NISS
MATHEO

Rapport de colle semaine 19

Exercice 3 :
Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension n non nulle.
On pose $H_u = \{x \in E, (u(x), x) = 1\}$.

1. Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de u pour qu'il existe un vecteur unitaire élément de H_u.
2. Soit v un endomorphisme autoadjoint défini positif. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de $v^{-1} \circ u$ pour que $H_u \cap H_v \neq \emptyset$.
Penser à utiliser un produit scalaire utilisant v.

1 Nous procédons par analyse-synthèse :

(A) Supposons qu'il existe $x \in H_u$ unitaire
Comme u est autoadjoint, d'après le théorème spectral pour les autoadjoints, il existe $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée telle que

$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs réelles propres de u et B une famille de vecteurs propres de u.

ainsi il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

nous savons alors :

$$1 \underset{(*)}{=} \Big(u\big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\big), \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \lambda_i \underbrace{(e_i, e_j)}_{\delta_{ij} \text{ car } B \text{ famille orthogonale}}$$

[ei vecteurs propres de u]

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Si on pose $\lambda_M = \max\{\lambda_i : i \in [\![1, n]\!]\}$ et $\lambda_m = \min\{\lambda_i : i \in [\![1,n]\!]\}$
alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_m x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_M x_i^2$$

d'où :

$$\lambda_m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \underset{(*)}{\leq} 1 \leq \lambda_M \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

or, comme x est unitaire, en utilisant le produit scalaire usuel sur les n-espaces vectoriels euclidiens : $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x_i\|^2 = 1$

D'où :

$$\lambda_m \leq 1 \leq \lambda_M$$

Ainsi, notre condition candidate pour qu'un tel

x existe est que $1 \in [\min(\mathrm{Spec}(u)), \max(\mathrm{Spec}(u))]$

(5) Supposons maintenant que $1 \in [\min(\mathrm{Spec}(u)) = \lambda_m, \max(\mathrm{Spec}(u)) = \lambda_M]$

Comme $1 \in [\lambda_m, \lambda_M]$ segment $\in \mathbb{R}$ il existe $\mu \in [0,1]$ tel que

$1 = \mu \lambda_m + (1-\mu)\lambda_M$

Dans la base B utilisée précédemment, on confond λ_m et λ_M avec les vecteurs de la bases issus de leurs espaces propres, que l'on nommera e_m et e_M

on pose : $(x_m, x_M) \in \mathbb{R}^2$ et $x = x_m e_m + x_M e_M$.

alors : $(u(x), x) = (x_m \lambda_m e_m + x_M \lambda_M e_M, x_m e_m + x_M e_M)$

$= x_m^2 \lambda_m + x_M^2 \lambda_M$

on identifie alors : $x_m^2 = \mu$ et $x_M^2 = (1-\mu)$

ainsi : $x_m = \sqrt{\mu}$ et $x_M = \sqrt{1-\mu}$ conviennent et :

$x = \sqrt{\mu}\, e_m + \sqrt{1-\mu}\, e_M$ convient.

2) On pose l'application :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & (v(x), y) \end{array} \right.$$

- Linéaire à droite, par linéarité de v et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$
- Symétrique car v autoadjoint donc $\forall (x,y) \in E^2$:
  $(v(x), y) = (x, v(y)) \Rightarrow \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
- Donc linéaire à gauche aussi.
- Positive car $\forall x \in E \setminus \{0\} : \overset{\langle x,x \rangle}{=} (v(x), x) > 0$ [v définie positive]
- Donc définie car par le caractère défini positif de v pour $x \in E$: $(v(x), x) = 0 \Rightarrow x = 0$
  $(\langle x,x \rangle = 0)$

NISS
MATHÉO

on a dès lors : $\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{l} E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \mapsto (v(x), y) \end{array} \right.$ produit scalaire

$H_u = \{x \in E \mid (u(x), x) = 1\} \overset{(1)}{=} \{x \in E \mid \langle v^{-1}(u(x)), x\rangle = 1\}$

[v bijective car $Spec(v) > 0$ et
$\exists$ B base de E telle que $Mat_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$] rang n.

et $H_v \overset{(2)}{=} \{x \in E, \langle x, x\rangle = 1\} (= \{x \in E, (v(x), x) = 1\})$

En reprenant l'étude menée en 1 pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et l'endomorphisme $v^{-1} \circ u$ on obtient qu'il existe $x \in H_u$ unitaire si et seulement si :

(*) $1 \in [\min(Spec(v^{-1} \circ u)), \max(Spec(v^{-1} \circ u))]$ (par (1))

Dans ce cas comme x est unitaire par (2) :

$\langle x, x\rangle = 1$ donc $x \in H_v$.

Ainsi : $H_u \cap H_v \neq \emptyset$ pour la condition nécessaire et suffisante (*)

Nicolas.H Colle de la semaine 19

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ est diagonale

Solution

A est symétrique réelle, par théorème spectral, il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^T.$$

Ainsi A est diagonalisable et nous savons que $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = Spec(A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & +2 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & -1 \\ \lambda+3 & \lambda-1 & 2 \\ \lambda+3 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (\lambda+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (\lambda+3)^2(\lambda-3)$$

A étant diagonalisable, la multiplicité des racines de χ_A égale la dimension du sous-espaces propre associé à la valeur propre.

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

donc $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ car $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ libre

$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ donc $E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}^{v_1}, \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}^{v_2}\right)$ est une base orthonormée de $E_{-3}(A)$

$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)}_{v_3}$ est une base orthonormée de $E_3(A)$

Comme $E_{-3}(A) \perp E_3(A)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormée de $M_3(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{B_0}(f) = A$

Par changement de base

$A = \underbrace{P_{B_0 \to \underline{v}}}_{P} \mathrm{Mat}_{\underline{v}}(f) \underbrace{P_{\underline{v} \to B_0}}_{\in O_n(\mathbb{R})} = P^T = P^{-1}$

donc $P^T A P = \mathrm{Mat}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

et $P = \mathrm{Mat}_{\underline{v}, B_0}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

Jules R. Colle de la semaine 19

Énoncé :
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$
Soit a un vecteur unitaire de E et soit $k \in \mathbb{R}$
Q1- Démontrer que l'application

$$f_k \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x + k\langle x, a\rangle a \end{array} \right.$$

est un endomorphisme symétrique de E

Q2- Déterminer les valeurs propres de f_k.

Solution :

Q1-

Soient $(x, y) \in E^2$.

$$\langle f_k(x), y\rangle = \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle$$

et

$$\langle x, f_k(y)\rangle = \langle x, y\rangle + k\langle y, a\rangle\langle x, a\rangle$$

Par symétrie du produit scalaire, on conclut :

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

Q2- En prenant $k = 0$, f_k est un endomorphisme orthogonal de E (f_k est l'identité) : 1 est valeur propre et tous les vecteurs de l'espace (sauf le vecteur nul) sont des vecteurs propres.

Supposons que $k \neq 0$.
Soit μ une valeur propre de f_k de vecteur associé $x \in E \setminus \{0_E\}$.
On a :

$$f_k(x) = \mu x \iff (\mu - 1)x = k\langle x, a\rangle a$$

Si $\mu = 1$, alors c'est équivalent à $\langle x, a\rangle = 0$
Donc 1 est valeur propre de f_k et l'espace propre associé est $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$. Si $\mu \neq 1$, on voit que x et a doivent

être proportionnels. Or, on a :

$$f_k(a) = (1+k)a$$

Ainsi, $1+k$ est valeur propre de f_k, et son espace propre contient $\mathrm{Vect}(a)$. Mais puisque $\mathrm{Vect}(a)$ et $\mathrm{Vect}(a)^\perp$ sont supplémentaires, on a déterminé les sous-espaces propres de f_k.

