Mehdi B. Colle de la semaine 17

Exercice 102. On s'intéresse à $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Domaine de définition de f.
2. Calculer $f(-1)$.
3. La fonction f est-elle continue en -1 ?
4. Calculer la limite en 1 de f.
5. Déterminer un équivalent de f en 1.

Solution 1) • Comme $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n+1})} \sim \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \to 1$, d'après le critère de d'Alembert pour les séries entières, le rayon de $\sum_{n \geq 1} \ln(1+\frac{1}{n}) x^n$ est 1.

Donc $D_f \subset]-1, 1[$

• en 1 $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} > 0$. Comme la série harmonique diverge, par théorème de comparaison, $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

• en -1 $\ln(1+\frac{1}{n})(-1)^n = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Comme la série harmonique alternée converge, $\sum \ln(1+\frac{1}{n})(-1)^n$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{D_f = [-1, 1[}$$

3) $\sum \ln(1+\frac{1}{n})(-1)^n$ converge et le rayon de convergence de f est 1. D'après le théorème d'Abel radial : $f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} f(-1)$, ie f est continue en -1

4,5) Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: si $x>0$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}_{R=1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n^2}}_{\text{converge par domination et critère de Riemann}}$$

où (b_n) suite bornée à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}^*$: ($\exists M \in \mathbb{R}_+$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ $b_n \leq M$)

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$
- $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n^2}\right| \overset{(**)}{\leq} M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \overset{(*)}{\underset{x\to 1}{\longrightarrow}} M\zeta(2) \in \mathbb{R}$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n^2} = o(-\ln(1-x))$

(**) : inégalité triangulaire puis $N \to +\infty$ (les séries convergent)

Ainsi :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty}$$

(*) Théorème de la double limite :

- $\displaystyle\frac{x^n}{n^2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{n^2}$

égalité si $x=a$ indépendant de x

- Soit $[-a,a] \subset]-1,1[$. $\displaystyle\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{a^n}{n^2}$

donc $\displaystyle\left\|x \mapsto \frac{x^n}{n^2}\right\|_{\infty,[-a,a]} = \frac{a^n}{n^2}$ et $\sum \frac{a^n}{n^2}$ converge (absolument) car $R\left(\sum \frac{x^n}{n^2}\right) = 1$. Donc $\sum x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ CVU sur $]-1,1[$.

Ainsi on a bien : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$

Matheo. N

Rapport de colle Semaine 17.

Énoncé :

Soient : $\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ telles que :

$\forall n\in\mathbb{N}\ b_n>0$, $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = +\infty$

Montrer que $\dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \lambda$

Résolution :

Nous savons que $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \lambda$, c'est à dire que $a_n = O(b_n)$

On en déduit par comparaison pour les séries entière que $R\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \geq R\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = +\infty$

donc $R\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) = +\infty$.

Ainsi, il est justifié de faire tendre t vers $+\infty$ dans $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Soit $\varepsilon>0$, $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ livre :

$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \left|\dfrac{a_n}{b_n} - \lambda\right| \leq \varepsilon$ d'où $|a_n - \lambda b_n| \leq \varepsilon b_n$ ($\times\, b_n>0$)

Nous avons alors : soit $t\in\mathbb{R}$

$$A(t) = \left|\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n} - \lambda\right| = \left|\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n} - \lambda\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n}\right|$$

$$= \left|\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \lambda b_n) t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - \lambda b_n) t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n}\right| + \left|\frac{\sum_{n=N}^{+\infty} (a_n - \lambda b_n) t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n}\right|$$

$$\leqslant \left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - \lambda b_n) r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \right| + \varepsilon \left| \frac{\sum_{n=N}^{+\infty} b_n r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \right|$$

Or avons: ⊛ $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n \geqslant \sum_{n=0}^{N+2} b_n r^n \quad [b_n > 0]$

d'où:

$$A(r) \leqslant \left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - \lambda b_n) r^n}{\sum_{n=0}^{N+2} b_n r^n} \right| + \varepsilon \left| 1 - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \right|$$

Par ⊛ nous avons:

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \right| \leqslant \left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n r^n}{\sum_{n=0}^{N+2} b_n r^n} \right| \sim \frac{1}{r^3} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$

Ainsi de la même manière nous avons par encadrement

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - \lambda b_n) r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \right| \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0 \text{ et } \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$

Ainsi: ~~$A(r)$~~ $\exists B \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall r \geqslant B$:

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - \lambda b_n) r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \right| \leqslant \varepsilon$$

d'où: $\forall r \geqslant B$:

$A(r) \leqslant 3\varepsilon$, en choisissant: $\varepsilon' = 3\varepsilon$ on a:

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} - \lambda \right| \leqslant \varepsilon' \text{ soit:}$$

$$\boxed{\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n} \xrightarrow[r \to +\infty]{} \lambda}$$

Rapport de Colle, semaine n° 17

Exercice: Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)} x^n$

Wassim M.

Solution: On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{n(n+2)}$

- $x = 0$: la série converge
- $x \neq 0$: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ Par la règle d'alembert:

si $|x| > 1$, alors la série diverge grossièrement

si $|x| < 1$, alors la série converge absolument

Ainsi, $R = 1$

Par une décomposition en elements simples:

$$\frac{1}{X(X+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{X} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{X+2}$$

$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} \right) x^n$ les series $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+2}$ ont le même rayon de convergence

donc $\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$$

donc $R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)} \right) = 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$

Youssef . B

Colle de la semaine 17

> On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tau_n = \mathrm{Card}(\{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2 : 2n_1 + 3n_2 = n\})$
> Montrer que $\sum \tau_n z^n = (\sum z^{2n})(\sum z^{3n})$
> En déduire la valeur de τ_n

Solution :

$\sum z^{2n} = \sum a_n z^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$\sum z^{3n} = \sum b_n z^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{3n}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

$a_k b_{n-k} = 1$ si k pair et $n-k \equiv 0 [3]$

Donc $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \tau_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Martin Kimber-Liber.

Rapport de colle, semaine 17.

Exercice 2 : Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence de g.
2. Exprimer g à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.
3. Calculer $g(1)$.

1. On s'intéresse au rayon de convergence de $\sum \frac{z^{2n}}{4n^2-1}$. Si $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{\frac{z^{2n+2}}{4(n+1)^2-1}}{\frac{z^{2n}}{4n^2-1}} \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} |z|^2 .$$

Ainsi, par la règle de d'Alembert pour les séries numériques, $\sum \frac{z^{2n}}{4n^2-1}$ converge absolument si $|z|<1$ et diverge grossièrement si $|z|>1$. Il vient

$$\boxed{R\left(\sum \frac{z^{2n}}{4n^2-1}\right) = 1.}$$

Etude aux bords :

· en 1.

$g(1) = \sum \frac{1}{4n^2-1}$ converge car $\frac{1}{4n^2-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2}$ converge par critère de Riemann.

· en -1.

$g(-1) = \sum \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)^2-1} < 0$
- $\left|\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\right| - \left|\frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)^2-1}\right| < 0$

et donc converge.

L'intervalle de convergence de g est donc $\boxed{[-1, 1]}$.

2). Une décomposition en éléments simples livre :

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

Puis, si $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$,

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}}_{\left(-\frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Toute fonction se décompose d'une unique manière comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On reconnaît donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2} = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Puis :

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \frac{1}{2}}\ .$$

De plus, $g(0) = -1$. On sait que g est continue sur $]-1, 1[$.

