Jules R. Colle de la semaine 16

Énoncé : On pose $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+itx}}{\sqrt{t}}\,dt$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

a. Soit $x \in \mathbb{R}$

<u>1^{er} cas : $t \in [1, +\infty[$:</u>

On note : $g : t \mapsto e^{-t}$

$f : t \mapsto \frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}$

$$0 \leq \left|\frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$$

Or $1 > 0$ donc par intégrale de référence, on en déduit g intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, par théorème de domination, f est intégrable sur $]1, +\infty[$.

<u>$2^{ème}$ cas : $t \in]0, 1[$</u>

On note :

$h : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$

$$0 \leq \left|\frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

Or h a une limite réelle en 1^- et $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc par théorème d'équivalence, f est intégrable sur $]0, 1[$.

b.

(H1) $\forall t \in]0, +\infty[$

$f(\cdot, t) : x \mapsto \frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(H2) $\forall x \in \mathbb{R}$

et (H3) $f(x, \cdot) : t \mapsto \frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{C}_{pm}$ et intégrable sur $]0, +\infty[$

$$\frac{\partial f(x,.)}{\partial x} : t \longmapsto \frac{it\, e^{-t+itx}}{\sqrt{t}} = i\sqrt{t}\, e^{-t+itx}$$

(H2)

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$

$|i\sqrt{t}\, e^{-t} e^{itx}| \leqslant \sqrt{t}\, e^{-t}$ On note $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}\, e^{-t}$

Or φ a une limite finie en 0^+ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc par théorème de comparaison φ est intégrable sur $]0,+\infty[$

Alors :

(C1) J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Soit a,b deux réels strictement positifs.

1. Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)\, dt$$

2. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

3. Exprimer $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$

1. Soit $f_x \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) \end{array} \right. \in \mathcal{C}_{pm}$.

$$f(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} b-a$$

$t \to b-a$ intégrable en 0^+ donc

f intégrable en 0^+ par comparaison.

On a : $\frac{e^{-at}}{t} \cos(xt) \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-at})$

$t \to e^{-at}$ intégrable donc

$t \to \frac{e^{-at}}{t} \cos(xt)$ intégrable

de même pour $t \to \frac{e^{-bt}}{t} \cos(xt)$

On en déduit que f intégrable en $+\infty$.

Donc F est bien définie sur $\mathbb{R}$

2. Utilisons le critère $\mathcal{C}_1$: $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ (x;t) \to \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) \end{array} \right.$

(H_1) $\forall t \in]0,+\infty[$

$g(\cdot;t)$ dérivable et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial g(\cdot,t)}{\partial x}(x) = (e^{-at} - e^{-bt}) \sin(xt)$ donc

$g(\cdot;t) \in \mathcal{C}_1$

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}$ • $f(x;\cdot) \in \mathcal{C}pm$

• $\dfrac{\partial f(x;\cdot)}{\partial x} \in \mathcal{C}pm$

(H_3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x;\cdot)$ intégrable

(H_4) Soit $t \in [a;+\infty[$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial g(x;t)}{\partial x}\right| = |(e^{-at} - e^{-bt})||\sin(xt)|$$
$$\leq |e^{-at} - e^{-bt}| = \varphi(t)$$

φ intégrable et $\mathcal{C}pm$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{\partial g(x;\cdot)}{\partial x}$ intégrable

et F est $\mathcal{C}^1$,

avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty}(e^{-at} - e^{-bt}) \sin(xt)\,dt$

• $\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin(xt) = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-at+ixt}\right)$

$$= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{t(ix-a)}}{ix-a}\right]_0^{+\infty}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{a-ix}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\frac{a+ix}{a^2+x^2}\right)$$
$$= \frac{x}{a^2+x^2}$$

Donc $F'(x) = \dfrac{x}{a^2+x^2} - \dfrac{x}{b^2+x^2}$

3. $\exists C \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(a^2+x^2) - \dfrac{1}{2}\ln(b^2+x^2) + C$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right) + C$$

Louis D. Semaine de colle n° 16

Enoncé :

Soit $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$

1) Mq $\forall x \geq 0$ $g_x : t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable en $\mathbb{R}^+$

2) On pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$

Mq $\lim_{x \to +\infty} x\,\varphi(x) = f(0)$

Une solution :

1) Soit $x \geq 0$, $A \geq 0$

$$0 \leq \int_0^A |g_x(t)|\,dt = \int_0^A \underbrace{|e^{-xt}|}_{\leq 1} |f(t)|\,dt \leq \int_0^A |f(t)|\,dt$$

Comme f intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $A \to +\infty$ livre le résultat.

