q_i^{m_i - 1} \times q_j^{m_j-1} \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{r} q_k^{m_k}}_{\in \mathbb{N}}$

Alors $p_1 p_2 | n$

$\boxed{\Leftarrow}$ $p_1 p_2 | n \Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{N} : p_1 p_2 d = n$
$\Rightarrow p_1 | n$ et $p_2 | n$ $\square$

On en déduit donc que, $\forall (p_1, p_2) \in \mathcal{P}^2$,

$$p_1 \neq p_2 \quad , (p_1 | N, p_2 | N) = (p_1 p_2 | N)$$

Cela traite l'initialisation de la propriété $\forall r \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$ $\mathcal{P}(r) =$ " $\forall (p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$, deux à deux distincts $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $p_i | n \iff \prod_{i=1}^{r} p_i | n$ ".

(H) Supposons $\mathcal{P}(r)$ vrai $\forall r \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$

Soit $(p_1, \dots, p_{r+1}) \in \mathcal{P}^{r+1}$, 2 à 2 distincts

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\forall i \in [\![1, r+1]\!]$ $p_i | n$

Comme $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $p_i | n$ par HR on a

$\prod_{i=1}^{r} p_i | n$

puis par (I) on a $\prod_{i=1}^{r+1} p_i | n$

$\boxed{\Leftarrow}$ identique à l'initialisation

Donc $\forall (p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$, 2 à 2 distincts

$$(p_1 | N, \dots, p_r | N) = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i | N\right)$$

- Comme $\forall p \in \mathcal{P}$, X_p est l'indicatrice de $(p | N)$, on en déduit que $\forall (p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$ deux à deux distincts,

$$P(X_{p_1} = 1, \dots, X_{p_r} = 1) = \prod_{i=1}^{r} P(X_{p_i} = 1)$$

i.e. les évènements $(X_{p_1} = 1), \dots, (X_{p_r} = 1)$ sont indépendants.

Comme $\forall p \in \mathcal{P}$ X_p prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, elle suit une loi de Bernoulli.

et $\overline{(X_p = 1)} = (X_p = 0)$ donc par propriété sur les évènements contraires d'évènements indépendants :

Louis B

$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0, 1\}^r$

$\forall (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{P}^r$ deux à deux distincts

Les évenements $(X_{p_1} = \varepsilon_1), \dots, (X_{p_r} = \varepsilon_r)$ sont indépendants

et donc les variables X_p sont mutulement indépendantes

Sophie G

Exercice 11. ccp97

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y)=(j,k)\right)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Solution

1) Soit $k\in\mathbb{N}$ $\left((X,Y)=(j,k)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ forme un système quasi complet d'évènements

$$P(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}P\left((X,Y)=(j,k)\right)$$

(Formule des probabilités totales)

$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\,j!\,k!}$$

$$=\frac{1}{k!\,e}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{j!}+\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{j!}$$

$$=\frac{1}{e\,k!}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\underbrace{\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}}_{e^{1/2}}+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}}_{e^{1/2}}\right)$$

$l=j-1$

$$=\frac{1}{e\,k!}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}e^{1/2}+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}e^{1/2}\right)$$

$$=\boxed{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{e^{1/2}\,k!}+\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{e^{1/2}\,k!}=P(Y=k)}$$

X et Y jouent des rôles symétriques :

$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}\quad P(X=j)=\frac{\left(\frac{1}{2}+j\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{e}}}$$

$P((X=0)\cap(Y=0))=0$ Or $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$

donc $\boxed{\text{X et Y ne sont pas indépendantes}}$

2) 2^{X+Y} : $\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+\\ \omega\mapsto 2^{X(\omega)+Y(\omega)}\end{array}$ est une variable aléatoire à valeur positive donc

$\boxed{2^{X+Y}\text{ est } L^1}$

Par la formule de transfert

$$E(2^{X+Y}) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{j+k}{e\,j!\,k!} = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{j}{e\,j!\,k!} + \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{k}{e\,j!\,k!}$$

deux quantités égales par symétrie des rôles joués par j et k.

$$= 2\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{j}{e\,j!\,k!}$$

(somme sur un rectangle)

(Par le théorème de Fubini positif)

$$= \frac{2}{e}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!}\right)\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)}_{e}$$

$$= 2\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} = 2e$$

$$\boxed{E(2^{X+Y}) = 2e}$$

Antoine B. colle de la semaine 21.

Exercice 3 : On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilités $p \in]0, 1[$ de tomber sur pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la seconde série. Par exemple les successions de lancers PPFFFP... correspond à $X = 2$ et $Y = 3$.
De même FPFF... correspond à $X = 1$ et $Y = 1$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Calculer les espérances de X et de Y et les comparer.

An

Une solution: posons $Z := (X, Y)$

. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on introduit B_i la variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. valant 1 si le $i$ème lancé donne pile 0 si le $i$ème lancé donne face.

1.

. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $(X = n, Y = m) = (B_1 = 1, \dots, B_n = 1, B_{n+1} = 0, \dots, B_{n+m} = 0, B_{n+m+1} = 1)$

$\sqcup (B_1 = 0, \dots, B_n = 0, B_{n+1} = 1, \dots, B_{n+m} = 1, B_{n+m+1} = 0)$

d'où $P(X = n, Y = m) = p^n \cdot (1-p)^m p + (1-p)^n p^m (1-p)$

(les B_i sont indépendants)

$$= \underline{\underline{p^{n+1}(1-p)^m + (1-p)^{n+1} p^m}}$$

2. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$P(X = n) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} P(X = n, Y = m) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} p^{n+1}(1-p)^m + (1-p)^{n+1} p^m$

(formule des lois marginales) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} p^{n+1}(1-p)^m + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} (1-p)^{n+1} p^m$$

$$= p^{n+1}(1-p) \sum_{m \in \mathbb{N}} (1-p)^m + (1-p)^{n+1} p \sum_{m \in \mathbb{N}} p^m$$

$$= \underline{\underline{p^n (1-p) + (1-p)^n p}}$$

- $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y=m) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(X=n, Y=m)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p^{m+1}(1-p)^{m} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (1-p)^{n+1} p^{m}$$

$$= (1-p)^m p^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n + (1-p)^2 p^m \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^m$$

$$= \underline{\underline{p^2 (1-p)^{m-1} + (1-p)^2 p^{m-1}}}$$

- (théorème de transfert) $|n| = n$

X a une espérance finie $\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |n| P(X=n) < +\infty$

or $$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n P(X=n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\, p^n (1-p) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\, p (1-p)^n$$

$$= (1-p)p \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\, p^{n-1}}_{\text{série entière dérivée de } \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n} + (1-p)p \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n (1-p)^{n-1}}_{= \frac{d}{dp} \frac{-1}{1-(1-p)}}$$

comme $p \in]0,1[$, on a : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n p^{n-1} = \frac{d}{dp} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{(1-p)^2}$

$$= \underline{\underline{\frac{p}{1-p} + \frac{(1-p)}{p}}} < +\infty$$

Par théorème de transfert on obtient que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{(1-p)}{p}$.