37. Par le théorème d'Abel radial, puisque $g(1)$ converge :

$$g(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} g(1)$$

On a :

$$g(x) \underset{x\to 1^-}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2-1}{x}\cdot\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) - \frac{1}{2}$$

$$\underset{x\to 1^-}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{\overbrace{x^2-1}^{(x+1)(x-1)}}{x}\cdot\ln(1+x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2-1}{x}\cdot\ln(1-x) - \frac{1}{2}$$

Or

$$(x-1)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$$

par croissances comparées, il vient :

$$g(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\frac{1}{2}.$$

Par unicité de la limite :

$$\boxed{g(1) = -\frac{1}{2}}\ .$$

Piero T. Colle de la semaine 17

Exercice 6 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. Trouver le rayon de convergence des séries entières de coefficients $\dfrac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\dfrac{\sin(n\alpha)}{n}$.
2. Pour $|x| < R$, calculer la somme $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$.
3. Montrer que pour $|x| < R$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\alpha)}{n} x^n = \arctan\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$

1

Solution:

1. Soit $R_1 = R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} z^n\right)$ et $R_2 = R\left(\sum_{n\geq 1} \sin(n\alpha) z^n\right)$.

$R_1 = R\left(\sum_{n\geq 0} (\cos((n+1)\alpha) z^n\right)$ et $R_2 = R\left(\sum_{n\geq 0} \sin((n+1)\alpha) z^n\right)$.

$(\cos((n+1)\alpha)\cdot 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin((n+1)\alpha)\cdot 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées donc $R_1 \geq 1$ et $R_2 \geq 1$.

de plus $\cos((n+1)\alpha)\cdot 1^n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc $\sum_{n\geq 0} \cos((n+1)\alpha)\cdot 1^n$ diverge grossièrement, et donc $R_1 \leq 1$.

Si $\alpha \not\equiv 0 \ (\pi)$: $\sin((n+1)\alpha)\cdot 1^n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc $\sum_{n\geq 0} \sin((n+1)\alpha)\cdot 1^n$ diverge grossièrement, et donc $R_2 \leq 1$.

Si $\alpha \equiv 0 \ (\pi)$: $\forall z \in \mathbb{C}$ $\sum_{n\geq 0} \sin((n+1)\alpha) z^n = 0$
et donc $R_2 = +\infty$.

On a donc $R_1 = 1$ et $R_2 = 1$ si $\alpha \not\equiv 0 \ (\pi)$ et $R_2 = +\infty$ sinon.

2. Soit $B \left| \begin{array}{l}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n \end{array} \right.$

A et B sont $\mathcal{C}^0$ sur $]-1,1[$ et :

$\forall x \in]-1,1[\quad A(x) = \displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \cos((n+1)\alpha) t^n \, dt$ et $B(x) = \displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha) t^n \, dt$

Soit $x \in]-1,1[$.

$$A(x) + iB(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} t^n \, dt$$

$$= \int_0^x e^{i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\alpha} t)^n \, dt$$

$$= \int_0^x \frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}t} \, dt \qquad (|t| \leq |x| < 1)$$

Soit $t \in [\min(0,x), \max(0,x)]$.

$$\frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}t} = \frac{e^{i\alpha}(1-e^{-i\alpha}t)}{1+t^2-e^{i\alpha}t-e^{-i\alpha}t} = \frac{e^{i\alpha}-t}{1+t^2-2\cos(\alpha)t} = \frac{-t+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{t^2-2\cos(\alpha)t+1}$$

donc $A(x) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}t} \, dt\right)$

$$= \int_0^x \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}t}\right) dt$$

$$= \int_0^x \frac{-t+\cos(\alpha)}{t^2-2\cos(\alpha)t+1} \, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln(t^2-2\cos(\alpha)t+1)\right]_0^x \qquad (\forall t \in]-1,1[\quad 0 < t^2-2\cos(\alpha)t+1)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2-2\cos(\alpha)x+1)$$

Riao T. 3. Soit $x \in]-1,1[$. Soit $f_x \left| \begin{array}{ccc} [\min(0,x), \max(0,x)] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arctan\left(\frac{t\sin(\alpha)}{1-t\cos(\alpha)}\right) \end{array} \right.$

f_x est dérivable sur $[\min(0,x), \max(0,x)]$ et :

Soit $t \in [\min(0,x), \max(0,x)]$.

$$f_x'(t) = \frac{\sin(\alpha)(1-t\cos(\alpha)) + t\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{(1-t\cos(\alpha))^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{t\sin(\alpha)}{1-t\cos(\alpha)}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin(\alpha)}{1-2\cos(\alpha)t+t^2\cos(\alpha)^2+t^2\sin(\alpha)^2}$$

$$= \frac{\sin(\alpha)}{t^2-2\cos(\alpha)t+1}$$

donc $B(x) = \operatorname{Im}\left(\int_0^x \frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}t}\,dt\right)$

$$= \int_0^x \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}t}\right)dt$$

$$= \int_0^x \frac{\sin(\alpha)}{t^2-2\cos(\alpha)t+1}\,dt$$

$$= \left[\arctan\left(\frac{t\sin(\alpha)}{1-t\cos(\alpha)}\right)\right]_0^x$$

$$= \arctan\left(\frac{x\sin(\alpha)}{1-x\cos(\alpha)}\right)$$

Lina. A.

Colle de la semaine n° 17

Énoncé :

Question de cours. Définition d'une fonction développable en série entière (définition). De l'unicité du développement en série entière (énoncé et démonstration).

Exercice. Soit $t \in]-1,1[$. Calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{t\sin(\theta)}{1-t\cos(\theta)}\right) \mathrm{d}\theta$.

Exercice. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 2. Montrer que l'application $f : x \mapsto e^{P(x)}$ est développable en série entière en 0, et que son développement en série entière ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Traiter les exercices dans l'ordre indiqué.

Solution : (Exercice 1)

La fonction $f : \theta \mapsto \arctan\left(\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)$ est bien définie et cpm pour tout $\theta \in [0,2\pi]$. car $|t\cos\theta| < 1$

$$\frac{d}{d\theta} \text{Arctan}\left(\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right) = \frac{t\cos\theta(1-t\cos\theta) - t^2\sin^2\theta}{(1-t\cos\theta)^2} \times \frac{1}{1+\frac{t^2\sin^2\theta}{(1-t\cos\theta)^2}}$$

$$= \frac{t\cos\theta - t^2}{(1-t\cos\theta)^2} \times \frac{(1-t\cos\theta)^2}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

$$= \frac{t\cos\theta - t^2}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

$$= t\,\frac{\mathrm{Re}(e^{i\theta}-t)}{(t-e^{-i\theta})(t-e^{i\theta})}$$

$$= t\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}-t}{|e^{-i\theta}-t|^2}\right)$$

$$= t\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{e^{-i\theta}-t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{te^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{in\theta}\right) \qquad [|te^{i\theta}| < 1]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \cos(n\theta)$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n (e^{i\theta})^n$ est une série entière de rayon $+\infty$

(Par d'Alembert pour les série numériques $\left|\frac{t^{n+1}}{t^n} e^{i\theta}\right| = |te^{i\theta}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |te^{i\theta}| < 1$)

Alors il en est de même pour $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \cos(n\theta)$

Donc par primitivation d'une série entière.

$$\text{Arctan}\left(\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \sin(n\theta)}{n} + \cancel{c} \quad {}^{0 \text{ pour } \theta = 0.}$$

On cherche désormais à appliquer le théorème d'intégration terme à terme

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n : \theta \mapsto \frac{t^n \sin(\theta n)}{n}$

(H_1) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$.

En effet : $\forall \theta \in [0, 2\pi]$

$$|f_n(\theta)| \leq \frac{t^n}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{passage au sup.}}}{\Longrightarrow} \|f_n\|_{\infty, [0,2\pi]} \leq \frac{t^n}{n}$$

Et

$\forall t \in]-1,1[\setminus \{0\}, \left|\frac{t^{n+1}}{t^n} \frac{n}{n+1}\right| \to |t| < 1$, si $t = 0$ $\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$ converge

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$ converge pour tout $t \in]-1,1[$.