2) Soit $x \geq 0$

$$x\,\varphi(x) - f(0) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} x e^{-xt} f(0)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} x e^{-xt} (f(t) - f(0))\,dt$$

Soit $\varepsilon > 0$, par continuité de f en 0

$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in [0, \alpha] \quad |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$

$\cdot \left| \int_0^a x e^{-xt} (f(t) - f(0))\, dt \right| \leq \int_0^a x e^{-xt} |f(t) - f(0)|\, dt$

$$\leq \int_0^a x e^{-xt} \, \varepsilon \, dt$$

$$= \varepsilon \left[-e^{-xt} \right]_0^a$$

$$= \varepsilon \, (1 - \underbrace{e^{-xa}}_{>0})$$

$$\leq \varepsilon$$

$\cdot \; -\int_a^{+\infty} x e^{-xt} f(0)\, dt = - e^{-xa} f(0) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$\cdot$ Il reste à montrer que $\int_a^{+\infty} x e^{-xt} f(t)\, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$u : t \mapsto x e^{-xt}$ $\qquad v : t \mapsto \int_0^t f(r)\, dr$

$u' : t \mapsto -x^2 e^{-xt}$ $\qquad v' : t \mapsto f(t)$

et u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

$x e^{-xt} \int_0^t f(r)\, dr \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ car f intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Par IPP,

$$\left| \int_a^{+\infty} x e^{-x} f(t)\, dt \right| = \left| - x e^{-xa} \int_0^a f(r)\, dr + \int_a^{+\infty} x^2 e^{-xt} v(t)\, dt \right|$$

$$\leq \underbrace{x e^{-xa} \int_0^a |f(r)|\, dr + x^2 \int_a^{+\infty} e^{-xt} \underbrace{\int_0^t |f(r)|\, dr}_{\leq \int_0^a |f(r)|\, dr}\, dt}_{\leq x^2 \times \frac{1}{x} e^{-xa} \int_0^a |f(r)|\, dr}$$

$$\leq 2 x e^{-xa} \int_0^a |f(r)|\, dr \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{CC}$$

Par théorème d'encadrement on conclut.

ELIOTT S.V. SEMAINE 17

ENONCÉ :

> Justification de l'existence et calcul de
> $$I_n = \int_0^1 t^n \ln^n(t)\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

UNE SOLUTION :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n \ln^n(t) \end{array} \right.$ est correctement définie

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est prolongeable par continuité en 0^+ par croissances comparées

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0,1[$ et I_n existe dans $\mathbb{R}$.

→ Première approche.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \longmapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \longmapsto \ln^n(t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et :

$$\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^n(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

$$\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^n(t) \xrightarrow[t \to 1^-]{} 0$$

Par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1}\, n \ln^{n-1}(t)\, \frac{1}{t}\,dt$ converge et $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln^n(t)\,dt = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n \ln^{n-1}(t)\,dt.$

→ De cette étude, nous pouvons calculer $\forall (n,m) \in \mathbb{N}_{>0}^2$

$$I_{n,m} = \int_0^1 t^m \ln^n(t)\,dt \quad \text{par récurrence.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ " $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 t^m \ln^n(t)\,dt = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$ "

Initialisation à $n=1$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 t^m \ln(t)\,dt \overset{\circledast}{=} -\int_0^1 \frac{t^m}{m+1}\,dt = \frac{-1}{m+1}\left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{(m+1)^2}$$

$$= \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$\circledast$ Par Ipp justifié en première partie