Pièce V — Colle de semaine 19

> Soit $(E<\cdot,\cdot>)$ un espace euclidien, E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels tel que $E = E_1 \oplus E_2$
> Posons p_1 la projection orthogonale sur E_1
> et p_2 la projection orthogonale sur E_2
> tel que $a = p_1 + p_2$
> Montrer que $0 < \det(a) \leq 1$

Soit $B_1 = (e_1 \dots e_p)$ une base orthonormée de E_1

$B_2 = (e_{p+1} \dots e_n)$ une base orthonormée de E_2

Comme $E = E_1 \oplus E_2$, $B = B_1 \# B_2$ est une base de E

$\forall x \in E \quad p_1(x) = \sum_{i=1}^{p} <x, e_i> e_i$ et $p_2(x) = \sum_{i=p+1}^{n} <x, e_i> e_i$

donc $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad a(e_k) = e_k + \sum_{i=p+1}^{n} <e_k, e_i> e_i$

$\forall k \in [\![p+1, n]\!] \quad a(e_k) = \sum_{i=1}^{p} <e_k, e_i> e_i + e_k$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_B(a) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & \cdots & e_p & e_{p+1} & \cdots & e_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & <e_i, e_j> & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & <e_j, e_i> & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} = (<e_i, e_j>)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

On a donc $\mathrm{Mat}_B(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ tel que $\mathrm{Mat}_B(x) = X$

Alors
$$X^T \mathrm{Mat}_B(a) X = \mathrm{Mat}_B(x)^T \mathrm{Mat}_B(a) \mathrm{Mat}_B(x)$$
$$= \mathrm{Mat}_B(x)^T \mathrm{Mat}_B(a(x)) = <x, a(x)>$$
$$= <x, \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i> = \sum_{i=1}^{n} <x, e_i>^2 \geq 0$$

donc $\mathrm{Mat}_B(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Supposons que $Mat_B(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Par le théorème spectrale, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $\exists (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$

$Mat_B(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$$Mat_B(a) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$$

donc $\det(a) = \det(Mat_B(a)) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$

ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, par l'inégalité de Jensen

aux points $\lambda_1 > 0 \dots \lambda_n > 0$ avec poids $\frac{1}{n} > 0 \dots \frac{1}{n} > 0$ de

somme 1, on a

$$\ln\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{n}}_{>0}\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\overbrace{\ln(\lambda_i)}^{>0}}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n}\right)$$

par croissance de exp sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{n} \geq \sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n}$$

donc $\sqrt[n]{\det(a)} \leq \frac{Tr(a)}{n}$

or $Tr(a) = n$ donc $\det(a) \leq 1$

<u>Enoncé</u> : Soit $(E, <.,.>)$ espace euclidien de dimension $n \geq 2$.
Soit a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbb{R}$

<u>Q1</u> : Démontrer que l'application $f_k \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x + k.<x,a>a \end{array} \right.$ est un endomorphisme autoadjoint de E.

<u>Q2</u> : Déterminer k tel que f_k soit un endomorphisme orthogonal de E. Quelle est alors la nature de f_k ?

<u>Q3</u> : Etudier les elements propres de f_k

<u>Solution</u> :

<u>Q1</u> : Soit $(x,y) \in E$

- $<f_k(x), y> = <x + k<x,a>a \,, y> = \underline{<x,y> + k<x,a><a,y>}$

- $<x, f_k(y)> = <x, y + k<y,a>a> = \underline{<x,y> + k<y,a><a,x>}$

Donc f_k est un endomorphisme autoadjoint de E

<u>Q2</u> : Déterminer $\mathcal{K} = \{ k \in \mathbb{R} : f_k \text{ est un endomorphisme orthogonal} \}$ reviens à resoudre :

$$(E) : \|x + k<x,a>a\|^2 = \|x\|^2 \text{, d'inconnue } x \in E$$

Soit $x \in E$
$$\begin{aligned} & \|x + k<x,a>a\|^2 = \|x\|^2 \\ \Rightarrow\ & \|x\|^2 + k^2<x,a>^2\|a\|^2 + 2<x, k<x,a>a> = \|x\|^2 \\ \Rightarrow\ & k^2<x,a>^2\|a\|^2 + 2k<x,a>^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & k<x,a>^2(k+2) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, remarquons que $\boxed{\mathcal{K} = \mathcal{S}ol_{(E)} = \{-2, 0\}}$

Finalement :

- <u>Si $k = 0$</u>, f_0 est l'identité

- <u>Si $k = -2$</u>, f_{-2} est la reflexion orthogonale de E par rapport à un hyperplan de E.

<u>Q3</u> : Etudions les elements propres de f_k.

- Dans le cas où $k = 0$, $f_k = id$.

  Ainsi il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(f_0) = I_n$.

  Et donc $E_0(f_0) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Anaë D.

Rapport de colle S19

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbf{R})$ telle que $P^\top AP$ est diagonale.

Solution.

A est symétrique à coefficients réels donc par le théorème spectral pour les matrices, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel

$\exists u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{mat}_{B_0}(u)$ où $B_0 = \mathrm{can}_{\mathbb{R}^3}$ (base orthonormée)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & -1 \\ \lambda+3 & \lambda-1 & 2 \\ \lambda+3 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (\lambda+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (\lambda+3)^2(\lambda-3)$$

Donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3, 3\}$

$\underline{E_{-3}(A)}$: Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \cancel{-2x + 4y - 2z = 0} \\ \cancel{x - 2y + z = 0} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x - 2y + z = 0$

Donc $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\underline{E_3(A)}$: Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-12y - 24z = 0} & L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3 \\ -6y - 12z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases}$$

$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On pose $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Soit $f_1' = (2,1,0)$ et $f_2' = (-1,0,1)$

Par l'algorithme de Gram-Schmidt, il vient

$f_1 = \frac{1}{\|f_1'\|} f_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

$f_2'' = f_2' - \langle f_2', f_1 \rangle f_1$

$= (-1,0,1) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) = (-1,0,1) + \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$

Anaë D. (suite)

$$f_2 = \frac{1}{\|f_2'\|} f_2' = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \right)$$

Par le théorème spectral on a

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_3(A) \overset{\perp}{\oplus} E_{-3}(A)$$

Donc $B = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base orthonormée

Par théorème de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{B_0}(u) = P_{B_0 \to B}\, \mathrm{Mat}_B(u)\, P_{B \to B_0}$$

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(f_1) & u(f_2) & u(f_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /f_1 \\ /f_2 \\ /f_3 \end{array}$$

$$P_{B_0 \to B} = \mathrm{Mat}_{B, B_0}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -\sqrt{5}/5\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/5\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array}$$

car matrice de passage entre 2 bases orthonormées

$$P_{B \to B_0} = (P_{B_0 \to B})^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{5}/5\sqrt{6} & 2\sqrt{5}/5\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_B(u)}_{\in D_3(\mathbb{R})} = \underbrace{P_{B \to B_0}}_{= P \in O_3(\mathbb{R})} \underbrace{\mathrm{Mat}_{B_0}(u)}_{A} \underbrace{P_{B_0 \to B}}_{= P^T}$$

Rapport de colle semaine - 19 Uta BdN

Exercice 2 :

Soit G un groupe fini de $GL(\mathbb{R}^n)$, on note $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et on pose :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \psi(x,y) = \sum_{g\in G} \langle g(x), g(y) \rangle$$

1. Vérifier que ψ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$
2. Vérifier que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall g \in G, \ \psi(x,y) = \psi(g(x),g(y))$
   . En déduire que G est isomorphe à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
3. Si $n=2$ et si $G \subset SO(\mathbb{R}^2)$, montrer que G est cyclique (Penser à utiliser un sous groupe de $\mathbb{C}$ isomorphe à $SO_2(\mathbb{R})$).

1.) • Linéarité à gauche.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, y) \in (\mathbb{R}^n)^3$

$$\psi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \sum_{g\in G} \langle g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), g(y) \rangle$$

$$= \sum_{g\in G} \lambda_1 \langle g(x_1), g(y) \rangle + \lambda_2 \langle g(x_2), g(y) \rangle \quad \begin{pmatrix} \text{linéarité de } g\in G \\ \text{et de } \langle \cdot ; \cdot \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \psi(x_1, y) + \lambda_2 \psi(x_2, y) \quad \begin{pmatrix} \text{linéarité de} \\ \text{somme fini} \end{pmatrix}$$

• Symétrie

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\psi(x,y) = \psi(y,x) \quad (\text{symétrie de } \langle \cdot ; \cdot \rangle)$$

• Positivité

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\psi(x,x) = \sum_{g\in G} \overbrace{\| g(x) \|^2}^{\geq 0} \geq 0$$

• <u>Définition</u>

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Psi(x,x) = 0$

$$\Psi(x,x) = \sum_{g \in G} \underbrace{\|g(x)\|^2}_{\geq 0} = 0$$

donc $\forall g \in G$, $\|g(x)\|^2 = 0$

alors pour $g \in G$, $\|g(x)\|^2 = 0$

$\Rightarrow g(x) = 0$ (définition de $\langle \cdot , \cdot \rangle$)

$\Rightarrow x = 0$ (g est bijective)

2.) Soit $g \in G$.