Par théorème de domination $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty, [0,2\pi]}$ Converge

Donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ Converge normalement et donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.

(H_2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f_n est continue sur $[0, 2\pi]$.

Le théorème s'applique et livre

(C_1) $\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\theta$ est bien définie.

(C_2) $\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\theta)}{n} d\theta$

Or $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\theta)}{n} d\theta = \left[-\frac{\cos(n\theta)}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0$

Donc

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \text{Arctan}\left(\frac{t\sin(\theta)}{1-t\cos\theta}\right) = 0.}$$

Antoine B. colle de la semaine 17.

$$\text{Calculer } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Une solution:

Etudions la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(-x)^{3n+1}}{3n+1}$

$$\left| \frac{(-1)^{3(n+1)+1}}{3(n+1)+1} |x| \frac{3n+1}{(-1)^{3n+1}} \right| |x|^3 = \frac{3n+1}{3n+4} |x|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^3$$

si $|x| > 1$, par d'Alembert, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-x)^{3n+1}}{3n+1}$ diverge grossièrement

si $|x| < 1$, par d'Alembert, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-x)^{3n+1}}{3n+1}$ converge absolument.

on en conclut que $R\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-x)^{3n+1}}{3n+1}\right) = 1$.

soit $x \in]-1,1[$,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{3n+1}}{3n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^{3n}$$
$$= -\frac{1}{1+x^3}.$$

les fonctions : $S_1 \left| \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{3n+1}}{3n+1} \end{array} \right.$ et $S_2 \left| \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt \end{array} \right.$

ont même dérivée et donc diffère d'une constante $C \in \mathbb{R}$

calculons S_2. $(1+X^3) = (1+X)(X^2-X+1)$.

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{A}{1+X} + \frac{BX+C}{X^2-X+1},$$ on obtient en résolvant un système d'équations:

$A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$

soit $x \in]-1,1[$, $S_2(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt$

$$S_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{3} + \frac{-1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{3} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt}_{=:I}$$

$$I = \frac{2}{3}\int_0^x \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt = \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi/6\right) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi $S_1(x) = -\left(\frac{\ln(1+x)}{3} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}} + C\right)$

en $x \leftarrow 0$, $S_1(0) = 0 = C$

- On remarque que $\sum\limits_{n \geq 0} \underbrace{\frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1}}_{u_n :=}$ CV par le critère spécial des séries alternées : • $u_n u_{n+1} \leq 0$ • $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant • $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi, par le théorème d'Abel radial

$$S_1(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

$$\| $$

$$\frac{\ln(1+x)}{3} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + I \xrightarrow[x\to 1]{} \left(\frac{\ln(2)}{3} - 0 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

Par unicité de la limite on a que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Pierre V Colle de la semaine 17

Exercice 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

Solution Soit $\theta \in \mathbb{R}$

*) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left|\frac{\cos(\theta \times n)}{n}\right| \leq 1$ ainsi $\frac{\cos(n\theta)}{n} = \mathcal{O}(1)$

par theorème de comparaison et comme $R(\sum_{n\geq 1} x^n) = 1$

on a $R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}\right) \geq R\left(\sum_{n\geq 1} x^n\right) = 1$

Or par le cours $R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n\right) = R\left(\frac{d}{dx} \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n\right) = R\left(\sum_{n\geq 1} \cos(n\theta) x^{n-1}\right)$

Pour $x = 1$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons par l'absurde que $\cos(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\underbrace{\cos(2n\theta)}_{\to 0} = 2\underbrace{\cos^2(n\theta)}_{\to 0} - 1 \longrightarrow -1$ ce qui contredit l'unicité de la limite

donc $\cos(n\theta) \not\longrightarrow 0$

ainsi $\sum_{n\geq 1} \cos(n\theta)$ diverge grossièrement et $R\left(\sum_{n\geq 1} \cos(n\theta) x^{n-1}\right) \leq 1$

on en deduit que $R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}\right) = 1$

*) Soit $x \in]-1, 1[$, etudions la serie entière derivée de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos((n+1)\theta) x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\theta} x^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\theta}(e^{i\theta} x)^n\right)$$

$$\overset{|e^{i\theta}x|<1}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta} - x}{1-2x\cos(\theta)+x^2}\right)$$

$$= \frac{\cos(\theta) - x}{1-2x\cos\theta + x^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2\cos(\theta)+2x}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

Posons $S \left| \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n \end{array}\right.$, on a donc $S'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2\cos(\theta)+2x}{1-2x\cos\theta+x^2}$

donc $\exists C \in \mathbb{R}$ $\forall x \in]-1,1[$ $S(x) = -\frac{1}{2} \ln(|1-2x\cos\theta + x^2|) + C$

or $S(0) = 0 = C$ donc $\forall x \in]-1,1[$ $S(x) = -\frac{1}{2} \ln(|1-2x\cos\theta + x^2|)$

Stanislas G

Enoncé :

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 - 12n + 20}{n!} x^n$$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{x \in \mathbb{N} : x \text{ racine de } X^2 - 12X + 20\}$

$$\left| \frac{((n+1)^2 - 12(n+1) + 20) \; x^{n+1} \; n!}{(n^2 - 12n + 20) \; x^n \; (n+1)!} \right| = \underbrace{\frac{|n^2 - 10n + 9|}{|n^3 - 11n^2 + 8n + 20|}}_{\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}} |x|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par d'Alembert pour les séries numériques la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc ~~son~~ rayon $\boxed{R = +\infty}$

Soit $x \in \mathbb{C}^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 12n + 20}{n!} x^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n\right)}_{S_1} - \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{12n}{n!} x^n\right)}_{S_2} + \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{20}{n!} x^n\right)}_{S_3}$$

$$S_3 = 20 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 20e^x$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{12n}{n!}}_{\text{nulle pour } n=0} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12n}{n!} x^n = 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$= 12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 12x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 12xe^x$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{n^2 x^n}{n!}}_{=0 \text{ si } n=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1) + n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)}{n!}}_{\text{nulle si } n=1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2 e^x + xe^x$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-12n+20}{n!} x^n = (x^2-11x+20)e^x$

pour tout $x \in \mathbb{C}^*$

si $\underline{x=0}$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-12n+20}{n!} x^n = 20 = (x^2-11x+20)e^x$$

donc $\forall x \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-12n+20}{n!} = (x^2-11x+20)e^x}$$

Houchonnet Raphaël colle de la semaine n°

Énoncé :

Rayon et somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+2} x^n$

Solution :

La série n'étant pas lacunère, on utilise le critère de d'Alembert série entière.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{n+1}{n+3}\frac{n+1}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc $R\left(\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1} z^n\right) = 1$

Soit $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$ (évident si $x=0$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - \frac{x^n}{n+2}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \cancel{z}^n$ à pour rayon de convergence 1.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n+2}$ à pour rayon de convergence 1 car diverge en $z=1$ mais converge en $z=-1$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$ existe et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \frac{-1}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = -\frac{1}{x^2}\left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right)$

$$\boxed{\text{Donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2} x^n = \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$$

Jules R.