Hérédité : $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tq $P(n)$ vraie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 t^m \ln^{n+1}(t)\,dt \overset{\circledast}{=} -\int_0^1 \frac{t^{m+1}}{m+1}(n+1)\ln^n(t)\frac{1}{t}\,dt$$

$$= -\frac{n+1}{m+1}\int_0^1 t^m \ln^n(t)\,dt$$

$$\overset{HR}{=} -\frac{n+1}{m+1}\left(\frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}.$$

L'hérédité est prouvée, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2_{>0}$, $I_{n,m} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = I_{n,n}$, on en conclut que :

$$I_n = \boxed{\int_0^1 t^n \ln^n(t)\,dt = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pierre V. Colle de la semaine 16

Exercice 105. (Centrale) Soit $x \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$ est convergente. On note $\mathcal{F}(x)$ sa somme.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est continue et dérivable, et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression de $\mathcal{F}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt$.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

• si $x = 0$, l'intégrale est bien convergente

• si $x \neq 0$, $f_x \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \end{array}\right.$ est continue par morceau sur $]0,+\infty[$

• en $+\infty$ $|f_x(t)| = \left|\dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{t+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{t^3}$

$x\, t \mapsto \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{t^3}$ est intégrable en $+\infty$ par Riemann

par théorème de comparaison et domination, f_x l'est aussi

• en 0 $f_x(t) \sim \dfrac{xt}{(1+t^2)t} = \dfrac{x}{1+t^2}$, par prolongement par continuité en 0

$f_x(t) \longrightarrow x$, donc f_x est intégrale en 0

• donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$ est convergente

2. Posons $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \end{array}\right.$

(H_1) $\forall t \in]0,+\infty[$ $f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{1+x^2t^2} \times \dfrac{1}{1+t^2}$

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$

sont continus par morceau

(H_3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x,\cdot)$ est intégrable (par Q1)

(H_4) Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$

Posons $\varphi \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right.$ est continue par morceau sur $]0,+\infty[$

- en $+\infty$ $\quad \varphi(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable par Riemann
- en 0 $\quad \varphi(t)$ est prolongeable par continuité en 0

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{1}{1+t^2(x^2+1)+t^4x^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Par le critère $\mathcal{C}^1$,

(C_1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

(C_2) $\quad g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\, dt \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)} \times \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$g'(x) \underset{(*)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$ $\quad \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{Arctan}(\varepsilon) - \operatorname{Arctan}(0) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$

Ainsi
$$g'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)$$

$$\underset{u=xt}{=} \frac{1}{x^2-1}\left(x\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{(x-1)}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+1}$$

par continuité de g', $g'(1) = \dfrac{\pi}{4}$

3. $g' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\pi}{2} \frac{1}{x+1} \end{array} \right. = \frac{\pi}{2} \ln'(|x+1|)$

donc $\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{\pi}{2} \ln|x+1| + C$

or $g(0) = 0 = C$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \; g(x) = \frac{\pi}{2} \ln|x+1|$

4. $h \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\right)^2 \end{array} \right. \in \mathcal{C}_{pm}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

- en $+\infty$ $\quad \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\right)^2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$
- en 0 $\quad \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\right)^2 \underset{x \to 0}{\sim} 1$

donc h est intégrable

- $u : t \mapsto (\operatorname{Arctan}(t))^2$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

$u' : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \times 2 \operatorname{Arctan}(t)$ et $v' : t \mapsto \frac{1}{t^2}$

$-\frac{(\operatorname{Arctan}(t))^2}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et $-\frac{(\operatorname{Arctan}(t))^2}{t} \underset{t \to 0}{\sim} -t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

donc $\left[-\frac{(\operatorname{Arctan}(t))^2}{t}\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0

Par intégration par partie et par convergence de g

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt = \underbrace{\left[-\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t(1+t^2)} dt}_{= g(1) = \frac{\pi}{2} \ln(2)}$$

donc $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\right)^2 dt = \pi \ln(2)$

Sujet 2 :

Nom : GAYES

Note :

Question de cours : Question 5,

Critères de continuité pour une intégrale à paramètre : une version avec domination globale, une autre avec domination locale [n°18, 19 du chapitre 11, énoncé].