$f \left| \begin{array}{l} G \to G \\ h \mapsto h \circ g^{-1} \end{array} \right.$ est bien définie

• Soit $g' \in G$,

$f(g' \circ g) = g' \circ g \circ g^{-1} = g'$

donc f est surjective

Comme l'ensemble de départ et d'arrivé sont identiques, f injective $\Leftrightarrow$ f surjective

donc f bijective

• Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$

$$\Psi(g(x), g(y)) = \sum_{g' \in G} \langle g' \circ g(x), g' \circ g(y) \rangle$$

$$\underset{(f \text{ bijective})}{=} \sum_{h \in G} \langle h \circ g^{-1} \circ g(x), h \circ g^{-1} \circ g(y) \rangle$$

$$= \Psi(x,y)$$

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|g(x)\|_\psi^2 = \psi(g(x), g(x)) = \psi(x, x) = \|x\|_\psi^2$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|g(x)\|_\psi = \|x\|_\psi$, donc g est une isométrie vectorielle.

- $f \left| \begin{array}{ccc} O(\mathbb{R}^n) & \to & O_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$ est isomorphe

(où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.)

donc $f_{|G}^{|f(G)} : G \to f(G)$ est isomorphe comme restriction et corestriction de f.

$f(G)$ est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ comme image d'un sous groupe par un morphisme de groupe.

$\boxed{\text{Ainsi } G \text{ est isomorphe à un sous groupe de } O_n(\mathbb{R})}$

3.) Comme $G \subset SO(\mathbb{R}^2)$, $f(G) \subset SO_2(\mathbb{R})$ car $Mat_{\mathcal{B}}(\cdot)$ conserve le déterminant

$h \left| \begin{array}{ccc} SO(\mathbb{R}^2) & \to & (\mathbb{U}, \times) \\ R(\theta) & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$ est isomorphisme de groupe

donc $h \circ f(G)$ est sous groupe de $(\mathbb{U}, \times)$ et G est isomorphe à $h \circ f(G)$

On pose $K = |G|$

On sait que $\mathbb{U}_K$ est cyclique, $(\mathbb{U}_K = \langle e^{i\frac{2\pi}{K}} \rangle)$

Donc si $hof(G) = \mathbb{U}_K$, G est cyclique.

(⊂) Soit $z \in hof(G)$

Comme $z \in \mathbb{U}$, $|z| = 1$

Et $z^K = 1$

Donc $z \in \mathbb{U}_K$

Comme $|\mathbb{U}_K| = |hof(G)|$, $\mathbb{U}_K = hof(G)$

$\boxed{\text{Ainsi, } G \text{ est cyclique}}$

Robin G. Colle de la semaine 19

> $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
>
> $f_A : M \longmapsto AM$
>
> Montrer que $f_A \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Solution : $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $A^T A = I_n$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle f_A(M), f_A(N) \rangle = \mathrm{Tr}\left((AM)^T AN\right)$$

$$M^T \underbrace{A^T A}_{I_n} N$$

$$= \mathrm{Tr}(M^T N)$$

$$= \langle M, N \rangle$$

Par caractérisation des isométries vectorielles, f_A en est une.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On pose $\mathcal{B}_0 := \mathrm{Can}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = (X_1, \ldots, X_n)$

où $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

• Alors en posant $A_{\cdot i}$ les colonnes de A, $i \in [\![1,n]\!]$,

$AX_i = A_{\cdot i}$.

ainsi $f_A(X_i) = A_{\cdot i}$

Donc :

$$\mathrm{Mat}_{B_0}(f_A) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f_A(X_1) & \cdots & f_A(X_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{\cdot 1} & \cdots & A_{\cdot n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} /X_1 \\ \vdots \\ /X_n \end{array} \end{array} = A$$

Comme $\mathrm{Mat}_{B_0} \left| \begin{array}{ccc} O(\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R}), \circ) & \longrightarrow & (O_n(\mathbb{R}), \times) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{B_0}(u) \end{array} \right.$

est un isomorphisme de groupes,

$\mathrm{Mat}_{B_0}(f_A) \in O_n(\mathbb{R})$

Donc $\underline{A \in O_n(\mathbb{R})}$.

2/2

Tipiin, David — Colle de la semaine 18.

Montrer que la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est orthogonale

et trouver son endomorphisme u associé sur $\mathbb{R}^3$ sur la base canonique.

On calcule :

$$\langle u(e_1), u(e_2)\rangle = \frac{1}{49}(-6\times2 + 6\times3 - 3\times2) = 0$$

$$\langle u(e_2), u(e_3)\rangle = \frac{1}{49}(-12 + 18 - 6) = 0$$

$$\langle u(e_3), u(e_1)\rangle = 0$$

De plus $\|u(e_1)\| = \frac{1}{49}(4+36+9) = 1 = \|u(e_2)\| = \|u(e_3)\|$

$(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et A est une matrice de passage entre bases orthonormées donc elle est orthogonale. De plus

$$\det(A) = \frac{1}{343}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{343}\begin{vmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{343}\begin{vmatrix} 0 & -14 & -21 \\ 0 & 21 & 56 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{-1}{343}\begin{vmatrix} -14 & -21 \\ 21 & 56 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{343}(-56\times14 + 21\times21) = 1$$

Il s'agit d'une rotation axiale ainsi par théorème de réduction 1 est une valeur propre de A :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x - 6y + 3z = 7x \\ 6x + 3y + 2z = 7y \\ -3x + 2y + 6z = 7z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -5x - 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -\frac{28}{3}y + \frac{14}{3}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$

Ainsi $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et $f_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$

Et $P := E_1(A)^\perp$ a pour équation $y + 2z = 0$.
$f_1 = (1, 0, 0)$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)$ sont des vecteurs orthogonaux qui forment une base de P. Comme $P \overset{\perp}{\oplus} E_1(A) = \mathbb{R}^3$ alors (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$:

$\text{Mat}_{(f_1, f_2)}(u) = R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ d'où

$u(f_1) = \frac{1}{7}(2, 6, -3) = \lambda(1, 0, 0) + \beta \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)$
avec $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$

donc $\lambda = \frac{2}{7}$ et $\beta = \frac{-\sqrt{5} \cdot 3}{7}$
d'où u est la rotation d'angle $\text{Arccos}\left(\frac{2}{7}\right)$
d'axe $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Mehdi B. Colle de la semaine 19

$J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $u = \mathrm{Mat}_{B_0}(J)$

où $B_0 = \mathrm{Can}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Trouver $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

tels que $D = P^T J P$

- $J \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc par théorème spectral D et P existent (et J est diagonalisable sur $\mathbb{R}$)

- Déterminons D

n est valeur propre pour le vecteur $(1 \ldots 1)^T$.
0 est valeur propre pour $(1, -1, 0 \cdots 0)^T$.
$rg(J) = 1$ donc par théorème du rang,
$\dim \underbrace{\ker(J)}_{E_0(J)} = n - 1$.

Comme J diagonalisable, $\mathrm{mult}(0, J) = n-1$ et $\mathrm{mult}(n, J) = 1$.
De plus par théorème spectral, la base B constituée de vecteurs propres pour 0 et n est orthonormée.
Et :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_B(u)}$$

· Déterminons P. On pose $\mathcal{B} = (f_1 \dots f_n)$.

$$P = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \dots & \\ \vdots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & & \\ \vdots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & & \\ \vdots & \vdots & 0 & & \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & \end{pmatrix} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ /e_n \end{array}$$

· $(1, \dots, 1)^T \in E_n(J)$. On choisit pour f_1 son normalisé, c'est-à-dire $(1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})^T$

· $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0 \dots 0)^T \in E_0(J)$ et est orthogonal à f_1 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ usuel. Comme il est de norme 1, on le choisit pour f_2.

· $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}) \in E_0(J)$ et est orthogonal à f_1 et f_2. On le normalise pour avoir f_3.

On itère le processus jusqu'à $f_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}, \dots \frac{-n-1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}\right)$

On vérifie qu'il est orthogonal aux f_i, appartient à $E_0(J)$ et :

$$\|f_n\| = \frac{n-1}{n(n-1)} + \frac{(n-1)^2}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$$

Oudoine Gatien

1) Déterminer les matrices ~~symétriques~~ nilpotentes de $S_n(\mathbb{R})$
2) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, $MM^T = M^TM$ et M nilpotente. Montrer que $M = 0$

1) ~~Soit~~ Raisonnons par analyse - synthèse

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit M une matrice symétrique nilpotente d'indice p de $M_n(\mathbb{R})$.

Appliquons le théorème spectral car cette matrice est à coefficients réels et symétrique.

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \quad P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^T = M$$

avec λ_i les valeurs propres de M

$M^p = 0$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i^p = 0$

$\mathbb{R}$ étant intègre $\lambda_i = 0$

donc $M = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement $0 \in S_n(\mathbb{R})$

donc 0 est la seule matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$

2) $(MM^T)^T = (M^T)^T M^T = MM^T$

donc $MM^T \in S_n(\mathbb{R})$

Soit p le nil-indice de M

$(MM^T)^p = M^p (M^T)^p$ car M commute avec M^T

donc $(MM^T)^p = 0$

grâce à 1) on obtient que $MM^T = 0$

donc $Tr(M^T M) = 0$

par séparation du produit scalaire $M = 0$

or on sait que $a_{ii} = b_{ii}$ et $a_{jj} = b_{jj}$

donc $a_{ij} = b_{ij}$

donc on obtient que

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{ij} = b_{ij}$

donc $\boxed{A = B}$

Stanislas G

Enoncé :

Soit $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que $A-B$ et $B-A$ appartiennent à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Que dire de A et B ?