- On procède de manière analogue pour obtenir
$$E(Y) = p^2 \sum_{m \in \mathbb{N}^*} m (1-p)^{m-1} + (1-p)^2 \sum_{m \in \mathbb{N}^*} p^{m-1} = \underline{\underline{2}}$$

3. si $p = 1/2$, on a $E(X) = E(Y) = 2$.
sinon : montrons que $E(X) > E(Y)$.

$$E(X) - E(Y) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 2 = \frac{p^2 + p^2 + 1 - 2p - 2(1-p)p}{(1-p)p}$$

$$= \frac{4p^2 + 1 - 4p}{(1-p)p} = \frac{(2p-1)^2}{(1-p)p} > 0$$

Hugo D. Colle de la semaine 21

Exercice 1 : Un joueur dispose de N dés équilibrés où N est un entier naturel non nul. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de six obtenus. Il met de côtés les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de six obtenus au deuxième lancer et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$.
La variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ correspond au nombre de six obtenus après n lancers.

1. Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.
3. On définit la variable aléatoire $T = \min(\{n \in \mathbb{N}^*, S_n = N\} \cup \{+\infty\})$.
   Déterminer la loi de T.

Solution :

1) On montre $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$: " $S_n \sim \mathcal{B}(N, p_n)$ et $p_n \neq 1$ " par récurrence

(I) Le premier lancer est une expérience de Bernoulli classique.
$S_1 = X_1 \sim \mathcal{B}(N, p_1)$ où $p_1 := p := \frac{1}{6}$.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai

- $S_{n+1}(\Omega) = [\![0, N]\!]$
- Soit $k \in [\![0, N]\!]$

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{l=0}^{N} P(S_{n+1} = k, S_n = l) \quad \text{(Formule des probabilités totales)}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} P(S_n + X_{n+1} = k \mid S_n = l)\, P(S_n = l)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} P(X_{n+1} = k - l \mid S_n = l)\, P(S_n = l)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{N-l}{k-l} p^{k-l} (1-p)^{N-k} \binom{N}{l} p_n^{\,l} (1-p_n)^{N-l}$$

$$= \binom{N}{k} p^{k} (1-p)^{N-k} (1-p_n)^{N} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \left(\frac{p_n}{p(1-p_n)}\right)^{l}$$

$$= \binom{N}{k} \left(p \left(\frac{p_n}{p(1-p_n)} + 1\right)\right)^{k} (1-p_n)^{N} = \binom{N}{k} \big(p_n + p(1-p_n)\big)^{k} \big((1-p)(1-p_n)\big)^{N-k}$$

Donc $S_{n+1} \sim \mathcal{B}(N, p_{n+1})$ où $p_{n+1} = p_n(1-p) + p \neq 1$ sinon $p_n = 1$.

On a ainsi établi : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \sim \mathcal{B}(N, p_n)$ où $p_{n+1} = p_n(1-p) + p$
et $p_1 = p = \frac{1}{6}$

- On remarque que $1 = 1 \times (1-p) + p$
- On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = p_n - 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_{n+1} = p_{n+1} - 1 = p_n(1-p) - (1-p)$
$= (1-p)(p_n - 1) = (1-p) v_n$
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = v_1 (1-p)^{n-1}$ avec $v_1 = p_1 - 1 = -\frac{5}{6}$
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = v_n + 1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

2) On note A l'évènement en question.
- On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = (S_n = N)$
- On a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

- Or $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite croissante d'évènements pour l'inclusion (*)
- Donc $P(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P(A)$

$$\begin{array}{c} P(A_n) \\ \| \\ \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N \end{array} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Par unicité de la limite $P(A) = 1$

3) - $P(T = +\infty) = 0$ par 2)
- $P(T = 1) = \frac{1}{6^N}$

- Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $\quad P(T \leq n) = P(A_n)$ par (*)
$(T = n) \sqcup (T \leq n-1) = (T \leq n)$
Donc $P(T = n) = P(A_n) - P(A_{n-1}) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N$

Léa N.

Colle de la semaine n° : 21

Énoncé :

Exercice 4 : On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $1-p$ d'échouer, $p \in]0,1[$.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à l'obtention de m succès. On note T_m la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1. Reconnaître la loi de T_1.
2. Déterminer le loi de T_m pour $m \in \mathbb{N}^*$.
3. Développer en série entière la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^m}$.
4. Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire l'espérance de T_m.

Léa

Solution :

1) T_1 est la variable aléatoire qui détermine le rang du premier succès. Donc T_1 suit la loi géométrique de paramètre p.

2) On remarque que $T_m(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq m}$

On pose pour tout $i \in \mathbb{N}_{\geq m}$ X_i la variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit $k \in \mathbb{N}_{\geq m}$ $(T_m = k) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} X_i = m-1\right) \cap (X_k = 1)$

Donc $P(T_m = k) = P\left(\sum_{i=0}^{k-1} X_i = m-1, X_k = 1\right)$

$= P\left(\sum_{i=0}^{k-1} X_i = m-1\right) \underbrace{P(X_k = 1)}_{p}$

$$\boxed{P(T_m = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}}$$

3) $t \longmapsto \frac{1}{(1-t)^m}$

On sait que $x \longmapsto (1+x)^{-m}$ est développable en série entière et sa série est de rayon 1.