Continuité de la fonction : g : $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3} dt \end{array}$

Exercice 1 :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^n e^{-t}+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n e^{-t}+t^2} dt$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f : $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.
2. Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.
4. Calculer $f(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

(Brouillon)

1. $\int_0^{+\infty}$ Posons $\forall x \in \mathbb{R}$ $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x, t \mapsto \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} \end{array}\right.$

Mq $g_{(x,\cdot)}$ est ~~bien def~~ intégrable sur $[0,+\infty[$

- $g_{(x,\cdot)}$ est Cpm sur $[0,+\infty[$

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$

$\left|\frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{t(1+t^2)}$

Or $\frac{1}{t(1+t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ intégrable en $+\infty$

donc par dominat° g intégrable en $+\infty$.

donc f bien def sur $\mathbb{R}$

2. - $\mathbb{R}$ est sym // à 0
- Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$ ($t \mapsto \arctan(t)$ impaire sur $\mathbb{R}$) $= -f(x)$

Sophie G

Soit la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire

2) Vérifier : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$$

3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

4) Calculer $f(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$ puis pour $x \in \mathbb{R}$.

__Solution__

1° Posons $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x, t \longmapsto \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} \end{array} \right.$

Montrons

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x,\cdot)$ intégrable sur $[0,+\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$

* $g(x,\cdot)$ est continue par morceau sur $[0,+\infty[$

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$

$$\left|\frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{t(1+t^2)}$$

Or $\frac{1}{t(1+t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ intégrable en $+\infty$

donc par domination $g(x,\cdot)$ est intégrable en $+\infty$

d'où $\boxed{f \text{ bien définie sur } \mathbb{R}}$

* $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt = -f(x)$

$\boxed{f \text{ impaire}}$

($t \mapsto \arctan(t)$ impaire sur $\mathbb{R}$)

2) Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ Montrons

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right) = \frac{1+\cancel{x^2t^2}-x^2-\cancel{x^2t^2}}{(1-x^2)(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

$$= \frac{\cancel{1-x^2}}{(1+t^2)(1+x^2t^2)\cancel{(1-x^2)}}$$ donc

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$$

3) Posons $g \left| \begin{array}{l} I \times [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x, t \mapsto \dfrac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} \end{array}\right.$ où $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

H_1) $\forall t \in [0,+\infty[$

$g(\cdot, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

H_2) $\forall x \in I$ $g(x,\cdot) \in Cpm(I, \mathbb{R})$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot) \in (Cpm(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$

H_3) $\forall x \in I$ $g(x,\cdot)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ $x \in I$ $\left| g(x,t) \right| \leq \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{t(1+t^2)} \sim \dfrac{\pi}{2t^3}$

Comme en 1)

$t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ intégrable en $+\infty$

donc $g(x,\cdot)$ intégrable en $+\infty$

H_4) Soit $x \in I$ $t \in \mathbb{R}_+$

$\left| \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} \right| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ $\varphi \in Cpm(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et intégrable car $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

Donc

C_1) $\forall x \in I$ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

$$\boxed{C_2) \; f \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,dt \end{array}\right. \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Sophie G

et $\forall x \in I$ $\boxed{f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt}$

4)

Soit $x \in [0, +\infty[\setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt}_{[\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2} dt}_{(*)}\right)$$

Si $x > 0$

$$(*) = x\,[\text{Arctan}(tx)]_0^{+\infty} = \frac{x\pi}{2}$$

Si $x = 0$

$$(*) = 0$$

D'où $f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x} & x > 0 \end{cases}$

en 0 vaut $\frac{\pi}{2}$

pas besoin de disjoindre ?