Solutions : Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$

Comme $A-B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B-A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ on a :

~~Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$~~ $\begin{cases} X^T(A-B)X \geqslant 0 \\ \text{et} \\ X^T(B-A)X \geqslant 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} X^TAX - X^TBX \geqslant 0 \\ \text{et} \\ X^TBX - X^TAX \geqslant 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} X^TAX \geqslant X^TBX \\ \text{et} \\ X^TBX \geqslant X^TAX \end{cases}$

donc $X^TBX = X^TAX$

donc on obtient

$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \qquad X^TBX = X^TAX$

où $B = (b_{ij})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$A = (a_{ij})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

or $X^TBX = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n x_j b_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j b_{nj} \end{pmatrix}$

$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j b_{ij} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j b_{ij}$

de même $X^TAX = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j b_{ij}$

il vient donc $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j b_{ij} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j a_{ij}$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

- en spécifiant $x_i \leftarrow 1$ et $\forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ $x_j \leftarrow 0$

  il vient $a_{ii} = b_{ii}$

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$

  en spécifiant $x_i \leftarrow 1$ et $x_j \leftarrow 1$

  il vient $a_{ii} + a_{ij} + a_{jj} = b_{ii} + b_{ij} + b_{jj}$

Mouchonnet Raphaël — colle semaine n° 19

Enoncé : Soit $(A,B)\in S_n(\mathbb{R})^2$

1) Montrer que s'il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B=PA$, alors $A^2=B^2$

2) On suppose $A^2=B^2$:

a) Montrer que $rg(A^2)=rg(A)$

b) déduire que $\ker(A)=\ker(B)$ et $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(B)$

c) Montrer qu'il existe $Q\in O_n(\mathbb{R})$, $r\in [\![0,n]\!]$, $(\tilde{A},\tilde{B})\in(S_n(\mathbb{R})\times GL_r(\mathbb{R}))^2$ tel que

$$A=Q\begin{pmatrix}\tilde{A} & \\ & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}Q^T \quad \text{et} \quad B=Q\begin{pmatrix}\tilde{B} & \\ & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}Q^T$$

d) Montrer la réciproque de la question 1.

Solution : Soit $(A,B)\in S_n(\mathbb{R})$

1) Supposons $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$ tel que $B=PA$.

$$A^2 \underset{P\in O_n(\mathbb{R})}{=} AP^TPA = (PA^T)^TB \underset{A\in S_n(\mathbb{R})}{=} B^TB \underset{B\in S_n(\mathbb{R})}{=} B^2 \qquad \square$$

2) Supposons $A^2=B^2$

a) Par théorème spectral pour les matrices symétriques réelles $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$, $(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$A=P\begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}P^T \quad \text{donc} \quad A^2=P\begin{pmatrix}d_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2\end{pmatrix}P^T$$

Sachant $rg(A)=\dim(\mathrm{Vect}((d_1,\dots,0),\dots,(0,\dots,d_n)))$

$= \#\{i\in[\![1,n]\!] : d_i\neq 0\}$

$= \#\{i\in[\![1,n]\!] : d_i^2\neq 0\}$

$= rg(A^2)$

b) Montrons que $\ker(A)\subset\ker(A^2)$

Soit $X\in\ker(A)$ $AX=0$ donc $AAX=0$ et $X\in\ker(A^2)$

Sachant ~~dim(A)~~ $n=rg(A)+\dim(\ker(A))$

alors par a) $\dim(\ker(A))=\dim(\ker(A^2))$

ainsi on conclut que $\ker(A)=\ker(A^2)$

Ainsi $\ker(A) = \ker(B)$.

De même montrons que $\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A)$

Soit $Y \in \mathrm{Im}(A)$ $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^2X = Y$.

Donc $A \underbrace{AX}_{\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = Y$ et $Y \in \mathrm{Im}(A)$.

On conclut par dimension que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$

et donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

c) On pose $\mathcal{B}_0 = \mathrm{Can}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$

$v \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ tel que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$

u et v sont des automorphisme car $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.

u stabilise $\ker(u) = \ker(v)$ donc

$u^* = u$ stabilise $\ker(u)^\perp = \ker(v)^\perp$

De même v stabilise $\ker(u)$ et $\ker(u)^\perp$

Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux base orthonormées de $\ker(u)$ et $\ker(u)^\perp$. Alors $\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \# \mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Ainsi on pose $r = \dim(\ker(u)^\perp) \in [\![0, n]\!]$

$Q = \underbrace{P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{C}}}_{\text{BON}} \in O_n(\mathbb{R})$

et $\tilde{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_{\ker(u)^\perp}) \in S_r(\mathbb{R})$ (car $u_{\ker(u)^\perp}$ automorphisme)

$\tilde{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(v_{\ker(v)^\perp}) \in S_r(\mathbb{R})$ (car $v_{\ker(v)^\perp}$ automorphisme)

de plus $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont de rang r donc $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in GL_r(\mathbb{R})$.

Et par théorème de changement de bases:

$$A = Q \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0_{(n-r,n-r)} \end{pmatrix} Q^T \text{ et } B = Q \begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 \\ 0 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} Q^T$$

Antoine B. colle de la semaine 19.

Exercice. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme f de E est *antisymétrique* si : $f^* = -f$.

1. Montrer que si f est un endomorphisme antisymétrique de E, alors : $-f^2 \in \mathrm{S}^+(E)$.
2. Que dire un endomorphisme antisymétrique et diagonalisable ?
3. On pose : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_-^*$, $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda} & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour toute matrice antisymétrique réelle A, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des réels strictement négatifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que A soit semblable à la matrice diagonale par blocs : $\mathrm{Diag}\left(0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}, B_{\lambda_1}, \ldots, B_{\lambda_r}\right)$. Que peut-on dire des λ_i ?

Une selection:

1. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E.

soit $x \in E$:

- $\langle -f^2(x), x \rangle = \langle -f \circ f(x), x \rangle$
$= \langle f^* \circ f(x), x \rangle$
$= \langle f(x), f(x) \rangle \geq 0$

(par positivité du produit scalaire)

- montrons que $(-f^2)^* = -f^2$

$(-f^2)^* = (-f \circ f)^* = (f^* \circ (-f)^*) = -f \circ f$
$= -f^2$

donc $-f^2$ est bien un autoadjoint positif de E.

2. f endomorphisme antisymétrique et diagonalisable de E.

alors $-f^2 \in S^+(E)$ (d'après 1.)

f diagonalisable $\Rightarrow \exists\, \mathcal{C}$ base de E telle que

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad \text{où } (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n.$$

ainsi $$Mat_{\mathcal{C}}(-f^2) = \begin{pmatrix}-\lambda_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda_n^2\end{pmatrix}.$$

On remarque que $((-\lambda_1^2),\dots,(-\lambda_n^2))$ sont valeurs propres de $-f^2$.
or $-f^2 \in S^+(E)$ donc $\forall i\in[\![1,n]\!],\ -\lambda_i^2 \geq 0$

ie: $0\leq \lambda_i^2 \leq 0$

donc tous les $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont nuls.

(*) livre que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3. $A\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Soit f endomorphisme de E canoniquement associé à A.

on sait que : $\exists F$ sev stable de E tel que $\dim(F)=1$ ou 2.

Procédons par récurrence sur la dimension de E. $n=|E|$.

Initialisation à $n=1$:

$A\in\mathcal{A}_1(\mathbb{R}) = \{(0)\}$.

$A=(0)$ ✓

Initialisation à $n=2$: • si $f=0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ est de la forme voulue.

• sinon, $\exists\, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix} = Mat_B(f)$ où $B=(e_1,e_2)$ est de la forme voulue.

quitte à échanger e_1 et e_2 dans B pour avoir un réel négatif en haut à droite.

Hérédité : Soit $n\geq 2 \in\mathbb{N}$ tel que le résultat est vrai pour les ev euclidiens de dimension $1,2,\dots,n$.

Soit E un ev euclidien tq $|E|=n+1$.

Idée : on imite la démonstration du cas f autoadjoint mais avec f antisymétrique.