Énoncé : Trouver le rayon de convergence de cette série entière :

$$\sum \frac{\sin(n)}{n} z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Solution :

On sait que

$$R\left(\sum \frac{\sin(n)}{n} z^n\right) = R\left(\sum \sin(n)\, z^{n-1}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$0 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin(n)\, z^{n-1} \leq z^{n-1}$$

$$\Rightarrow R \geq 1$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$

Ainsi :

$$\underbrace{\sin(n)}_{\text{bornée}} z^{n-1} \longrightarrow +\infty$$

et différent de 0 car $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow R \leq 1$$

Donc $R = 1$

Maximilien. T. Colle Semaine 16

On note $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \end{array} \right.$

1) Montrer que f a une limite finie en 0 et la calculer

2) On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obtenue en prolongeant f en 0. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Solution

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ $\qquad \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{(e^x - 1)x}$

On $\quad x - e^x + 1 \underset{x \to 0}{=} -1 - x - \frac{x^2}{2} + x + 1 + o(x^2)$

donc $\quad x - e^x + 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$

et $\quad (e^x - 1)x \underset{x \to 0}{=} (1 + x - 1)x + o(x^2)$

donc $\quad (e^x - 1)x \underset{x \to 0}{\sim} x^2$

Ainsi $\quad \frac{x - e^x + 1}{(e^x - 1)x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-1}{2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{2}$

2) On pose $u \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x - e^x + 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$

et $v \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{(e^x - 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$

de sorte que $g = \frac{U}{V}$.

Montrons que U et V sont $\mathcal{C}^\infty$ ce qui livrera le résultat.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ $U(x) = \frac{x - e^x + 1}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{2} = U(0)$

De plus $U(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{x^2} \times \frac{1}{n!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ $(R = +\infty)$ coïncide avec $U(0)$ en 0.

Ainsi U coïncide avec un développement en série entière au voisinage de 0. Donc U est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(ici $\mathbb{R}$)

De même $V(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x} \times \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ $(R = +\infty)$ coïncide avec $V(0)$ en 0

V est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Rémi . S

Semaine n°17

Donner le rayon de convergence et calculer la série entière : $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$

$\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+1)} \longrightarrow 1$, Par le critère de d'Alembert,

$$R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}\right) = 1.$$

$$\frac{1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+2}$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{X}$ et $\sum \frac{1}{X+2}$ ont un rayon égale à 1.

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\cancel{X}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}}(-\ln(1-x)) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}x^{-2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$$

Hugo D. Colle de la semaine 17

On pose, $\forall n \geq 1$ $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$

Solution On pose $R := R(\sum_{n\geq 1} H_n x^n)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

On $R(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) = 1$

$R(\sum_{n\geq 0} x^n) = 1$

Par produit de Cauchy $R \geq 1$ et si $x \in]-1,1[$

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)}_{\frac{1}{1-x}} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)}_{S_n(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \times 1 \; x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$$

$S_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, donc $S_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Donc $S_n(x) = -\ln(1-x) + S_0$

D'où $\boxed{\sum_{n\geq 1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$

De plus, si $x \in R > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $H_n \geq 1$ donc $H_n x^n \geq x^n$

Comme (x^n) non bornée, $(H_n x^n)$ non plus

Ainsi $R \leq 1$

Pour finir $\boxed{R = 1}$

Célia A. Rapport de colle Semaine n° 17.

énoncé :

Soit (a_n) et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n .$$

Supposons $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante et convergeant vers 0. Soit $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \, [2\pi]$.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} b_n e^{in\theta}$ converge.

solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} + A_n b_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k + A_n b_n$$
$$= A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} b_k - A_{n-1} b_n + A_n b_n$$
$$= \underbrace{A_0}_{a_0} b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(A_k - A_{k-1})}_{a_k} b_k + \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{a_n} b_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k .$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n}$$

Nicolas. H Colle de la semaine 17

Sujet :

Développement en série entière et rayon de $x \mapsto \sqrt{1-x}$

Comportement aux bornes.

Solution :

Posons $f \left| \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x} \end{array} \right.$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ $x \mapsto (1+x)^\alpha$ possède un développement en série entière de Rayon $R=1$ et $\forall x \in]-1;1[$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)}{n!} x^n .$$

On en déduit que f possède un développement en série entière de rayon $R=1$ et $\forall x \in]-1;1[$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}-k\right)}{n!} (-1)^n x^n$$

Soit $n \geqslant 2$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}-k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)(2k-1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \prod_{k=0}^{n-1} (2k-1)$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k-1) = \frac{-(2n-2)!}{\prod_{k=1}^{n-1} 2k} = \frac{-(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

donc $\displaystyle \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}$

Ainsi, $\forall x \in]-1;1[$ $\displaystyle f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{-(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}}_{a_n} x^n$

Soit $n \geqslant 1$ $\displaystyle \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \times \frac{2^{2n-1}}{2^{2n+1}} \times \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{n+1}$$

Par Raabe-Duhamel (proposé par le colleur), la série

$\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

D'après le théorème d'Abel radial, $x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est continue en 1^-.

Analogue en -1^+

Donc $\tilde{f} \left| \begin{array}{l} [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{n!} (-1)^n x^n \end{array} \right.$

est bien définie et continue sur $[-1;1]$

Robin G. Colle de la semaine 17

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$.

Solution :

- Rayon :

Critère de d'Alembert pour les séries numériques :

$z\neq 0$, $\frac{|z|^{3n+3}}{|z|^{3n}} \cdot \frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \frac{|z|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi le rayon de convergence vaut $+\infty$.

- Somme :

Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$e^z = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}}_{S_0(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n+1)!}}_{S_1(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n+2}}{(3n+2)!}}_{S_2(z)} \quad \text{(les rayons sont } +\infty\text{)}$$

$$e^{jz} = S_0(z) + j\,S_1(z) + j^2\,S_2(z)$$

$$e^{j^2 z} = S_0(z) + j^2\,S_1(z) + j\,S_2(z)$$

car : $\forall n\in\mathbb{N}$, $j^{3n}=1$, $j^{3n+1}=j$, $j^{3n+2}=j^2$.

Ainsi en sommant les 3 égalités :

$$e^{z}+e^{jz}+e^{j^2z} = 3S_0(z) + (1+j+j^2)S_1(z) + (1+j+j^2)S_2(z)$$

or $1+j+j^2 = 0$

Donc

$$\forall z\in\mathbb{C} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!} = \frac{e^{z}+e^{jz}+e^{j^2z}}{3}.$$

Lucas B Colle de la semaine 17

$$g : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$$

1) Donner le domaine de définition de g
2) calculer $g(-1)$
3) La fonction g est-elle continue en -1 ?
4) Calculer la limite de g en 1
5) Donner un équivalent de g en 1

1) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n}) x^n$ est le même que $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$

Or $R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}\right) = 1$ (DSE de $-\ln(1-x)$)

Donc $R\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) x^n\right) = 1$.

En 1 : Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$

Alors f n'est pas définie en 1

En -1 :
- $\left((-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$
- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \searrow$
- $(-1)^n \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\geq 0} (-1)^{n+1} \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{\geq 0} \leq 0$

Donc par le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n})(-1)^n$ converge

Donc f est définie sur $[-1, 1[$

2) $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2}\right)$$

$$\circledast = \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2}\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(2n+1) = \frac{(2N+1)!}{\prod_{n=1}^{N} 2n} = \frac{(2N+1)!}{2^N N!} = \frac{(2N)!(2N+1)}{2^N N!}$

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1) = \frac{(2N-1)!}{2^{N-1}(N-1)!} = \frac{(2N)!}{2^N N!}$$

$$\sum_{n=1}^{N} 2n = 2^N N!$$

Donc $\displaystyle\circledast = \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{(2^N N!)^4}\right)$

Or $\displaystyle n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Donc $\displaystyle\circledast \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{2N}\cdot\cancel{(2N)^{4N}}\,\cancel{e^{4N}}\,\overbrace{(2N+1)}^{\sim 2\cancel{N}}}{\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}\cancel{N^{2}}\,\cancel{2^{4N}}\,\cancel{N^{4N}}\,\cancel{e^{4N}}}\right)$

$$\underset{N\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Donc $f(-1) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$

4/5) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Alors $\forall x \in [-1, 1[$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x^n O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$ donc cette série converge

et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$

On en déduit que $f(x) \underset{1}{\sim} -\ln(1-x)$

et donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$

Exercice 103. On s'intéresse à $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Domaine de définition de f.
2. Calculer la limite en 1 de f.
3. Limite de $(1-x)f(x)$ en 1.
4. Montrer que f a une limite finie en -1.