$\exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x + c_1 & x = 0 \Rightarrow f(0) = c_1 = 0 \\ \frac{\pi}{2(1+x)} + c_2 & x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + c_2 = f(0) = 0$

d'où $c_2 = \frac{-\pi}{2}$

Alors

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) = \frac{\pi x}{2(1-x)}}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$

$\forall x < 0$ $f(x) = \frac{-\pi x}{2(1-x)}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{2(1-x)} & x \geq 0 \\ \frac{-\pi x}{2(1-x)} & x < 0 \end{cases}}$$

Raphaël Mouchonnet colle semaine n°16

1) Justifier l'existence $\forall x \in \mathbb{R}$ de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$

2) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
Calculer $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$

3) Exprimer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ $g(x,\cdot) \Big| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \end{array}$

en $+\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $|g(x,t)| \underset{t \to +\infty}{\overset{cc}{=}} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$
Comme $3/2 > 1$ par comparaison à une Riemann intégrable en $+\infty$ on a que $g(x,\cdot)$ est intégrable en $+\infty$.

en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$
si $x = 0$: $|g(0,t)| \underset{t \to 0^+}{\sim} 2|\ln(t)|$

$t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en zéro par comparaison $g(0,\cdot)$ l'est aussi.

si $x \neq 0$: $g(x,\cdot)$ est prolongeable par continuité en 0 donc $g(x,\cdot)$ est intégrable en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ceci conclu l'existence de $f(x)$

2). $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ les $g(x,\cdot)$ intégrables (Q1)
sur $]0,+\infty[$

- $\forall t \in]0,+\infty[$ $\quad g(\cdot,t) \Big| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x,t) \end{array}$

est $\mathcal{C}^1$ et on note

sa dérivée $\quad \dfrac{\partial g(\cdot,t)}{\partial x} \Big| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{2x}{t^2+x^2} \dfrac{1}{t^2+1} \end{array}$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad g(x,\cdot)$ et $\dfrac{\partial g(x,\cdot)}{\partial x} \Big| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x} \end{array}$

sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.

~~$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ $\forall (x,t) \in$~~ $\forall [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}_+^*$
$\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times]0,+\infty[$

$$0 \leq \left| \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \right| \leq \underbrace{\frac{2\beta}{\alpha^2+t^2} \frac{1}{t^2+1}}_{\varphi(t)}$$

où ~~$\forall t \in]0,+\infty[$~~ $\quad \varphi(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

et φ est prolongeable par continuité en 0. Comme avant φ est intégrable et continue par morceaux.

Ainsi par le critère $\mathcal{C}^1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\dfrac{\partial g(x, \cdot)}{\partial x}$ est intégrable

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{t^2+x^2} \frac{1}{t^2+1} dt$$

Par une décomposition en éléments simples

$$f'(x) = 2x\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1-x^2)} \frac{1}{(x^2+t^2)} + \frac{1}{(x^2-1)} \frac{1}{(t^2+1)} dt\right)$$

$$= \frac{2x}{x^2-1}\left([\arctan(t)]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}[\arctan(\tfrac{t}{x})]_0^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{x\pi - \pi}{x^2-1} = \underline{\frac{\pi}{x+1}}$$

Q3) $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \pi \ln(1+x) + C$$

<u>idées possibles</u> : - calculer $f(1)$?

~~prolonger f par continuité en 0~~

- faire tendre x vers 0 afin d'avoir $f(0) = C$ et calculer $f(0)$

Aucune de ses pistes n'ayant semblées fonctionner pour moi.

Stanislas G

Enoncé :

Soit f la fonction donnée par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,dt$

1) Montrer que f est définie et positive sur $]-1, +\infty[$

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie

Solution :

Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $x \in]-1, +\infty[$

$\sin^x(\cdot) \Big| \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin^x(t) \end{array}$ est Continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