Hugo D. Colle de la semain 19

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (A,B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2 \\ \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n} \leq \det(A+B)^{1/n}\end{array}}$$

Solution : Soit $(A,B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

- Si $B = I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ Par théorème spectral $(+ A \in S_n^{++}(\mathbb{R}))$

$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ tel que $A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^T$

Donc $A+B = P\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1\end{pmatrix}P^T$

On pose $f \left| \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(e^x+1)\end{array}\right.$ convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
et si $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \geq 0$.

Par l'inégalité de Jensen appliquée aux points $\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n)$
aux poids $\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(\lambda_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\ln(\lambda_i))$$

Donc $\ln\left(e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)} + 1\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(\lambda_i + 1)$

Ainsi
(exp ↗ sur $\mathbb{R}$)
+ forme exp-ln

$$\underbrace{\prod_{i=1}^n \lambda_i^{1/n} + 1^{1/n}}_{= \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}} \leq \prod_{i=1}^n (\lambda_i+1)^{1/n} = \det(A+B)^{1/n}$$

- Si B quelconque Comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a vu que $\exists R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $B = R^2$

Donc $\det(A+B) = \det(R(R^{-1}AR^{-1} + I_n)R) = \det(R)^2 \det(\underbrace{R^{-1}AR^{-1}}_{C} + I_n)$

R inversible car $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

- $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $R^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $R^T = R \Rightarrow R^{-1}R^T = I_n$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ R^{-1T}}}{R^{T^{-1}}} = R^{-1}$$

- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ $\rightsquigarrow R^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ car R^{-1} inversible

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ $\underset{\substack{\vee \\ 0}}{(R^{-1}X)^T A R^{-1}X} = X^T R^{-1} A R^{-1} X = X^T C X$

Donc $C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Donc par le premier cas $\det(A+B)^{1/n} = \det(R)^{2/n} \det(C+I_n)^{1/n}$

$$\geq \det(R)^{2/n} \left(\det(C)^{1/n} + 1 \right)$$

$$= \det(RCR)^{1/n} + \det(R^2)^{1/n}$$

$$= \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$$

Remi . S

Semaine n° 17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit A et B des sous espaces vectoriels tel que $E = A \oplus B$.

Soit p_1 et p_2 des projecteurs sur A et B.

$a = p_1 + p_2$.

Montrer que $0 < \det(a) \leq 1$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormé de A
Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormé de B.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \# (f_1, \dots, f_p)$ est une base de E car $A \oplus B$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ $\quad p_1(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k \underbrace{\langle e_i ; e_k \rangle}_{\text{nul si } i \neq k}$

$= e_i$

$p_2(e_i) = \sum_{k=1}^{p} f_k \langle e_i ; f_k \rangle$

Soit $j \in [\![1 ; p]\!]$ $\quad p_1(f_j) = \sum_{k=1}^{n} e_k \langle f_j ; e_k \rangle$

$p_2(f_j) = f_j$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & \dots & e_n & f_1 & \dots & f_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \langle e_1 ; f_1 \rangle & \dots & \langle e_1 ; f_p \rangle \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & & & \\ \langle e_1 ; f_1 \rangle & \dots & \langle e_n ; f_1 \rangle & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \langle e_1 ; f_p \rangle & \dots & \langle e_n ; f_p \rangle & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$= (\langle b_i ; b_j \rangle)_{(i,j) \in [\![1 ; n+p]\!]}$

avec b_i le i-ème vecteur de la base $\mathcal{B}$.

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) \in S_n(\mathbb{R})$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{R})$

$X^T \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A) X = \langle \sum_{i=1}^{n+p} x_i b_i ; \sum_{i=1}^{n+p} x_i b_i \rangle \geq 0$

si $\| \sum_{i=1}^{n+p} x_i b_i \| = 0$ alors $\sum_{i=1}^{n+p} x_i b_i = 0$

alors si $X \neq 0$, $\| \sum x_i b_i \| > 0$

Donc $Mat_{\mathcal{B}}(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

donc $Spec(Mat_{\mathcal{B}}(a)) \subset \mathbb{R}_*^+$

d'où $\det(a) > 0$

De l'inégalité : $\det(a) \leq \frac{Tr(a)}{n}$

et $Tr(a) = Tr(Mat_{\mathcal{B}}(a)) = n$

on a $\det(a) \leq 1$

Pierre T. Colle de la semaine 19

Exercice 1 :

Sot $A \in S_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe un réel λ qui est racine à la fois de $\mathcal{X}_A$ et de $\mathcal{X}'_A$.

Démontrer que , pour tout vecteur v de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$ est liée.

Solution :

Par l'absurde supposons qu'il existe $v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$ soit libre.

$\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k v = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \implies \forall k \in [\![0, n-1]\!] \ \lambda_k = 0$

donc $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad P(A)v = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \implies P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

or comme χ_A et χ_A' ont une racine commune λ, λ est de multiplicité au moins 2 dans χ_A, et comme $A \in S_n(\mathbb{R})$, par le théorème spectral A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et donc μ_A le polynôme minimal de A est scindé à racines simples, et comme μ_A divise χ_A par le théorème de Cayley-Hamilton, et que χ_A est de degré n, comme la multiplicité de λ dans μ_A est 1, on a donc $\deg(\mu_A) \leq n-1$.

donc $\mu_A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mu_A(A)v = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ $\mathcal{E}$.

donc $\forall v \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad (v, Av, \dots, A^{n-1}v)$ est liée.

Léa N.

Colle de la semaine n° 19

Énoncé :

$E, <.,.>$ espace euclidien de dimension $n \geq 2$

$T = \{ u \in \mathcal{L}(E) : u$ est symétrique, de rang inférieur ou égal à 1, positif $\}$

1/ Soit $a \in E$, $u_a : x \longmapsto <a, x>.a$

Montrer que $u_a \in T$.

2/ Soit $u \in T \setminus \{0\}$, $b \in \mathrm{Im}(u) \setminus \{0\}$

Montrer que b est un vecteur propre associé à $\mu \geq 0$

3/ En déduire qu'il existe $a \in E$ tel que $u = u_a$

Solution :

1/ Soit $(x, y) \in E^2$

$$<u_a(x), y> = < <x,a> a , y>$$

$$= <x,a> <a,y>$$

$$= <x, \underbrace{<a,y> a}_{u_a(y)} >$$

$$= <x, u_a(y)>$$

Donc $u_a = u_a^*$

. Montrons que $rg(u_a) \leq 1$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$

$\exists x \in E \quad y = <x,a> a$

Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(a)$, $a \neq 0$

Or $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$

Donc $\mathrm{rg}(u_a) \leq 1$

. Soit $x \in E$

$\langle u_a(x), x\rangle = \langle a, x\rangle\langle a, x\rangle$

$= \langle a, x\rangle^2 \geq 0$

$\boxed{\text{Donc } u_a \in T}$

2/ Soit $b \in \mathrm{Im}(u) \setminus \{0\}$

$\exists x \in E \quad b = u(x)$

. Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(b)$

Or $\mathrm{rg}(u) \leq 1$

Donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(b)$

. $u(b) = u^2(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(b)$

$\boxed{\text{Donc } \exists \mu \in \mathbb{R} \quad u(b) = \mu b}$

4/ Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. $\exists x \in E \quad y = u(x)$

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = u(x) = \lambda b$

$\langle y, b\rangle = \lambda \underbrace{\|b\|^2}_{\neq 0}$

Donc $\lambda = \dfrac{\langle y, b\rangle}{\|b\|^2}$

Alors $u(x) = \left\langle \dfrac{u(x)}{\|b\|^2}, b\right\rangle b = \left\langle x, \dfrac{b}{\|b\|}\right\rangle \dfrac{b}{\|b\|}$

(u est symétrique)

$\boxed{\text{Donc } u = u_{\frac{b}{\|b\|}}}$

Celia A.

Alexandre M.

Rapport de colle S19.

énoncé:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une matrice $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ est diagonale.

Solution:

$A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Selon le théorème spectral,

$\exists P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \quad \exists D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}) \quad A = PDP^T$.

Par conséquent, <u>A est diagonalisable</u>.

Calculons le polynôme caractéristique χ_A de A.

$$\begin{vmatrix} X-1 & 2 & 2 \\ 2 & X-1 & 2 \\ 2 & 2 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+3 & 2 & 2 \\ X+3 & X-1 & 2 \\ X+3 & 2 & X-1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3.$$

$$= (X+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & 2 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1. \end{matrix}$$

Donc $\chi_A = (X-3)^2(X+3)$. D'où $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{3; -3\}$.

Comme le polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$ et A diagonalisable, $\dim(E_{-3}(A)) = \mathrm{mult}(\chi_A, -3) = 1$.
De même, $\dim(E_3(A)) = 2$.

Ainsi, $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Posons $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ base orthonormé de $E_{-3}(A)$.