Donc $\forall t \in]-1, 1[$

$$\frac{1}{(1-t)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (-m-k)}{n!} (-1)^n t^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (m+k)}{n!} (t)^n$$

Or $\prod_{k=0}^{n-1} m+k = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$

Donc $\frac{\prod_{k=0}^{n-1} m+k}{n!} = \binom{m-1+n}{m-1}$

alors $$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{(1-t)^m} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{m-1+n}{m-1} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m-1+n}{m-1} t^n\end{aligned}}$$

4) $G_{T_m} : t \longmapsto \sum_{k \geq m} P(T_m = k) t^k$

Soit $t \in [-1, 1]$

$$G_{T_m}(t) = \sum_{k \geq m} P(T_m = k) t^k$$

$$= \sum_{k \geq m} \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} t^k$$

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{m-1} p^m (1-p)^n t^{n+m}$$

$$= p^m \times t^m \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{m-1} (1-p)^n t^n$$

$$= p^m t^m \frac{1}{(1-(1-p)t)^m} \quad (Q.3)$$

$\boxed{G_{T_m}(t) = \dfrac{p^m t^m}{(1-(1-p)t)^m}}$, alors G_{T_m} est dérivable et

$\forall t \in [-1, 1]$

$$G'_{T_m}(t) = \frac{m p^m t^{m-1} (1-(1-p)t)^m + p^m t^m (1-p) m (1-(1-p)t)^{m-1}}{(1-(1-p)t)^{2m}}$$

$$= \frac{m p^m t^{m-1} (1-(1-p)t + t(1-p))}{(1-(1-p)t)^{m+1}}$$

$$= \frac{m p^m t^{m-1}}{(1-(1-p)t)^{m+1}}$$

Alors $G'_{T_m}(1) = \dfrac{m p^m}{(1-1+p)^{m+1}} = \dfrac{m}{p}$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_m \text{ a une espérance finie et } E(T_m) = \frac{m}{p}}$$

Titouan D

Rapport de colle semaine 21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Une personne habitant dans un immeuble à n étage a perdu son parapluie. La probabilité que le parapluie soit dans l'immeuble est de $p \in]0;1[$ et la probabilité qu'il se situe à chaque étage est la même.

Sachant que la personne a déjà visité les $n-1$ premiers étages, quelle est la probabilité que le parapluie soit au nième étage ?

On note A : "Le parapluie est dans l'immeuble"

$$p(A) = p$$

pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note E_i : "le parapluie est au ième étage"

On veut calculer $P(E_n \mid \overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}}) = \dfrac{P(E_n \cap (\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}}))}{P(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}})}$

Si le parapluie est à un étage, il n'est pas à un autre.

Ainsi $P(E_n \cap \overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}}) = P(\text{le parapluie est au nième étage et n'est pas aux autres})$

$$= P(E_n)$$

$$= \frac{p}{n}$$

$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]$ tel que $i \neq j$ $\quad P(E_i \cap E_j) = 0$

donc par σ-additivité $\quad P(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}}) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i)$

$$= 1 - (n-1)\frac{p}{n}$$

ainsi $P(E_n \mid \overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}}) = \dfrac{\frac{p}{n}}{1-(n-1)\frac{p}{n}} = \dfrac{1}{\frac{n}{p} + 1 - n}$

La probabilité que le parapluie soit au nième étage quand il n'est pas aux $(n-1)$ premiers est de $\boxed{\dfrac{1}{\frac{n}{p}+1-n}}$

Louis D. Semaine de colle n°

Enoncé :

Soit $\theta > 0$, $\varepsilon > 0$, $p \in]0,1[$, $q = 1-p$

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de va, toutes définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivantes toutes la loi $\mathcal{B}(p)$.

On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_i$

1) Etablir $P(S_n - p \geq \varepsilon) = P(e^{n\theta S_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)})$

2) Mq : $P(S_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^{\theta}+q) - \theta(p+\varepsilon))}$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Mq : $(S_n \geq \varepsilon + p) = (e^{n\theta S_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)})$

$\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in (S_n \geq \varepsilon + p)$

Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_i(\omega) \geq \varepsilon + p$

donc $n\theta\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_i(\omega) \geq n\theta(\varepsilon+p)$ $(n\theta > 0)$

puis $e^{n\theta S_n(\omega)} \geq e^{n\theta(\varepsilon+p)}$ (exp $\nearrow$)

et $\omega \in (e^{n\theta S_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)})$

$\boxed{\supset}$ analogue avec ln $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_{>0}$

2) Mq : $e^{n\theta(p+\varepsilon)} \underbrace{P(S_n - p \geq \varepsilon)}_{\text{par Q1, } P(e^{n\theta S_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)})} \leq \underbrace{e^{n\ln(pe^{\theta}+q)}}_{(pe^{\theta}+q)^n}$

Comme $e^{n\theta S_n} \geq 0$ et $e^{n\theta(p+\varepsilon)} > 0$

l'inégalité de Markov livre

$$e^{n\theta(p+\varepsilon)} P(e^{n\theta S_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)}) \leq E(e^{n\theta S_n})$$

Par formule de transfert :

$$E(e^{n\theta S_n}) = \sum_{k=0}^{n} (e^{\theta})^k P(n S_n = k)$$

$$= G_{nS_n}(e^{\theta})$$

$$= (1-p+pe^{\theta})^n \quad (nS_n \sim \mathcal{B}(n,p))$$

$$= (pe^{\theta}+q)^n$$

Et le résultat est démontré.

Eliott S.V. — Semaine 21

Enoncé :

> Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ tels que :
>
> $$\forall k \in \mathbb{N},\quad P(X=k) = a\binom{n+k}{k} p^k.$$
>
> 1) Déterminer G_X puis a.
>
> 2) En déduire l'espérance et la variance de X.