Solution :

1) Notons D_f le domaine de définition de f

Cherchons $R\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{=:a_n} x^n\Big) := R$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq 1$

alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{x \in \mathbb{R}_+ : (a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$

i.e $\underline{R \geq 1}$

Pour $x = 1$:

$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\geq 0}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ Diverge car $\frac{1}{2} < 1$

Par domination $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge. (*)

i.e $\underline{R \leq 1}$

Donc $R = 1$ et $\boxed{D_f =]-1, 1[}$

2) Soit $x \in]0, 1[$
$N \geq 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \overbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}^{\geq 0} x^n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| x^n}_{f(x)}$$

Quand $x \longrightarrow 1$ on obtient

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$ (limite existe car la suite des sommes partielles est croissante)

Or par (*) (en 1) $\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge quand $N \to +\infty$

Par domination $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty}$

3) $(1-x)f(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1}}_{\big| k=n+1 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n}$$

$$= \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right)x^n$$

Or

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$- \quad \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{6}\frac{1}{(n-1)^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}}_{①} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{(n-1)^{3/2}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

① :

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \quad \text{d'où} \quad ① = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right)$$

$$① = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

alors $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = -\frac{1}{3}\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{6}\underbrace{\left(\frac{1}{(n-1)^{3/2}}\right)}_{②} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

② :

$$② = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n^{3/2}} \times ② = \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

alors $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

d'où $\boxed{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}}}$:)

Léa N.

Colle de la semaine n° 17

Énoncé :

Exercice 3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n \, dt$.

a. Pour tout c dans $]0,1[$, prouver la minoration $a_n \geqslant (1-c)(1+c^2)^n$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c. Exprimer sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Solution :

a) Soit $c \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n \, dt$$

$$= \underbrace{\int_0^c \underbrace{(1+t^2)^n}_{\geq 0} \, dt}_{\geq 0} + \int_c^1 (1+t^2)^n \, dt \quad \text{(Relation de Chasles)}$$

(positivité de l'intégrale)

$$\geq \int_c^1 \underbrace{(1+t^2)^n}_{\geq (1+c^2)^n} \, dt$$

$$\geq \int_c^1 (1+c^2)^n \, dt$$

$$= (1-c)(1+c^2)^n$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c \in]0,1[\quad a_n \geq (1-c)(1+c^2)^n}$

b) Posons $c_n = (1-c)(1+c^2)^n$

et considérons la série entière $\sum c_n x^n$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = (1+c^2)|x| \longrightarrow (1+c^2)|x|$$

Donc par la règle de d'Alembert pour les séries numériques,

$\sum c_n x^n$ converge absolument si $|x| < \underbrace{\frac{1}{1+c^2}}_{>0}$

$\sum c_n x^n$ diverge grossièrement si $|x| > \frac{1}{1+c^2}$

Donc $R(\sum c_n x^n) = \frac{1}{1+c^2}$

Donc par théorème de comparaison

$$R(\sum a_n x^n) \geq \frac{1}{1+c^2}$$

On remarque que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n \, dt \leq 2^n$

et $R(\sum 2^n x^n) = \frac{1}{2}$

D'où $\frac{1}{1+c^2} \leq R(\sum a_n x^n) \leq \frac{1}{2}$

$c \longrightarrow 1$ livre :

$$\boxed{R(\sum a_n x^n) = \frac{1}{2}}$$

c/ On veut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

Soit $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

On pose $f_n \Big| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1+t^2)^n x^n \end{array}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur $[0,1]$

(H2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $|(1+t^2)^n x^n| \leq \underbrace{|2x|^n}_{\text{indépendante de } t}$

égalité pour $t = 1$

$\Rightarrow \quad \|f_n\| = |2x|^n$

Or comme $|x| < \frac{1}{2}$

$2|x| < 1$

Donc $\sum \|f_n\|$ converge

i.e $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

Donc le théorème s'applique et donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (1+t^2)^n x^n \, dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\underbrace{(1+t^2)x}_{<1}\Big)^n \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-(1+t^2)x} \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{1-x-t^2x}_{P}} \, dt$$

$D(P) := 4x - 4x^2 < 0$

Donc une primitive de P est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{xt}{\sqrt{x-x^2}}\right)$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}\right)}$

Colle de la semaine n° 17

Rayon. G

Enoncé: Soit I l'ensemble des réels x tels que $\sum_{n\geq 1} \ln(n) x^n$ converge. On note $f(x)$ la somme de cette série.

1. Déterminer I et étudier la continuité de f.
2. On pose $a_1 = (-1)$ et
$$\forall n \geq 2, a_n = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$
Déterminer le domaine de définition de $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$
3. Trouver une relation entre f et g.
4. Calculer $g(1)$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

Solution: 1.
$$\frac{|\ln(n+1)|}{|\ln(n)|} = 1 + \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}}_{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 0}} \to 1$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries entières:

Le rayon de convergence, que l'on notera R, vaut 1.

S'il existait un $x \in I$ tel que $|x| > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \ln(n) x^n$ converge par définition et diverge grossièrement par le lemme d'Abel ce qui n'est pas.

De plus $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \neq 0$ donc $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$ diverge grossièrement

De même $(-1)^n \ln(n)$ ne converge pas vers 0 donc $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$ diverge grossièrement.

On en déduit que $I =]-1, 1[$

Etant une série entière, f est continu sur $]-1,1[$.

2.

$$-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n} = \frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

Or $\left|\frac{2(n+1)^2}{2n^2}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors par la règle de d'Alembert pour les séries entières : $1 = R\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}x^n\right) = R\left(\sum_{n\geq 1}a_n x^n\right)$

De même qu'en un, g n'est pas défini en dehors de $[-1,1]$.
L'équivalent établi plus haut nous donne le caractère bien défini de g en $\{-1,1\}$ car $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge absolument par Riemann $(2>1)$ et par théorème de comparaison.

3. Soit $x\in]-1,1[$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n = -x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)x^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)x^n = -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)x^n$$

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n-1)x^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)x^n = -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+(1-x)f(x)$$

On pose $S \left| \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\end{array}\right.$ bien défini et dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x\in]-1,1[\quad S'(x) = -\sum_{n=3}^{+\infty}x^{n-1}$

Soit $x\in]-1,1[$

$$S'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+2} = \frac{-x^2}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}-\frac{1}{1-x} = \frac{\cancel{1}\ (1+x)}{1+x}-\frac{1}{1-x}$$

On en déduit une primitive de S', $x\mapsto \cancel{\ln(1+x)}\ x+\frac{x^2}{2}+\ln(1-x)$

$\exists C \in \mathbb{R} \quad S(x) = \cancel{\frac{\ln(1+x)}{x+\frac{x^2}{2}}} + \ln(1-x) + C$

Pour $x \leftarrow 0$: $\quad C = 0$

Ainsi

$$g(x) = \cancel{\frac{\ln(1+x)}{x+\frac{x^2}{2}}} + \ln(1-x) + (1-x)f(x) \; \cancel{= \ln(1-x^2) + (1-x)f(x)}$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$(-1) + \sum_{n=2}^{N} \left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = (-1) \underbrace{- \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}}_{-H_N} + \underbrace{\sum_{n=2}^{N} -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\ln(N)} \sim -\gamma$$

Donc par unicité de la limite $\quad g(1) = -\gamma$

Soit $x \in]-1,1[$

$$\cancel{\boxed{f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x^2)}{1-x}}}$$

$$f(x) = \frac{g(x) - x - \frac{x^2}{2} - \ln(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{g(x) - x - \frac{x^2}{2}}{1-x} + \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

$$f(x)\frac{(1-x)}{-\ln(1-x)} = \underbrace{\frac{g(x) - x - \frac{x^2}{2}}{-\ln(1-x)}}_{\to 0} + 1 \to 1$$

$g(x) - x - \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x \to 1]{} -\gamma - 1 - \frac{1}{2}$

Donc $\quad f(x) \underset{1}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$

Adam M.