On cherche une base de $E_3(A)$

Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$AX = 3X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3x_1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3x_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$

donc $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

on pose $f_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $f_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

on applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur (f_2, f_3).

$\varepsilon_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\varepsilon_2' = f_2 - \langle f_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\underbrace{\|\varepsilon_2'\|}_{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ BON de $E_3(A)$

Or, le théorème spectral livre

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = E_3(A) \overset{\perp}{\oplus} E_{-3}(A).$$

Donc $(f_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ forme une base orthonormée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notée B_1.

De plus, si on note B_0 la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $P_{B_0 \to B_1}$ est une matrice orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées.

Enfin, en notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3$ canoniquement associé à A et avec le théorème de changement de bases, nous obtenons :

$$\text{Mat}_{B_0}(u) = P_{B_0 \to B_1} \ \text{Mat}_{B_1}(u) \ P_{B_1 \to B_0}$$

où . $\text{Mat}_{B_0}(u) = A$

. $P_{B_0 \to B_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$

. $P_{B_1 \to B_0} = (P_{B_0 \to B_1})^T$

. $\text{Mat}_{B_1}(u) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Sophie G

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^T = -A$

En plongeant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Calculer $\overline{X}^T A X$ et en déduire que toutes les valeurs propres de A sont dans $i\mathbb{R}$.

Puis, que $\det(A) \geq 0$

Solution

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

$$\boxed{\overline{X}^T A X = -\overline{X}^T A^T X}$$

Soit X_p vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$

alors $AX_p = \lambda X_p \Rightarrow \overline{X_p}^T A X_p = \overline{X_p}^T \lambda X_p = \underline{\lambda \overline{X_p}^T X_p}$ (1)

$$\overline{X_p}^T A X_p = -\overline{X_p}^T A^T X_p \overset{*}{=} -(\overline{A X_p})^T X_p = \underline{-(\overline{\lambda X_p})^T X_p} \quad (2)$$

* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\overline{A} = A$

Comme (1) = (2) : $\lambda = -\overline{\lambda}$

donc $\boxed{\lambda \in i\mathbb{R}}$

Soit $\mu \in \mathbb{R}$

$\chi_A(\mu) = \det(\underbrace{\mu I_n - A}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \in \mathbb{R}$ donc $\underline{\chi_A \in \mathbb{R}[X]}$

D'où $\chi_A = \overline{\chi_A} = \overline{\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)}$ où Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ λ_i valeur propre $\in i\mathbb{R}$ de A.

$$= \prod_{i=1}^{n} \overline{(X - \lambda_i)} = \prod_{i=1}^{n} (X - \overline{\lambda_i})$$

donc $\overline{\lambda_i}$ est aussi valeur propre de A ($i \in [\![1,n]\!]$)

Alors $\det(A) = \left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \cap i\mathbb{R}_+} \lambda\right) \left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \cap i\mathbb{R}_-} \lambda\right) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda|^2 \geq 0$

d'où $\boxed{\det(A) \geq 0}$

Wassim M.

Rapport de Colle, semaine 19

Exercice : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $MM^TM = I_n$ (E)

1) Montrons que toute solution est symétrique

2) Résoudre

Solution :

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ solution de (E)

$(MM^TM)^T = M^TMM^T = I_n$ donc $M^T = (MM^T)^{-1}$

et par (E) on a $MM^T = M^{-1}$

ainsi $M = M^T$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $MM^TM = I_n$

or d'après 1), $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $M = M^T$ et $MM^TM = M^3$

donc I_n solution de (E)

De plus, par le théorème spectral, M est diagonalisable

$\mu_M(X) = X^3 - 1$ et $\mathrm{Spec}(M) = \{1\}$ et donc (E) possède une unique solution.

$\mathrm{Sol}(E) = \{I_n\}$

Léon . N

Rapport de colle de la semaine n°19

Énoncé : soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(S) \subseteq i\mathbb{R}$.

2) Soit $(A,S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ montrer que $\det(A+S) \geq \det(S)$

Solution :

1) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$, $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} X^* A X = \lambda \|X\|^2 \\ X^* \underbrace{A^*}_{-A \text{ car } A \text{ est à coefficients réels.}} X = \bar{\lambda} \|X\|^2 \end{cases}$$

* en sommant ces deux lignes

Ainsi $\lambda + \bar{\lambda} \overset{*}{=} 0$, on en déduit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ donc $\boxed{\lambda \in i\mathbb{R}.}$

2) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, supposons pour le moment que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Par le théorème spectral, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $S = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$.

donc $S = R^T R$ avec $R = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P \in GL_n(\mathbb{R})$ (groupe stable par $\times$).

ainsi

$$\det(A+S) = \det(R^T) \det(\underbrace{(R^T)^{-1} A R^{-1}}_{:= C} + I_n)$$

$$\chi_C = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C)} (X - \lambda)^{\mathrm{mult}(\lambda, C)} = \left(\prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C) \\ \mathrm{Im}(\lambda) > 0}} (X-\lambda)^{\mathrm{mult}(\lambda,C)} \right) \left(\prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C) \\ \mathrm{Im}(\lambda) < 0}} (X-\lambda)^{\mathrm{mult}(\lambda, C)} \right)$$

$$= \left(\prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C) \\ \mathrm{Im}(\lambda) > 0}} (X-\lambda)^{\mathrm{mult}(\lambda,C)} \right) \left(\prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C) \\ \mathrm{Im}(\lambda) > 0}} (X-\bar{\lambda})^{\underbrace{\mathrm{mult}(\bar{\lambda}, C)}_{\mathrm{mult}(\lambda, C) \text{ car } C \text{ est à coefficients réels}}} \right)$$

Car la conjugaison est une symétrie

$$= \left(\prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(C) \\ \mathrm{Im}(\lambda) > 0}} \underbrace{((X - \underbrace{\lambda}_{i|\lambda| \text{ par } 1})(X - \bar{\lambda}))}_{X^2 + |\lambda|^2}^{\mathrm{mult}(\lambda, C)} \right)$$

Ainsi en évaluant en 1.

$$\det(A+S) = \det(\underbrace{R^T R}_{S}) \underbrace{\prod_{\substack{\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(C) \\ Im(\lambda) > 0}} (1 + \underbrace{|\lambda|^2}_{\geq 0})^{mult(\lambda, C)}}_{\geq 1}$$

ainsi $\forall (A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \det(A+S) \geq \det(S)$

Soit $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, par théorème spectral,
$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad S = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$

Soit $\varepsilon > 0$, comme

$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i + \varepsilon > 0$

Ainsi $S_\varepsilon = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + \varepsilon \end{pmatrix} P$ n'a que des valeurs propres strictement positives. $S_\varepsilon \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$.

Par continuité de la multiplication $\times$ (bilinéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie)

$S_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} S.$

Or le déterminant est continu (multilinéaire) et l'inégalité vaut pour S_ε.

On en déduit que

$$\boxed{\det(A+S) \geq \det(S)}$$

Louis
Delion

Semaine de colle n° 19

Énoncé :

Soit p et q des projections orthogonales de E, espace euclidien de dimension $n \geq 1$

1) Mq : $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que $\mathrm{Spec}(p \circ q \circ p) \subset [0,1]$

2) Exprimer $(\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q)^\perp$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$

3) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable et que $\mathrm{Spec}(p \circ q) \subset [0,1]$

Une solution :

1) $(p \circ q \circ p)^* = (q \circ p)^* \circ p^*$

$= p^* \circ q^* \circ p^*$

p et $q \in \mathcal{S}(E)$ car sont des projections $\perp$ $= p \circ q \circ p$

Donc $p \circ q \circ p \in \mathcal{S}(E)$ est diagonalisable par théorème spectral.

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(p \circ q \circ p)$ et x $\vec{vp}$ associé non nul.

~~Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(p \circ q \circ p)$ a~~

$$\left.\begin{aligned} \|x\|\,|\lambda| &= \|p \circ q \circ p(x)\| \\ &\leq \|q \circ p(x)\| \\ &\leq \|p(x)\| \\ &\leq \|x\| \end{aligned}\right\} p \text{ et } q \text{ projections}$$

Comme $\|x\| > 0$, $|\lambda| \leq 1$

Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}_+$

Soit $y \in E$

$$\begin{aligned} \langle p \circ q \circ p(y), y \rangle &= \langle q \circ p(y), p(y) \rangle \\ &= \| p(y) \|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc $p \circ q \circ p \in \mathcal{S}^+(E) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$

2) Montrons que $(\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q))^\perp = \mathrm{Im}(p)^\perp \cap \mathrm{Ker}(q)^\perp$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(p)^\perp \cap \mathrm{Ker}(q)^\perp$

$\forall y \in \mathrm{Im}(p) \quad \langle x, y \rangle = 0$

$\forall y \in \mathrm{Ker}(q) \quad \langle x, y \rangle = 0$

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

$\exists (y_1, y_2) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(q) \quad y = y_1 + y_2$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in (\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q))^\perp$

$\forall (y_1, y_2) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(q)$

$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = 0$

Soit $y_1 \in \mathrm{Im}(p)$

$\langle x, \underbrace{y_1}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{0}_{\in \mathrm{Ker}(q)} \rangle = 0$

Donc $x \in \mathrm{Im}(p)^\perp$ et $x \in \mathrm{Ker}(q)^\perp$ de même car $0 \in \mathrm{Im}(p)$.