Solution :

Indication : G_X est de la forme $t \longmapsto a \dfrac{1}{(1-pt)^{n+1}}$

1) Soit $x \in]-1,1[$. $\displaystyle (1-x)^{-(n+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1} (-(n+1))-j\right)(-x)^k$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1} n+1+j\right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times \frac{1}{n!} \times (n+1+k-1)!\, x^k.$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} x^k.$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{k!\,(n+k-k)!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^k.$$

Donc $x \leftarrow pt$ livre : $\left(t \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[,\ \frac{1}{p} > 1\right)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,t^k = a\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} (pt)^k = \frac{a}{(1-pt)^{n+1}}$$

Donc $\forall t \in]-1/p, 1/p[$, $\boxed{G_X(t) = \dfrac{a}{(1-pt)^{n+1}}}$

$G_X(1) = 1 \implies \boxed{a = (1-p)^{n+1}}$

21 $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

$\forall t \in]-1/p, 1/p[, \quad G'_X(t) = (1-p)^{n+1} \times \dfrac{(n+1)p}{(1-pt)^{n+2}}$

$$G_X'(1) = \boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{(n+1)p}{1-p}}$$

$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$. $\qquad (*)$

$\forall t \in]-1/p, 1/p[, \quad G''_X(t) = (1-p)^{n+1} \dfrac{(n+1)(n+2)p^2}{(1-pt)^{n+3}}$

$$G_X''(1) = \frac{(n+1)(n+2)p^2}{(1-p)^2}$$

Donc $\quad \mathbb{V}(X) = \dfrac{(n+1)(n+2)p^2}{(1-p)^2} + \dfrac{(n+1)p}{1-p} - \dfrac{(n+1)^2p^2}{(1-p)^2}$

$$= (n+1)\left(\frac{p}{1-p} + \frac{(n+2)p^2}{(1-p)^2} - \frac{(n+1)p^2}{(1-p)^2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{1-p}\left(p + \frac{p^2}{1-p}\right)$$

$$= \frac{n+1}{1-p}\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(n+1)p}{(1-p)^2}}$$

$(*)$ pour utiliser cette formule, il faut auparavant vérifier que G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 (cf. Ex 220, C15)

Colle de la semaine n°21

Royon. G

Énoncé : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans L^1, et telles que :

- $Y \in L^2$, $|X| \leq Y$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \; |X_n| \leq Y$
- On a : $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Montrer que X admet une espérance et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$

Solution : Tout d'abord :

- $|X| \leq Y$
- $Y \in L^2 \subset L^1$

On en déduit par majoration que $X \in L^1$ ce qui justifie l'existence de $E(X)$.

Désormais on souhaite montrer que $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(X)$

On pose $n \in \mathbb{N}^*$

On remarque que $|X_n - X| \in L^1$ et que

$$\underbrace{|E(X_n) - E(X)| = |E(X_n - X)|}_{\text{linéarité de } E} \underbrace{\leq E(|X_n - X|)}_{\text{inégalité triangulaire de } E}$$

On pose $\varepsilon > 0$ et $Y_n := |X_n - X|$

$$Y_n = \mathbb{1}_{Y_n \geq \varepsilon} Y_n + \mathbb{1}_{Y_n < \varepsilon} Y_n \leq \mathbb{1}_{Y_n \geq \varepsilon} Y_n + \varepsilon$$

On applique l'espérance qui est croissante et linéaire :

$$E(Y_n) \leq \underbrace{E(\mathbb{1}_{Y_n \geq \varepsilon} Y_n)}_{= P(Y_n \geq \varepsilon)} + \underbrace{E(\varepsilon)}_{= \varepsilon}$$

Or par hypothèse $P(Y_n \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$P(Y_n \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$$

On obtient alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad E(Y_n) \leq 2\varepsilon$$

i.e. $E(Y_n) \to 0$

Par théorème d'encadrement, on obtient bien :

$$\boxed{E(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} E(X)}$$

Piero T. Colle de la semaine

TERRIER Piero

Question de cours.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On suppose que n passagers montent successivement dans un avion.

1. Le premier prend une place uniformément au hasard. Les suivants prennent une place uniformément au hasard si la leur est déjà occupée (et celle qui leur est attribuée sinon). Déterminer la probabilité p_n que le dernier passager soit à sa place.
2. Même question si on suppose que le premier passager prend une autre place que la sienne.

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, non nulles, telles que $X+Y$ suive une loi binomiale de paramètre (n,p). Montrer que X et Y suivent une loi binomiale.

Traiter les exercices dans l'ordre indiqué.

Solution :

1. Soit G l'évènement "le $n^{\text{ème}}$ passager est à sa place".
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on note A_k l'évènement "le premier passager s'installe à la place du k-ème passager".
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$:

$$p_n = P(G) = \sum_{k=1}^{n} P(G|A_k) \times P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k$$

On a $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$.
Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $p_n = \frac{1}{2}$.

Initialisation à $n=2$: $p_2 = \frac{p_0+p_1}{2} = \frac{1}{2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \in [\![2,n]\!]$ $p_k = \frac{1}{2}$.

$$p_{n+1} = \frac{p_0+p_1+\sum_{k=2}^{n} p_k}{n+1} = \frac{1+\frac{(n-1)}{2}}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Conclusion : d'après l'initialisation à $n=2$, l'hérédité et l'axiome de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $p_n = \frac{1}{2}$

$$2.\ P(G|\overline{A_1}) = \frac{P(G\cap\overline{A_1})}{P(\overline{A_1})} = \frac{P(G) - P(G\cap A_1)}{P(\overline{A_1})} \qquad (G = G\cap(A_1\cup\overline{A_1}))$$

$$= \frac{P(G) - P(G|A_1)\cdot P(A_1)}{P(\overline{A_1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}}$$

$$= \frac{n-2}{2(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}$$

Alexandre M.

Colle semaine 21

Enoncé :

1) Soit X_1 et X_2 indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$

2) Déterminer l'espérance et la variance de X_1+X_2

3) Soit $p \in]0,1]$ et $\lambda > 0$. Soit X et Y des v.a. définies sur un même espace de proba. On suppose $Y \sim Pois(\lambda)$ On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $Y=m$ suit la $B(m,p)$. Déterminer la loi de X.