Exercice. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul, de somme f. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$, et montrer : $\forall z \in \mathrm{B}(0,R)$, $f(z) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}(zx)^n \right) e^{-x} \mathrm{d}x$.

Solution:

Soit $\rho \in]0,R[$, $n \in \mathbb{N}$

$(|a_n \rho^n|)$ bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$ $|a_n||\rho|^n \leq M$

Donc $|a_n| \leq \frac{M}{|\rho|^n}$

Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|a_n z^n|}{n!} \leqslant \frac{M}{n!}\left|\frac{z}{\rho}\right|^n$$

La $\sum_{n\geqslant 0} \frac{M}{n!}\left|\frac{z}{\rho}\right|^n$ converge car $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{n!}\left|\frac{z}{\rho}\right|^n = M e^{\left|\frac{z}{\rho}\right|}$ $(R = +\infty)$

Donc la $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n z^n}{n!}$ est absolument convergente

$\forall z \in \mathbb{C}$ et $R\left(\sum \frac{a_n}{n!} z^n\right) = +\infty$

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{a_n}{n!} z^n x^n e^{-x} \end{array} \right.$$

Par théorème d'intégration terme à terme :

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est cpm, montrons que f_n est intégrable

$\mathcal{P}(n)$: " f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f_n = a_n z^n$ "

(I) $n = 0$: $\int_0^{+\infty} f_0$ converge et $\int_0^{+\infty} f_0 = a_0 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = a_0 \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = a_0$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $x \longmapsto -e^{-x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{CC} 0$

Par intégration par parties, comme $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ converge, $\int_0^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} x^{n+1} e^{-x} dx$ converge et $\int_0^{+\infty} f_{n+1} = +\int_0^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} z^{n+1} x^n e^{-x} dx = a_{n+1} z^{n+1}$

(H2) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ cpu sur $\mathbb{R}_+$ $(R=+\infty)$

(H3) $\sum_{n\geq 0} \underbrace{\int_0^{+\infty} f_n}_{=a_n z^n}$ est absolument convergente car $z \in D(0,1)$

Donc le théorème s'applique

(C1) $\sum f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

(C2) $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} (zx)^n \right) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$= f(z)$

Titouan D.

Rapport de colle semaine n° 17

> Donner le rayon de convergence et la somme de
> $$S(z) = \sum_{n\geq 0} (2+(-1)^n)^n z^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = (2+(-1)^n)^n = \begin{cases} 3^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$$\left| \frac{a_{n+1} \quad z^{n+1}}{a_n \quad z^n} \right| = \begin{cases} 3^{n+1} |z| & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{3^n} |z| & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

On sépare $S(z)$ en 2 :

$$S(z) = \underbrace{\sum_{n\geq 0} 3^{2n} z^{2n}}_{R=\frac{1}{3}} + \underbrace{\sum_{n\geq 0} z^{2n+1}}_{R=1}$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$$\left| \frac{3^{2n+2} \quad z^{2n+2}}{3^{2n} \quad z^{2n}} \right| = 3^2 |z|^2$$

Par d'Alembert pour les series entières,

$\sum_{n\geq 0} 3^{2n} z^{2n}$ converge absolument si $|z| < \frac{1}{3}$

$\sum_{n\geq 0} 3^{2n} z^{2n}$ diverge grossierement si $|z| > \frac{1}{3}$

Donc $R(\sum_{n\geq 0} 3^{2n} z^{2n}) = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \neq 1$ donc $R(S(z)) = \min(\frac{1}{3}, 1)$

$$= \frac{1}{3}$$

Soit $z \in D(0, \frac{1}{3})$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (9z^2)^n + z \sum_{n=0}^{+\infty} (z^2)^n$$

Ainsi $\boxed{R(S(z))=\frac{1}{3} \text{ et } \forall z \in D(0,\frac{1}{3}) \quad S(z)=\frac{1}{1-9z^2}+\frac{z}{1-z^2}}$

Alexandre M.

Colle semaine 17

Enoncé :

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-12+20}{n!}x^n$$

Résolution :

$$\sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{n^2-12n+20}{n!}}_{=: a_n} x^n \qquad R := R\left(\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-12n+20}{n!}x^n\right)$$

On remarque que $n^2-12n+20$ a au plus deux racines entières.

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad |n^2-12n+20| > 0$$

Soit $n \geq N$

$$\frac{|(n+1)^2-12(n+1)+20| \times |x|^{n+1} \times n!}{|n^2-12n+20| \times |x|^n \times (n+1)!} = \underbrace{\frac{|x|}{n+1}}_{\to 0} \times \underbrace{\left|(1+\frac{1}{n})^2 \frac{1-\frac{12}{n+1}+\frac{20}{(n+1)^2}}{1-\frac{12}{n}+\frac{20}{n^2}}\right|}_{\to 1}$$

donc $\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{n^2-12n+20}{n!}x^n \text{ converge absolument.}$$

Par caractérisation du rayon de convergence, $R = +\infty$

On remarque maintenant

$\forall n \geq N$

- $\dfrac{(n+1)^2}{(n)^2}\dfrac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\dfrac{n!}{(n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\dfrac{|-12(n+1)|\,|x|^{n+1} \times n!}{|-12n|\,|x|^n \times (n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- $\dfrac{20\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{20|x|^n} = \dfrac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0$

ainsi, la règle de d'Alembert livre

$\forall x \in \mathbb{C}$ $\quad \sum_{n\geq 0} \dfrac{n^2 x^n}{n!}$; $\sum_{n\geq 0} \dfrac{-12n}{n!} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \dfrac{20 x^n}{n!}$

convergent absolument. (donc converge)

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-12n+20}{n^2} x^n = \underbrace{\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}}_{①} + \underbrace{\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} -12n \frac{x^n}{n!}}_{②} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 20 \frac{x^n}{n!}}_{③}$$

①: $$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1+1) \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=\cancel{1}\,2}^{+\infty} (n-1) \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$ [linéarité de somme de séries convergentes]

$$= x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}}_{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}} + x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}_{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$$= x^2 e^x + x e^x$$ [DSE de exponentielle]

Preuve de la convergence (*) :

$$\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \times \frac{n}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n-1} = \frac{|x|}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{|x|^{n+1}}{n!} \times \frac{(n-1)!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on conclut par d'Alembert, comme avant.

[linéarité]

$$(2) : \sum_{n=1}^{+\infty} -12n \frac{x^n}{n!} = -12x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= -12x\, e^x$$

$$(3) : \sum_{n=0}^{+\infty} 20 \frac{x^n}{n!} = 20e^x$$

On conclut donc que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 12n + 20}{n!} x^n = (x^2 - 11x + 20)\, e^x}$$

<u>Énoncé</u> : Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+1}}{4n^2-1}$

<u>Solution</u> : Soit $x \in \mathbb{R}^*$

- <u>Rayon de convergence</u> : $\left|\frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}\right| \left|\frac{x^{4n+5}}{x^{4n+1}}\right| \sim |x|^4 \longrightarrow |x|^4$

Par d'Alembert pour les séries entières : • Si $|x|<1$, alors la série entière est ACV
• Si $|x|>1$, alors la série entière DVG

Ainsi, $\boxed{R=1}$

- <u>Somme de la série</u> : Soit $x \in]-1;1[\setminus \{0\}$

Par décomposition en éléments simples : $\frac{1}{4X^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{2X-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2X+1}$

Nous obtenons alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{2n+1}$

Remarquons que les deux séries obtenues sont de rayon de convergence 1.