Comme p et q sont des projections orthogonaux :

$(\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q))^\perp = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$

3) On a donc $E = (\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$

$$p \circ \underbrace{q(x)}_{x} = p(x) = 0$$

car $x \in \mathrm{Im}(q)$ et q proj. $\qquad$ $\uparrow x \in \mathrm{Ker}(p)$

Donc $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$

- Soit $x = y + z \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

$$p \circ q(x) = p \circ q(y) + p \circ \overset{0}{\cancel{q}}(z)$$

$$= p \circ q \circ p(y) \qquad (y \in \mathrm{Im}(p))$$

On complète $(e_1, \dots, e_m)$ en $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec des vecteurs propres de $p \circ q \circ p$. (Q1)

$\forall i \in [\![m+1, n]\!] \quad \exists \lambda_i \in [0, 1]$

$$p \circ q \circ p(e_i) = \lambda_i e_i$$

<u>Si $\lambda_i \neq 0$</u>, $e_i = p \circ q\left(p\left(\frac{1}{\lambda_i} e_i\right)\right)$

et $e_i \in \mathrm{Im}(p)$

<u>Si $\lambda_i = 0$</u>, on va dire que $e_i \in \mathrm{Im}(p)$ aussi

$$\mathrm{Mat}_{(e_1, \dots e_n)}(p \circ q) = \begin{array}{c} p\circ q(e_{m+1}) \dots p\circ q(e_1) \dots p\circ q(e_m) \\ \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /e_{m+1} \\ \vdots \\ /e_n \\ /0 \\ \vdots \\ /0 \end{array}$$

Youssef B Colle de la semaine 19

Exercice :

soit E espace euclidien vectoriel, $(a,b) \in E^2$.

Déterminer l'adjoint f^* de $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$\forall x \in E \quad f(x) = \langle a,x\rangle b - \langle b,x\rangle a$

Solution :

soit $(x,y) \in E^2$

$$\begin{aligned}
\langle f(x),y\rangle &= \langle \langle a,x\rangle b - \langle b,x\rangle a , y\rangle \\
&= \langle \langle a,x\rangle b , y\rangle - \langle \langle b,x\rangle a , y\rangle \\
&= \langle a,x\rangle \langle b,y\rangle - \langle b,x\rangle \langle a,y\rangle \\
&= \langle x,a\rangle \langle b,y\rangle - \langle x,b\rangle \langle a,y\rangle \\
&= \langle x, a\langle b,y\rangle\rangle - \langle x, b\langle a,y\rangle\rangle \\
&= \langle x, a\langle b,y\rangle - b\langle a,y\rangle\rangle
\end{aligned}$$

On a alors f^* définie par

$\forall y \in E \quad f^*(y) = a\langle b,y\rangle - b\langle a,y\rangle$

MANGIACOMINI
Aurélien

Rapport de Colle

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

a) Montrer que $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$

b) Montrer que $\langle x, f(x) \rangle = \lambda_1 \|x\|^2 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 id_E)$

---

a) D'après le théorème spectral, on a ;
Comme $f \in \mathcal{S}(E)$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)$
Donc soit $x \in E$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$
où $\forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i \in E_{\lambda_i}(f)$

donc $\langle x, f(x) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i , \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(x_j)}_{= \lambda_j x_j} \rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle x_i , x_j \rangle}_{= \delta_{ij} \|x_j\|^2}$

01

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{\lambda_1 \leq \quad \leq \lambda_n} \|x_j\|^2$$

donc $\lambda_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2}_{(\text{Pythagore}) = \|x\|^2} \leq \langle x, f(x) \rangle \leq \lambda_n \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2}_{= \|x\|^2}$

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\langle x, f(x) \rangle = \lambda_1 \|x\|^2$

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|x_j\|^2 \quad (\text{d'après a}))$$

donc $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|x_j\|^2 - \underbrace{\lambda_1 \|x\|^2}_{= \sum_{j=1}^{n} \lambda_1 \|x_j\|^2 \ (\text{Pythagore})} = 0$

donc $\sum_{j=1}^{n} (\underbrace{\lambda_j - \lambda_1}_{\geq 0}) \underbrace{\|x_j\|^2}_{\geq 0} = 0$

donc $\forall j \in [\![1 ; n]\!] \quad (\underbrace{\lambda_j - \lambda_1}_{> 0}) \|x_j\|^2 = 0$

sauf pour $j = 1$

donc par intégrité, $\forall j \in [\![2 ; n]\!] \quad \|x_j\|^2 = 0$

donc $x_j = 0$

Finalement $x = x_1 \in E_{\lambda_1}(f)$.

Titouan

D

Exercice 114. Soit $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $A-B$ et $B-A$ appartiennent à $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$. Que dire de A et B ?

$A-B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Donc par théorème spectral matriciel,
$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$A-B = P \, \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \, P^T$$

$A-B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!] \quad \lambda_i \geqslant 0$

$B-A = -(A-B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!] \quad -\lambda_i \geqslant 0$

Donc $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad \lambda_i \leqslant 0 \leqslant \lambda_i$

$\forall i \in [\![1;n]\!] \quad \lambda_i = 0$

$$B-A = A-B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Donc $\boxed{A=B}$

Colle de la semaine n°19

Rayan G
MPI*

Enoncé: Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$

On se propose de démontrer qu'il existe $(P,D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R})$ tel que:

$$A = P^T P \quad \text{et} \quad B = P^T D P \quad (1)$$

1. Démontrer qu'il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = R^T R$.
2. Conclure qu'il existe $(P,D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R})$ vérifiant (1)
3. **Application:** Soit $(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$. Montrons que $Tr(AB) \geq 0$

Solution:

1. $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc par théorème spectral:

$$\exists C \in O_n(\mathbb{R}) \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad A = C \,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, C^T$$

Or $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$

On pose $R = C \,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\, C^T$

$C \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\det(R) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ (donc R inversible)

et $R^T = R$.

Il est simple de voir que $A = R^T R$.

2. On pose $B_1 = R^T B R \in S_n(\mathbb{R})$.

Par théorème spectral:

$$\exists Z \in O_n(\mathbb{R}) \quad \exists D \in D_n(\mathbb{R}) \quad B_1 = Z D Z^T$$

Donc $B = R Z B Z^T R^T = P^T Z P$ où $P = Z^T R^T$

$P \in GL_n(\mathbb{R})$ car produit d'élément de $GL_n(\mathbb{R})$, de plus $A = P^T P$ donc (P,D) vérifie (1).

7. On suppose dans un premier temps que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par la question 1, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = R$.

On remarque par ailleurs que $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Pour cette matrice, on voit par la question 1 qu'il existe $R' \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $R'^T R' = R$ et que $R'^T = R'$.

On remarque aussi que $BR \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

On applique le résultat de notre étude :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \quad R = P^T P \quad \text{et} \quad BR = P^T D P$$

Donc $B = BRR^{-1} = P^T D P P^{-1} (P^T)^{-1} = (P^T) D (P^T)^{-1} \sim D$

Ainsi $Tr(D) = Tr(B) \geq 0 \quad (B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$

Or $Tr(D) = Tr(B_1) = Tr(R'^T B R R') = Tr(BR \underbrace{R' R'^T}_{=R}) = Tr(BA)$
$= Tr(AB)$

Donc $Tr(AB) \geq 0$

Traitons désormais le cas général : On considère

$$f \left| \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ Q \mapsto Tr(QB) \end{array} \right.$$ bien défini, linéaire entre deux espaces de dimension finie donc continu

$\forall n \in \mathbb{N}$

On pose $A_n = A + C\,Diag(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})C^T$ où on définit $C \in O_n(\mathbb{R})$ comme vérifiant la relation

$A = CDC^T$ où $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ (Existence donné par le théorème spectrale)

$A_n \to A$ et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $Tr(A_n B) \geq 0$

Par passage à la limite : $Tr(AB) \geq 0$

Louis B — Colle de la semaine 19

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : [J]_{i,j} = 1$

Trouver $(P, D) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tq $J = PDP^T$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tq $Mat_{B_0}(u) = J$