1) On a

$X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ $\qquad$ $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $P(X_1 = n) = e^{-\lambda_1} \dfrac{\lambda_1^n}{n!}$ $\qquad$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(X_2 = n) = e^{-\lambda_2} \dfrac{\lambda_2^n}{n!}$

On a $(X_1+X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$P(X_1+X_2 = n) = P\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} (X_1 = k, X_2 = n-k)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k, X_2 = n-k) \quad [\sigma\text{-add}]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k) P(X_2 = n-k) \quad [X_1 \perp X_2]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$P(X_1+X_2=n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$ [formule du binôme de Newton]

donc $\boxed{X_1+X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)}$

2) $\boxed{\begin{array}{l} E(X_1+X_2) = \lambda_1+\lambda_2 \\ V(X_1+X_2) = \lambda_1+\lambda_2 \end{array}}$ [Variance et espérance usuelles]

3) on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(Y=n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$P(X=n \mid Y=m) = \begin{cases} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \\ 0 \text{ si } n > m \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Par théorème des probabilités totales appliqué au système quasi-complet d'évènements $(Y=m)_{m\in\mathbb{N}}$

on a $P(X=n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} P(X=n \mid Y=m) P(Y=m)$

$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\binom{m}{n}}_{0 \text{ si } m<n} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^m}{m!}$

$= \sum_{m\in\mathbb{N}_{\geq n}} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^m}{m!}$

$= \dfrac{e^{-\lambda}}{n!} p^n \lambda^n \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{N}_{\geq n}} \dfrac{\lambda^{m-n} (1-p)^{m-n}}{m-n}}_{\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m}}$

$= \dfrac{e^{-\lambda}}{n!} p^n \lambda^n e^{\lambda(1-p)}$ [le rayon de convergence de exp est $+\infty$]

$P(X=n) = \dfrac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^n}{n!}$ donc $\boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda p)}$

MATHEO.N

Rapport de Colle semaine 21

Exercice 1 :

Soient $x > 0$ et X la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \dfrac{1}{ch(x)} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

a. Vérifier que cette définition est cohérente et calculer la fonction génératrice G_X .

b. En déduire $E(X)$.

a) Soit $x>0$, vérifions que la série suivante converge vers 1 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{ch(x)} \times \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{ch(x)} \times \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

on reconnaît ici le développement en série entière de ch dont le rayon de convergence est $+\infty$. Ainsi :

$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{ch(x)} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{ch(x)}{ch(x)} = 1.$

Ainsi, la loi donnée pour X est cohérente.

On sait G_X définie sur $[-1,1]$ et $\forall t \in [-1,1]$:

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n = \frac{1}{ch(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^n$$

Si $t \geq 0$: $\displaystyle G_X(t) = \frac{1}{ch(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \frac{ch(x\sqrt{t})}{ch(x)}$

Si $t<0$: $\displaystyle G_X(t) = \frac{1}{ch(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-(-t))^n$

$$= \frac{1}{ch(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!}$$

on reconnaît ici le développement en série entière de cos.

$$= \frac{\cos(x\sqrt{-t})}{ch(x)}$$

Ainsi : $G_X \left| \begin{array}{l} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{ch(x\sqrt{t})}{ch(x)} & \text{si } t \geq 0 \\ \dfrac{\cos(x\sqrt{-t})}{ch(x)} & \text{si } t<0 \end{cases} \end{array} \right.$

Nous avons, si G_X est dérivable en 1 : $G_X'(1) = E(X)$.

Nous avons : $r \mapsto ch(x\sqrt{r})$ dérivable sur $]0,1]$.

Ainsi : G_X est bel et bien dérivable en 1 et :

$\forall r \in]0,1] : G_X'(r) = \dfrac{x}{2\sqrt{r}} \dfrac{sh(x\sqrt{r})}{ch(x)}$

d'où : $G_X'(1) = \dfrac{x\, sh(x)}{2\, ch(x)} = E(X)$

Aidoine Gatien

1) $\tau = \{ A \subseteq \Omega : A$ ou $\bar{A}$ est denombrable $\}$

avec Ω indenombrable

Montrer que τ est une tribu sur Ω

2) $\mathbb{P} \left| \begin{array}{l} \tau \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable} \end{cases} \end{array} \right.$

Montrer que $\mathbb{P}$ definit une probabilité sur (Ω, τ)

1)

H_1) $\emptyset \in \tau$

H_2) Soit $A \in \tau$,

- si A est denombrable alors $\bar{A}$ n'~~est pas denombrable~~ est dans τ par définition
- sinon $\bar{A}$ est denombrable donc $\bar{A} \in \tau$

donc $\bar{A} \in \tau$

H_3) Soit I un ensemble denombrable et $(A_i)_{i \in I} \in \tau^I$

- Suppons que, $\forall i \in I$, A_i est dénombrable alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est denombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.
- Sinon $\exists j \in I$, A_j n'est pas dénombrable

donc $\overline{A_j}$ est denombrable

or $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{A_j}$

donc $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ est denombrable

donc $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$

donc τ est une tribu

2)

H1) Ω n'étant pas denombrable
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

H2) Soit I un ensemble denombrable
et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'evenement incompatibles de τ

- si $\forall i \in I$, A_i est dénombrable
$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 0$ et $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = 0$

- si un ~~des Ai~~ seul des A_i n'est pas dénombrable
alors $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$ et $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = 1$

- supposons qu'il existe au moins deux ensembles indénombrables que l'on note A_h et A_ℓ
alors $A_h \cup \overline{A_h} = \Omega$ donc $A_\ell \subset A_h \cup \overline{A_h}$
or $A_\ell \cap A_h = \phi$
donc $A_\ell \subset \overline{A_h}$ or $\overline{A_h}$ est denombrable

c'est absurde.
Donc il ne peut avoir qu'un ensemble indénombrable dans la famille
donc $\mathbb{P}$ définit une probabilité sur (Ω, τ)

Anaë. D

Rapport de colle S21

Exercice 111. Soit N un entier naturel non nul et $k \in [\![0; N]\!]$.

- On dispose initialement d'une urne U_0 contenant k boules blanches et $N-k$ boules rouges. Les autres urnes sont initialement vides.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec N boules de la façon suivante. On effectue N tirages **avec remise** dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n.

1. Identifier la loi de la variable Y_1.
2. Montrer que la suite $\big(\mathbf{E}[Y_n]\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n = \mathbf{P}\big(Y_n \in \{0; N\}\big)$. Démontrer que (u_n) converge.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Y_n = N)$.

Solution :

1. Déterminons la loi de la variable Y_1.

On répète N fois une expérience de Bernoulli de manière indépendante (car il y a remise) qui consiste à piocher une boule dans l'urne U_0. Le succès est de tirer une boule blanche. La probabilité de succès est de $\frac{k}{N}$. Donc Y_1 suit une loi binomiale de paramètre $N, \frac{k}{N}$.

2. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $E(Y_n) = E(Y_{n+1})$. Soit $n \in \mathbb{N}$

On observe que l'événement $(Y_n = k)$ donne la composition de l'urne U_n. On a donc : $Y_{n+1} \mid Y_n = k \sim \mathcal{B}(N, \frac{k}{N})$

$(Y_n = k)_{k \in [\![0,N]\!]}$ forme un système complet d'événement d'où pour $i \in [\![0,N]\!]$

$$P(Y_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{N} P(Y_{n+1} = i \mid Y_n = k)\, P(Y_n = k) \quad (*)$$

D'après la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(Y_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{N} i\, P(Y_{n+1} = i) \\
&= \sum_{i=0}^{N} i \sum_{k=0}^{N} P(Y_{n+1} = i \mid Y_n = k)\, P(Y_n = k) && \text{(par (*))} \\
&= \sum_{i=0}^{N} i \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{i} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} P(Y_n = k) && (P(Y_{n+1} \mid Y_n = k) \sim \mathcal{B}(N, \tfrac{k}{N})) \\
&= \sum_{k=0}^{N} P(Y_n = k) \sum_{i=0}^{N} i \underbrace{\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}}_{P(Y_1 = i)} && \text{(échange de somme binomiale)} \\
& && (Y_1 \sim \mathcal{B}(N, \tfrac{k}{N})) \\
&= \sum_{k=0}^{N} P(Y_n = k) \underbrace{\sum_{i=0}^{N} i\, P(Y_1 = i)}_{k} && \text{(espérance d'une loi binomiale)} \\
&= \sum_{k=0}^{N} k\, P(Y_n = k) = \boxed{E(Y_n)}
\end{aligned}$$

Ainsi $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut k $\left(E(Y_1) = N \times \frac{k}{N} = k\right)$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $P(Y_n \in \{0, N\}) = u_n$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On remarque que

$(Y_n = 0) \subset (Y_{n+1} = 0) \Rightarrow P(Y_n = 0) \leq P(Y_{n+1} = 0)$ (croissance de P)

et $(Y_n = N) \subset (Y_{n+1} = N) \Rightarrow P(Y_n = N) \leq P(Y_{n+1} = N)$ (croissance de P)

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 1). Donc par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie.

4. De la même manière que dans la question 2, la formule des probabilités totales donne :

$$P(Y_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\binom{N}{0}}_{=1} \underbrace{\left(\frac{k}{N}\right)^0}_{=1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-0} P(Y_n = k)$$

$$= P(Y_n = 0) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^N P(Y_n = k)$$

et

$$P(Y_{n+1} = N) = \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\binom{N}{N}}_{1} \left(\frac{k}{N}\right)^N \underbrace{\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-N}}_{1} P(Y_n = k)$$

$$= P(Y_n = N) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^N P(Y_n = k)$$

En sommant, on obtient

$$P(Y_{n+1} = 0) + P(Y_{n+1} = N) = P(Y_n = 0) + P(Y_n = N) + \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \left(\left(\frac{k}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{k}{N}\right)^N\right) P(Y_n = k)}_{\geq 0}$$

En faisant tendre n vers plus l'infini, on a

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\left(\frac{k}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{k}{N}\right)^N\right) P(Y_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ie $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$ $\quad \underbrace{\left(\left(\frac{k}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{k}{N}\right)^N\right)}_{>0} P(Y_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\forall k \in [\![1, N-1]\!]$ $\quad P(Y_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Or $(Y_n \in \{0, N\}) = \overline{Y_n \in [\![1, N-1]\!]}$

Anaé D. (suite)

Donc $P(Y_n \in \{0,N\}) = 1 - P(Y_n \in [\![1, N-1]\!])$

On en déduit que $\boxed{u_n = P(Y_n \in \{0,N\}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$

D'après la question 2, on sait que

$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{N} k\, P(Y_n = k) = k$

On a alors avec le résultat précédent

$E(Y_n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} k\, P(Y_n = k)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} + N P(Y_n = N) = k$

On en déduit que $\boxed{P(Y_n = N) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{k}{N}}$

Martin
Kirilov-Lilov.

Rapport de colle, semaine 21.

Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\Omega := [\![1, n]\!]$, qu'on munit de la probabilité uniforme, $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de n, et :

$$D_d := \{a \cdot d \mid a \in \mathbb{N} \text{ et } a \cdot d \in \Omega\}.$$

1). Calculer $P(D_d)$.

2). Si $p_1, \dots, p_r$ sont les diviseurs premiers deux-à-deux distincts de n, $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $D_{p_1}, \dots, D_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3). Calculer alors $\varphi(n)$.

1). On a $|D_d| = \frac{n}{d}$. Ainsi,

$$\boxed{P(D_d) = \frac{\frac{n}{d}}{n} = \frac{1}{d}.}$$

2). Comme $p_1, \dots, p_r$ sont deux-à-deux premiers entre eux :

$$\bigcap_{i=1}^{r} D_{p_i} = D_{\prod_{i=1}^{r} p_i}$$

Donc par le résultat de 1),

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{r} D_{p_i}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} p_i} = \prod_{i=1}^{r} P(D_{p_i}).}$$

3). On a $\varphi(n) = |\{k \in [\![1,n]\!] \mid n \wedge k = 1\}|$. Or,

$$\{k \in [\![1,n]\!] \mid n \wedge k = 1\} = \bigcap_{i=1}^{r} \overline{D_{p_i}} .$$

D'où, comme $\overline{D_{p_1}}, \dots, \overline{D_{p_r}}$ sont mutuellement indépendants par 2) :

$$\boxed{\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{D_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}.$$

Rapport de colle - semaine 21 Uta. BdN

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires partant de Ω vers E un ensemble.

$N : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire

Montrer que X_N est une variable aléatoire

- $X_N(\Omega) \subset \bigcup_{n \in N(\Omega)} X_n(\Omega)$

donc $X_N(\Omega)$ est dénombrable car inclut dans $\bigcup_{n \in N(\Omega)} X_n(\Omega)$ qui est dénombrable comme union dénombrable des ensembles dénombrables.