Par changement de variable $(n = n+1)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(-x + x^4 . \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{2n+1}}_{f(x)}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{2n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2n} . x}{2n+1} = \frac{1}{x}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1}}_{g(x^2)}$$

$$g(y) \underset{R=1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = \text{partie impaire de } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$

$$= \frac{-\ln(1-y)+\ln(1+y)}{2}$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}}\right)$$

Donc finalement nous obtenons que :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{(x^4-1)}{x}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)\right)}$$

Anaé D.

Rapport de colle S17

EXERCICE 2

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n+2} x^n$.

EXERCICE 3

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$u_n := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}^n(x)}\,\text{d}x.$$

Q1. — Justifier l'existence de u_n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Q2. — Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Q3. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$.

Solution :

Exercice 2 :

Soit $x \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{(n+1) \times |x|^{n+1} \times (n+2)}{n \times |x|^n \times (n+3)} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \times |x|^n \times \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques

Si $|x| < 1$, alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n+2} x^n$ converge absolument

Si $|x| > 1$, alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n+2} x^n$ diverge grossièrement

Donc $\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n+2} x^n\right) = 1}$

Soit $x \in]-1,1[$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) x^n$

$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$ $\quad (R=1)$

$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^n}{(n+2)} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$ $\quad (R=1)$

Ainsi, on a en dérivant

$$\frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} x^{n+1}{}' = \frac{2}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty} x^n = \frac{2}{x^2}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{\frac{1}{1-x}} - 1 - x - x^2\right]$$

$\exists C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{x^2}\left[-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]$$

$$= -\frac{2\ln(1-x)}{x^2} - \frac{2}{x} - 1 - \frac{2}{3}x + C$$

En évaluant en 0 on a $C=0$

Finalement on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+2}x^n = \frac{1}{1-x} \cancel{-1} + \frac{2\ln(1-x)}{x^2} + \frac{2}{x} \cancel{+1} + \frac{2}{3}x$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+2}x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{2\ln(1-x)}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x}$$

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{ch^n(x)}\,dx$

1. $f_n \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{ch^n(x)} \end{array}\right.$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad$ Cpm sur $[0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[\quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ch^n(x) = \frac{1}{2^n}(e^x - e^{-x})^n = \frac{1}{2^n}e^{nx}(1-e^{-2x})^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{nx}}{2^n}$

D'où $\quad \frac{1}{ch^n(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{e^{nx}} = 2^n e^{-nx}$

Or $x \longmapsto 2^n e^{-nx}$ est intégrable $(n>0)$. Donc par comparaison, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+2} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{ch^{n+2}(x)}\,dx$$

Or pour tout $x \in [0,+\infty[$ $\quad ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

Anaë D. (suite)

Donc $u_{2n+2} = \int_0^{+\infty} \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^{n+2}(x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^n(x)} - \underbrace{\int_0^{+\infty} sh(x) \times \frac{sh(x)}{ch^{n+2}(x)} dx}_{I(x)}$

$x \mapsto sh(x)$ et $x \mapsto -\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{ch(x)^{n+1}}$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

$sh(x) \times \left(-\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{ch(x)^{n+1}}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ $\left[sh(x) \times \frac{1}{ch(x)^{n+1}} = 2^{n-1} \frac{e^{\overbrace{(1-n)x}^{<0}}(1-e^{-x})}{(1-e^{-2x})^n}\right]$

$sh(x)\left(-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{ch(x)^{n+1}}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ $[sh(0) = 0 \quad ch(0) = 1]$

Par intégration par parties

$I(x)$ a même nature que $\int_0^{+\infty} -\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{ch^n(x)} dx = -\frac{1}{n+1} u_n$. Par 1, on a que u_n converge donc $I(x)$ converge.

Ainsi

$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{ch^n(x)} = \frac{1}{n+1} u_n$

Finalement $\boxed{u_{n+2} = u_n - \frac{1}{n+1} u_n = \frac{n}{n+1} u_n}$

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme f

On suppose qu'il existe $(z_p) \in (D(0,R)\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$,

H1) $\forall p \in \mathbb{N}, f(z_p) = 0$

H2) $z_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Démontrer que tous les coefficients a_n sont nuls

Supposons par l'absurde que l'un des a_n soit non nul.

Alors $\exists q \in \mathbb{N}$, $q = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$

donc $\forall z \in D(0,R)$, $f(z) = z^q \sum_{n=0}^{+\infty} a_{q+n} z^n$

Soit $p \in \mathbb{N}$, $f(z_p) = 0$

donc l'intégrité de $\mathbb{C}$ livre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{q+n} (z_p)^n = 0$

de plus $a_q = \dfrac{f^{(q)}(0)}{q!}$

~~donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_q =$~~

donc $a_q = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{q+n} (z_p)^n = 0$

Contradiction

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$

Rapport de Colle

Exercice 3 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}$.

427

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et calculer pour tout $x \in]0, R[$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Indication : Prouver que S est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; considérer $a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\left|\dfrac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n \; x^n}\right| = \dfrac{n+1}{2n+3} \; |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}|x|$

d'après d'Alembert ;

$R\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) = \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad a_n - \dfrac{1}{2} a_{n-1} =$

$$\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} - \frac{(n-1)!}{2\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)} = \frac{2(n!) - (2n+1)(n-1)!}{2\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(2n-2n-1)}{2\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = -\frac{a_n}{2n}$$

On a, $\left|\; \forall x \in]0, 2[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \right.$

$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n} x^n$

donc $\left(S(x)-1\right) - \frac{1}{2}x\left(S(x)\right)$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2n} x^n$$

Puis en dérivant ; $S'(x) - \frac{1}{2}\left(x S'(x) + S(x)\right)$

$$= -\frac{1}{2x}\left(S(x)-2\right)$$

donc ; $S'(x)\left(1-\frac{1}{2}x\right) + S(x)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)\right)$

$$= \frac{1}{2x}.$$

donc S est solution de ;

$$y'\left(\underbrace{1-\frac{1}{2}x}_{\neq 0 \text{ car } x \neq 2.}\right) + y\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)\right) = \frac{1}{2x}$$

où $y \in \mathcal{C}^1(]0;2[)$.

Soit en normalisant ;

$$y' + y\underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{x}\right)\left(\frac{2}{2-x}\right)\right)}_{\frac{1-x}{2x-x^2}} = \frac{1}{2x-x^2} \quad (E)$$

On a ; $(EH) : \left(y' + y \underbrace{\frac{1-x}{2x-x^2}}_{:= a(x)} = 0 \right)$

$$\mathcal{S}_{(EH)} = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l}]0;2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-A(x)} \end{array} \right. \right)$$

où A est une primitive de $a : x \mapsto \frac{1-x}{2x-x^2}$

on trouve $A : x \mapsto \frac{1}{2} \ln(\underbrace{2x-x^2})$

(>0 car $x \in]0;2[$)

donc $\mathcal{S}_{(EH)} = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l}]0;2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}_{:= y_H} \end{array} \right. \right).$

Pour trouver une solution particulière on en cherche une de la forme ; $h\, y_H$ où

$h \in \mathcal{C}^1(]0;2[,\mathbb{R})$.

Comme $h\, y_H$ est solution de E donc ; $\forall x \in]0;2[$;

$$h' y_H(x) + \underbrace{h\, y_H'(x) + \frac{1-x}{2x-x^2} h\, y_H(x)}_{= 0 \ (y_H \text{ solution de } (EH))} = \frac{1}{2x-x^2}$$

donc $h' y_H(x) = \frac{1}{2x-x^2}$

donc $h' : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}$, une primitive de h'

et $k : t \mapsto \arcsin(t-1)$

et donc une solution particulière est :

$$y_p : t \mapsto \frac{\arcsin(t-1)}{\sqrt{2t-t^2}}$$

Finalement comme $\forall x \in]0;2[$, $\exists k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{k}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{\arcsin(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

et que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(0) = 1 = x_0$

alors $\sqrt{x}\, f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

donc $\dfrac{k}{\sqrt{2-x}} + \dfrac{\arcsin(x-1)}{\sqrt{2-x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$\longrightarrow \frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{-\pi}{2\sqrt{2}}$$

donc $k = \dfrac{\pi}{2}$.