On remarque que $J^2 = nJ$

Donc $X^2 - nX$ annule J et donc

$X^2 - nX = X(X-n)$, $Spec_{\mathbb{R}}(J) = \{0, n\}$

De plus comme $rg(J) = 1$

On en déduit que $mult(0) = n-1$

Donc $D = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

- Sous espaces propres :
  - $J\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ donc $E_n(J) = Vect\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right) = Vect(f_1)$

On complète en une BON de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ tq

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(f_1) & \cdots & u(f_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

(Théorème spectral et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) = E_n(u) \overset{\perp}{\oplus} E_0(u)$)

On note $B = (f_1, \dots, f_n)$ et alors

$$J = Mat_{B_0}(u) = P_{B_0 \to B} \, Mat_B(u) \, P_{B \to B_0}$$

Vérifions que

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \vdots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \\ \vdots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \quad 0 & & -\frac{n-1}{\sqrt{n^2-n}} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f_1 & \cdots & f_n \end{array} \end{array} \begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{array}$$

i^e position

- $\forall i \in [\![2,n]\!] \quad f_i = \left(\frac{1}{\sqrt{i^2-i}}, \frac{1}{\sqrt{i^2-i}}, \dots, -\frac{i-1}{\sqrt{i^2-i}}, 0 \right)^T$

Alors $\|f_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} [f_i]_k^2 = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{i^2-i} + \frac{(i-1)^2}{i^2-i}$

$= \frac{(i-1)}{i^2-i} + \frac{(i-1)^2}{i^2-i} = \frac{i^2-2i+1+i-1}{i^2-i}$

$= \frac{i^2-i}{i^2-i} = 1$ Donc f_i normé

- $\forall j \in [\![1,n]\!], \ \forall i \in [\![2,n]\!]$

$[Jf_i]_{j1} = \sum_{k=1}^{n} [J]_{jk} [f_i]_{k1}$

$= \sum_{k=1}^{i-1} [f_i]_{k1} + [f]_{i1}$

$= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{i^2-i}} - \frac{(i-1)}{\sqrt{i^2-i}} = \frac{(i-1)}{\sqrt{i^2-i}} - \frac{(i-1)}{\sqrt{i^2-i}}$

$= 0$ donc f_j $\vec{v_p}$ pour la vp 0.

- De la même manière, tous les f_i sont orthogonaux à f_1

- $\forall (i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, $i \neq j$ et ops $i < j$ (quitte à échanger)

$\langle f_i, f_j \rangle = f_i^T f_j = \sum_{k=1}^{n} [f_i^T]_{1k} [f_j]_{k1} = \sum_{k=1}^{n} [f_i]_{k1} [f_j]_{k1}$

$= \sum_{k=1}^{i} [f_i]_{k1} [f_j]_{k1} = \frac{1}{\sqrt{j^2-j}} \left[\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{i^2-i}} - \frac{(i-1)}{\sqrt{i^2-i}} \right]$

$= \frac{1}{\sqrt{j^2-j}} \times 0 = 0$ donc $f_j \perp f_i$

Ainsi les $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ forment bien une base orthonormée ($P \in O(\mathbb{R})$) de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Mat}_B(u) = \mathrm{Diag}(n, 0, \dots, 0)$ ◻

Lina A Colle de la semaine 19.

Énoncé :

Exercice 5 :
Soient f et g deux rotations d'un espace euclidien orienté de dimension 3. A quelle(s) condition(s) a-t-on $f \circ g = g \circ f$.

Solution

Si $f = g$ on a bien $f \circ g = g \circ f$.
De même si f ou g est égale à l'identité
Sinon, raisonnons par analyse synthèse :

(A) Supposons $f \circ g = g \circ f$.
Soit u un vecteur unitaire de l'espace qui engendre l'axe de rotation de f alors

$$\mathrm{Vect}(u) = E_1(f).$$

Donc $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$.
Donc $g(u) \in E_1(f) = \mathrm{Vect}(u)$
Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ $g(u) = \lambda u$.
Or g est une isométrie vectorielle, alors

$\|g(u)\| = |\lambda| \, \|u\|$ donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

1er cas : $\lambda = 1$.
alors $g(u) = u$ donc $u \in E_1(g)$
et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ $g(\mu u) = \mu u$
donc $\mathrm{Vect}(u) \subset E_1(g)$ et $E_1(g) \subset \mathrm{Vect}(u)$
donc $\mathrm{Vect}(u) = E_1(g)$
donc f et g ont même axe de rotation.

2e cas : $\lambda = -1$.
alors $g(u) = -u$.
donc $f(g(u)) = f(-u) = -f(u)$. ⊛

Soit $\mathcal{B}$ une BON de l'espace, comme $\mathrm{Mat}(\cdot)$ est un morphisme de groupes :

$-\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g(u))$.

ie $\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

on cherche donc g tel que dans la base B considérée

$$\begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix}$$

on remarque que pour $x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$

$x_1 = x_9 = -1$

$x_5 = 1$.

on a le résultat donc.

$$Mat_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\pi) & O_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ O_{\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Synthèse</u> : Si $\lambda = -1$,

Soit B une BON de l'espace

$$Mat_B(g \circ f) = Mat_B(g)\, Mat_B(f) = Mat_B(f)\, Mat_B(f).$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 1$.

Soit B une BON de l'espace.

on a

$$Mat_B(fg) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & O_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ O_{\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta_2) & O_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ O_{\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{R morphisme de groupe.}}{=} \begin{pmatrix} R(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maximilien. T. Colle N° 19

> Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^* \circ f = f \circ f^*$
>
> Montrer que $\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(f^*)$

Solution

Soit $x \in E$ Montrons $\|f^*(x)\| = \|f(x)\|$

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle = \langle x, f(f^*(x))\rangle = \langle x, f^*(f(x))\rangle$$
$$= \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2$$

On conclut grâce à l'injectivité de $\cdot^2$ sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f) \iff \|f(x)\| = 0 \iff$
$\iff \|f^*(x)\| = 0$
$\iff x \in \mathrm{Ker}(f^*)$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^*)$

Montrons désormais que $\mathrm{Spec}(f) \subset \mathrm{Spec}(f^*)$
Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$

Posons $g_\lambda = f - \lambda id_E$

Ainsi $g_\lambda^* = f^* - \lambda id_E$

$(\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x, f(y) - \lambda y\rangle = \langle x, f(y)\rangle - \langle x, \lambda y\rangle$
$= \langle f^*(x), y\rangle - \langle \lambda x, y\rangle = \langle f^*(x) - \lambda x, y\rangle.$

Donc $g_\lambda^* \circ g_\lambda = g_\lambda \circ g_\lambda^*$

Ainsi $\ker(g_\lambda) = \ker(g_\lambda^*)$

Or comme $\lambda \in Spec(f)$ nous savons $\exists x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$x \in \ker(g_\lambda) \subset \ker(g_\lambda^*)$

Donc $\underbrace{f^*(x)}_{\neq 0} - \lambda \underbrace{x}_{\neq 0} = 0$ ie $\lambda \in Spec(f^*)$

Nous obtenons l'autre inclusion en remplaçant f par f^* $((f^*)^* = f)$.

SAINT-VANNE E. SEMAINE 19

ENONCÉ :

Soit E espace euclidien, $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$ tels que $P\wedge Q = 1$.
Montrer que $\forall f\in\mathcal{L}(E)$, $\ker(P(f)) \perp \ker(Q(f^*))$

UNE SOLUTION :

Par Bezout, $P\wedge Q = 1 \Rightarrow \exists (A,B)\in\mathbb{R}[X]^2$, $AP + QB = 1$.

Donc $\forall x\in \ker(P(f))$, $x = QB(f)(x)$

$\forall y\in \ker(Q(f^*))$, $y = PA(f^*)(y)$

Soit $(x,y)\in \ker(P(f))\times\ker(Q(f^*))$, montrons que $\langle x,y\rangle = 0$.

Posons $QB = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, $PA = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \langle QB(f)(x), PA(f^*)(y)\rangle \\
&= \langle \sum_{i=0}^{n} b_i f^i(x), \sum_{j=0}^{m} a_j f^{*j}(y)\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_i a_j \langle f^i(x), f^{*j}(y)\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_i a_j \langle f^j(x), f^{*i}(y)\rangle \quad [\langle f^n(x), y\rangle = \langle x, f^{*n}(y)\rangle] \\
&= \langle \sum_{j=0}^{m} a_j f^j(x), \sum_{i=0}^{n} a_i f^{*i}(y)\rangle \\
&= \langle PA(f)(x), QB(f^*)(y)\rangle \\
&= \langle 0,0\rangle = 0.
\end{aligned}$$