- Soit $x \in E$

$(X_N = x) = \{ \omega \mid X_{N(\omega)}(\omega) = x \}$

donc $(X_N = x) \in \{ (X_0 = x), \dots, (X_n = x), \dots \} \subset \mathcal{A}$

Donc X_N est une variable aléatoire

Lina A. Colle de la semaine n° 21.

Exercice 4. On considère deux variables aléatoires X et Z. On suppose que Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que pour tout entier naturel n la loi de X sachant $[Z = n]$ est $\mathcal{B}(n, p)$.

a. Montrer que X suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.

b. On pose $Y = Z - X$. Loi de Y ?

c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

a. • Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$

• $\forall n \in \mathbb{N}$ X sachant $(Z=n)$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Par la formule des probabilités totales avec $(Z=n)_{n\in\mathbb{N}}$ le système quasi complet d'évènements on a :

$$P(X=k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(Z=n)\, P(X=k \mid Z=n)$$

$$= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \geq k}} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{car } P(X=k|Z=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda^k p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \geq k}} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}$$

Or $R\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) = +\infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Donc

$$P(X=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda + \lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

Donc

$\boxed{X \text{ suit la loi de poisson de paramètre } \lambda p.}$

b. $Y = Z - X$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ $(Z - X = m) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \left((X = \ell) \cap (Z = m + \ell) \right)$ donc,

$$P(Y = m) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P(Z = m+\ell)\, P(X = \ell \mid Z = m+\ell)$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^{m+\ell}}{(m+\ell)!} e^{-\lambda} \binom{m+\ell}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{m}$$

$$= \frac{\lambda^{m}(1-p)^{m}}{m!} e^{-\lambda} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{(\lambda p)^{\ell}}{\ell!}$$

$$= \frac{\lambda^{m}(1-p)^{m}}{m!} e^{-\lambda + \lambda p}$$

$$= \frac{(\lambda(1-p))^{m}}{m!} e^{-\lambda(1-p)}$$

$\boxed{\text{Donc } Y \text{ suit la loi de poisson de paramètre } (\lambda(1-p)).}$

c. • $P(X=n)P(Y=m) = \cancel{\sum_{n \in \mathbb{N}}} \frac{(\lambda p)^{n}}{n!} e^{-\lambda p} \cancel{\sum_{m \in \mathbb{N}}} \frac{(\lambda(1-p))^{m}}{m!} e^{-\lambda(1-p)}$

$$= \frac{(\lambda p)^{n} (\lambda(1-p))^{m}}{n!\, m!} e^{-\lambda}$$

$$P(X=n \cap Y=m) = P(X=n)\, P(Y=m \mid X=n)$$
$$= P(X=n)\, P(X=n \mid Z=n+m).$$
$$= \frac{(\lambda p)^{n} (\lambda(1-p))^{m}}{n!\, m!} e^{-\lambda}$$

Donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

MANGIACOMINI
Amélien

Rapport de Colle

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir 6.

Probabilité que tout les nombres obtenus soient pairs ?

On note A l'événement "tout les nombres obtenus avant 6 sont pair et le dernier nombre est 6".

On note A_p où $p \in \mathbb{N}^*$ l'événement :

"les $p-1$ lancers précédents sont pairs"

et B_p où $p \in \mathbb{N}^*$ "le p-ième lancer vaut 6"

On a : $P(A) = P\left(\bigsqcup_{p \in \mathbb{N}^*} A_p \cap B_p\right)$

(sigma-additivité)

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} P(A_p \cap B_p)$$

probabilité conditionnelle

$$\left(\text{or } P(A_p \cap B_p) = P(A_p \mid B_p)\, P(B_p) = \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \times \frac{1}{6} \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{p} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \,\square$$

Mehdi B. Colle de la semaine 21.

Exercice 4. pro4

On a une pièce non équilibrée qui amène pile avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
Pour n dans $\mathbb{N}$, on note A_n l'évńement « au n-ième lancer, on obtient pour la première fois deux piles consécutifs ». on note $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_1, a_2, et a_3.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3,\ a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}.$$

3. Déterminer a_n en fonction de n.

Solution : 1/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on note B_n l'événement " au n-ième lancer, on a obtenu pile". les B_i sont indépendants.

$A_1 = \emptyset$ donc $a_1 = 0$

$A_2 = B_1 \cap B_2$ donc $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{a_2 =} \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$A_3 = \overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3$ donc $a_3 = \frac{4}{27}$

2/ On applique la formule des probabilités totales par rapport au système complet d'événements qui modélise le jeu à l'issu des 2 premiers lancers, ie :

$(B_1 \cap B_2,\ \overline{B_1} \cap B_2,\ B_1 \cap \overline{B_2},\ \overline{B_1} \cap \overline{B_2})$.

$$\begin{aligned} a_n = P(A_n) = &\ \underbrace{P(A_n \mid B_1 \cap B_2)}_{0} P(B_1 \cap B_2) \\ &+ \underbrace{P(A_n \mid \overline{B_1} \cap B_2)}_{a_{n-2}} \underbrace{P(\overline{B_1} \cap B_2)}_{\frac{2}{9}} \\ &+ \underbrace{P(A_n \mid B_1 \cap \overline{B_2})}_{a_{n-1}} \underbrace{P(B_1 \cap \overline{B_2})}_{\frac{2}{9}} \\ &+ \underbrace{P(A_n \mid \overline{B_1} \cap \overline{B_2})}_{a_{n-1}} \underbrace{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})}_{\frac{1}{9}} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} + \frac{2}{9} a_{n-2}$$

3/ $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0 \iff x \in \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right\}$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \lambda_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$n \leftarrow 1$: $-\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 = 0$

$n \leftarrow 2$: $\frac{1}{9}\lambda_1 + \frac{4}{9}\lambda_2 = \frac{4}{9}$

Il vient $\lambda_1 = \frac{4}{3}$ et $\lambda_2 = \frac{2}{3}$.

Ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Tiguir, David — Colle de la semaine 21

Soit $(\lambda, p) \in]0,+\infty[\times]0,1[$. *Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans* $\mathbf{N}$. *telles que :*

- *X suit la loi de Poisson de paramètre λ ;*
- *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la loi de Y sachant $(X = n)$ est la loi binomiale de paramètres (n, p).*

Déterminer la loi de Y, puis donner son espérance et sa variance.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On sait $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad P(Y=k \mid X=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (1)

Soit $k \in \mathbb{N}$, d'après les probabilités totales par rapport au système complet d'évènements $((X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=k \mid X=n)\, P(X=n) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \lambda^n \\ &= \frac{1}{k!} (p\lambda)^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} ((1-p)\lambda)^{n-k} \end{aligned}$$

On $R\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$ et $\forall z \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ donc (2)

$$P(Y=k) = \frac{1}{k!}(p\lambda)^k e^{-\lambda} \cdot e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}$$

Puis comme Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ on calcule son espérance :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^k}{(k-1)!} e^{-p\lambda} = p\lambda e^{-p\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} \overset{(2)}{=} p\lambda \end{aligned}$$

Finalement on prouve que $Y \in L^2$

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{(p\lambda)^k}{(k-1)!} e^{-p\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{(p\lambda)^{k+1}}{k!} e^{-p\lambda}$$

$$= \underbrace{(p\lambda)^2 e^{-p\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}}_{\text{fini comme en } E(Y)} + \underbrace{p\lambda e^{-p\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^k}{k!}}_{\text{fini comme en } (2)}$$

donc

$$E(Y^2) = (p\lambda)^2 e^{-p\lambda} e^{p\lambda} + p\lambda e^{-p\lambda} e^{p\lambda}$$
$$= (p\lambda)^2 + p\lambda \quad \text{et} \quad Y \in L^2$$

Ainsi par König-Huyghens

$$V(Y) = (p\lambda)^2 + p\lambda - (p\lambda)^2 = p\lambda$$

Youssef. B — Colle de la semaine 21

Exercice 103.

1. Soit X_1 et X_2 indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
3. Soit $p \in]0;1]$ et $\lambda > 0$. Soit X et Y des v.a. définies sur un même espace de probabilité. On suppose que $Y \sim \text{Poiss}(\lambda)$. On suppose que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et que pour tout $m \in \mathbf{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $Y = m$ est une loi $\text{Bin}(m, p)$. Déterminer la loi de X.

Solution :

1) On a $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$, $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$X_1 + X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ car $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}$

soit $m \in \mathbb{N}$

$$P(X_1 + X_2 = m) = \sum_{k=0}^{m} P(X_1 = k, X_2 = m-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} P(X_1 = k)P(X_2 = m-k) \qquad (X_1 \perp\!\!\!\perp X_2)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} \times \frac{m!}{m!} \lambda_1^k \lambda_2^{m-k}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{m-k}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}$$

Donc $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

2) $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2 = E(X_1) + E(X_2)$

$V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2 = V(X_1) + V(X_2) \qquad (X_1 \perp\!\!\!\perp X_2)$

3) X et à valeurs entières et $(Y = m)_{m \in \mathbb{N}}$ et un système complet d'évenemants

Donc on utilise la formule de probabilités totale :

$$P(X=n) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(X=n \mid Y=m)\, P(Y=m)$$

$$= \sum_{m=\cancel{0}n}^{+\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

$$= p^n e^{-\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} (1-p)^{m-n} \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \times \frac{\lambda^{m-n}\lambda^n}{m!}$$

$$= p^n e^{-\lambda} \lambda^n \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\big((1-p)\lambda\big)^{m-n}}{(m-n)!}$$

$$= p^n e^{-\lambda} \lambda^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\big((1-p)\lambda\big)^{k}}{k!}$$

$$= \frac{1}{n!} p^n \lambda^n e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda}$$ (série exponentielle)

$$= e^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^n}{n!}$$

$X \sim \mathcal{P}(p\lambda)$

Pierre V Colle de la semaine

Exercice 6 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$ pour $t \in]-2,2[$ où $\alpha > 0$. Pierre

1. Donner la loi de X.
2. Montrer que pour tout $\lambda > 0, \mathbf{P}(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Solution

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme G_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2,2[$,

Montrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n) = " \forall t \in]-2,2[\quad G_X^{(n)}(t) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(2-t)^{\alpha+n}}"$

*) Initialisation pour $n=1$

G_X est dérivable sur $]-2,2[$ et $\forall t \in]-2,+2[\quad G_X'(t) = \dfrac{\alpha}{(2-t)^{\alpha+1}}$

*) Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$ vraie

$G_X^{(n)}$ est dérivable sur $]-2,2[$ et soit $t \in]-2,2[$

$$G_X^{(n+1)}(t) = \left(G_X^{(n)}(t)\right)' = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(2-t)^{\alpha+n}}\right)'$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{(2-t)^{\alpha+n+1}}$$

donc $P(n)$ est vrai

*) Conclusion : Par l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ est vraie

donc $\forall t \in]-2,2[\quad G_X^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-t)^\alpha} & \text{si } n=0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(2-t)^{\alpha+n}} & \text{sinon} \end{cases}$

Par le cours, $P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^\alpha} & \text{si } n=0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{2^{\alpha+n}} & \text{sinon} \end{cases}$

2. Comme $X \in L^2$,

D'après le cours, $E(X) = G_X'(1) = \alpha$

et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (formule de König-Huyghens)

$= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$

Par définition, soit $t \in]-2,2[$

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$$

comme G_X est $\mathcal{C}^2$ sur $]-2,2[$

$$G_X'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X=n)\, t^{n-1}$$

$$G_X''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) P(X=n)\, t^{n-2}$$

donc $G_X''(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) P(X=n)$

$= E(X(X-1))$ (formule de transfert)

donc $E(X(X-1)) = \alpha(\alpha+1)$, ainsi $V(X) = \alpha(\alpha+1) + \alpha - \alpha^2 = 2\alpha$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

Soit $r > 0$ $P(|X - E(X)| \geq r) \leq \frac{V(X)}{r^2}$

donc $P(|X-\alpha| \geq r) \leq \frac{2\alpha}{r}$

or comme $(|X-\alpha| \geq r) = (X \geq r+\alpha) \cup (X \leq \alpha - r)$

$(X \geq r+\alpha) \subset (|X-\alpha| \geq r)$, donc $P(X \geq r+\alpha) \leq P(|X-\alpha| \geq r)$

donc $P(X \geq r+\alpha) \leq \frac{2\alpha}{r^2}$