On conclut : $\forall x \in]0;2[$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{\arcsin(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}} \quad \square.$$

Tiguin, David — Colle de la semaine 17

Exercice 110. Rayon de convergence et calcul de $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall z \in \mathbb{C} \quad \left|\frac{1}{n} z^n\right| \leq \left|n^{(-1)^n} x^n\right|$ et $R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n\right) = 1$

alors $R\left(\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} x^n\right) = r \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall z \in \mathbb{C} \quad \left|n^{(-1)^n} z^n\right| \leq \left|n z^n\right|$ et $R\left(\sum_{n\geq 0} n z^n\right) = 1$

alors $r \geq 1$

Ainsi $r = 1$

Par parité en mirant n on obtient $\forall x \in]-1,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} 2n x^{2n-1}$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \, dt + x\left(\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\right)$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} \, dt + x\left(\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$= \int_0^x \frac{1}{(1-x)(1+x)} \, dx + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

(déc en elts simples) $= \frac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \, dt\right) + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

$c \in \mathbb{R} \qquad = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1) + c\right) + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

et $x = 0 \qquad = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

Rapport de colle - semaine 17 Uta Bayen de Neyer

Exercice :

On pose $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

$\gamma := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} = 1 - \gamma$

$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} = \gamma$

- Soit $\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\right)^n \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \in [0, +\infty[^{(\mathbb{N}_{\geq 2})^2}$

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^2} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\right)^n \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \sum_{m \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\right)^n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \frac{1}{n} (\zeta(n) - 1)$$

et aussi par Fubini, on a :

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^2} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\right)^n = \sum_{m \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\right)^n$$

- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est une série entière de rayon 1

et $\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$

$\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, comme $+\frac{1}{m} \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(-\frac{1}{m}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m}$$

$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m}. \quad (*_1)$$

- Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

$$\sum_{m=2}^{N} -\ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m}$$

$$= \sum_{m=2}^{N} -\ln(m-1) + \ln(m) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m} + 1$$

$$= \ln(N) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m} + 1$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} -\gamma + 1.$$

Donc $$\sum_{m=2}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m} = 1 - \gamma \quad (*_2)$$

- Par $(*_1)$ et $(*_2)$ on en déduit que
  - $\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\right)^n\right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^2}$ est sommable
  - $$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^2} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\right)^n = 1 - \gamma}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\sum_{n=2}^{N} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}$$

$$= \sum_{n=2}^{N} (-1)^n \left(\frac{\zeta(n)-1}{n} \right) - \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

- Soit $\left((-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{m}\right)^n \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^2} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}_{\geq 2})^2}$ sommable.

car $\left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{m}\right)^n \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^2}$ sommable

Donc

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^2} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{m}\right)^n \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}} (-1)^n \left(\frac{\zeta(n)-1}{n} \right)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{m \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{m}\right)^n$$

- $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ comme $\frac{1}{m} \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{m}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{1}{m}\right)^n + \frac{1}{m}$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} \quad (*_1)$$

- Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

$$\sum_{n=2}^{N} -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=2}^{N} -\ln(n+1) + \ln(n) + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$$

$$= \ln(2) - \ln(N+1) + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2) - 1 + \gamma$$

donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = \ln(2) - 1 + \gamma \quad (*_2)$

- Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 (-t)^{n-1}\,dt - 1$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N-1} (-t)^n\,dt - 1$$

$$\underset{\substack{(-t \neq 1)\\ \forall t \in [0,1]}}{=} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt}_{=\ln(2)} - 1 - \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,dt$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2) - 1 \quad (*_3)$$

car $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,dt\right| \leq \int_0^1 t^N\,dt = \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

par encadrement $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

- Par $(*_1)$, $(*_2)$ et $(*_3)$, on conclut.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \ln(2) - 1 + \gamma - (\ln(2) - 1) = \gamma}$$

REUTER
Robin

MPI

Rapport colle 17

Développer $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1)$ en série entière.

Posons $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1) \end{array} \right.$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

Or
$$x^2+2x+2 = (x+1+i)(x+1-i) = (x+\sqrt{2}e^{i\pi/4})(x+\sqrt{2}e^{-i\pi/4})$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{1}{(x+\sqrt{2}e^{i\pi/4})(x+\sqrt{2}e^{-i\pi/4})} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)$$

D'une part, $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\frac{1}{x+\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \frac{1}{1+\frac{x}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq \sqrt{2}$
$$\frac{1}{x+\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}\right)^n$$

De même, $\forall x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$
$$\frac{1}{x+\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}\right)^n$$

Donc $\forall x \in]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$,

$$f'(x) = i \frac{1}{\sqrt{2}^2}\left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right)^n x^n$$

$$= i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+3}} \left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right)^{n+1} x^n .$$

(de rayon de convergence supérieur ou égal à $\sqrt{2}$)

Donc $\forall x \in]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$,

$$f(x) = i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{2})^{n+3}} \left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right)^{n+1} x^n .$$

Louis. D. Semaine de colle n°17

1/2

Enoncé :

Soit I_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments. On cherche une expression de I_n.

1) Trouver une relation de récurrence pour I_n

2) Montrer que $R\left(\sum \frac{I_n}{n!} z^n\right) > 0$

3) Etablir une équation différentielle, la résoudre, puis en déduire une expression de I_n.

Une solution :

1) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et σ une involution de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n+1]\!]$. ($\sigma \circ \sigma = id_{[\![1, n+1]\!]}$)

- Si $\sigma(n+1) = n+1$

  Il reste n couple antécédent / image à choisir tels que $\sigma \circ \sigma = id$. On a I_n possibilités

- Si $\sigma(n+1) = k$, $k \in [\![1, n]\!]$

  On a nécessairement $\sigma(k) = n+1$.

  Il reste $n-1$ couples à choisir, soit I_{n-1} involutions possibles.

  Comme k peut prendre n valeurs distinctes, on a $n\, I_{n-1}$ involutions telles que $\sigma(n+1) \neq n+1$, On a donc la relation suivante :

$$\boxed{I_{n+1} = I_n + n I_{n-1}}, \text{ on pose } I_0 = 1$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $I_n \leq |S_n| = n!$,

on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left| \frac{I_n}{n!} z^n \right| \leq |z^n|$$

Or, $R\left(\sum_{n \geq 0} z^n\right) = 1 > 0$ donc

$$R\left(\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} z^n\right) \geq 1 > 0$$

$$\boxed{R \geq 1}$$

3) Soit $x \in]-1, 1[$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n}_{=: S(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{n!} n x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!} x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} n x^{n-1}}_{= S'(x)} - x \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n}_{= S(x)}$$

On en déduit que S est solution de :

$$\boxed{y' = (1+x) y} \quad \text{et } S \in \mathrm{Vect}\left(y_H \middle| \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}+x} \end{array} \right)$$

Comme $S(0) = I_0 = 1$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad S(x) = e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

Lenis D

2/2

exp est développable en série entière au voisinage de 0 donc $\forall x \in]-1,1[$

$$S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!\,2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

où $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = \frac{1}{n!}$

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)!\, 2^{n/2}} \text{ sinon} \end{cases}$$

On a donc c_n tel que

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} b_{n-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k!\,2^k (n-2k)!}$$

Par produit de Cauchy ($R = +\infty \geq 1$)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k!\,2^k (n-2k)!}\right) x^n$$

puis par unicité des développements en série :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!\,2^k (n-2k)!}}$$