1) $\sin^x(t) = e^{x \ln(\sin(t))}$ $(\sin(t) > 0)$

$t^x = e^{x \ln(t)}$

$$\frac{\sin^x(t)}{t^x} = e^{\underbrace{x \ln\left(\underbrace{\frac{\sin(t)}{t}}_{\xrightarrow[t \to 0^+]{} 1}\right)}_{\xrightarrow[t \to 0^+]{} 0}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 1$$

donc $\sin^x(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} t^x$

or t^x est intégrable en 0 si et seulement si $x > -1$ par le critère de Rieman

donc $\sin^x(t)$ est intégrable en 0 si et seulement si $x > -1$ par comparaison

donc $\sin^x(t)$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ car en $\frac{\pi}{2}$ il n'y a pas de problème

donc f est bien défini sur $]-1, +\infty[$

de plus $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$\sin(t) > 0$

$\forall x \in]-1, +\infty[$

$\sin^x(t) = e^{x \ln(\sin(t))} \geq 0$

donc par ~~puissance~~ positivité de l'intégrale $f(x) \geq 0$

2) (H_1) $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$

$$g(\cdot, t) \left| \begin{array}{l}]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin^x(t) = e^{x \ln(\sin(t))} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) \left| \begin{array}{l}]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(\sin(t)) \sin^x(t) \end{array} \right.$

(H_2) (H_3) $\forall x \in]-1, +\infty[$

$$g(x, \cdot) \left| \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin^x(t) \end{array} \right.$$

est continue par morceau et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ d'après Q1

et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot) \left| \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin^x(t) \ln(\sin(t)) \end{array} \right.$

et continue par morceau

(H_4') ~~Soit $(x, t) \in]-1, +\infty$~~

Soit $x \in [\alpha, \beta] \subset]-1, +\infty[$

$t \in]0, \frac{\pi}{2}]$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln(\sin(t))| \sin^x(t)$$

or comme $\sin(t) \in]0, 1]$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln(\sin(t))| \sin^x(t) \leq \underbrace{|\ln(\sin(t))| \sin^\alpha(t)}_{\varphi(t)}$$

$\varphi(t)$ est continue par morceau sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

$\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\varphi(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \underbrace{|\ln(\underbrace{\sin(t)}_{0 < \cdot \leq 1})|}_{= -\ln(\sin(t))} t^\alpha$$

~~par croissance comparé~~

Rapport de colle - semaine 16 Uta Bayen de Neger

Exercice :

Le domaine de définition, continuité, dérivabilité et une expression simple de $I : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$

• <u>Domaine de définition</u>.

Comme I est paire, on réduit l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Soit

- $f : (x,t) \longrightarrow e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}$
- $x \in \mathbb{R}_+$.

$f(x,\cdot)$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $]0,+\infty[$.

<u>en 0</u>

$$f(x,t) = e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

donc $f(x,\cdot)$ est prolongeable par continuité en 0

<u>en $+\infty$</u>

$$f(x,t) = e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (cc)$$

et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ par Riemann.
Par comparaison $f(x,\cdot)$ est intégrable en $+\infty$.

Donc $I(x)$ est bien définit.
Ceci étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{D_I = \mathbb{R}.}$

• <u>Continuité</u>.

On veut appliquer le théorème sur la continuité des intégrales

(H_1) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x,\cdot)$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $]0,+\infty[$
(H_2) $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(\cdot,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
(H_3 locale)

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$
Soient $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$

$$|f(x,t)| = e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}} \leq e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}} = f(a,t)$$

$f(a,\cdot)$ est $\mathcal{C}_{pm}$ et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème s'applique :

$\boxed{I \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ \text{ donc sur } \mathbb{R}.}$

- <u>Dérivabilité</u>

On remarque que la dérivabilité en 0 n'est pas évidente, on commence donc à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

On veut appliquer le théorème sur la dérivabilité d'intégrale.
(H_1) $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$$

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,\cdot)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ sont $\mathcal{C}_{pm}$ sur $]0,+\infty[$
(H_3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$
(H_4 locale)

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$
Soient $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2x}{t^2} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}} \leq \frac{2b}{t^2} e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}} = \varphi_{ab}(t)$$

<u>en $+\infty$</u>

$\varphi_{ab}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (CC)
de la même manière φ_{ab} est intégrable en $+\infty$

<u>en 0</u>

$$\ell_{ab}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}} = \frac{2b}{a^2} \frac{a^2}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad (cc)$$

donc ℓ_{ab} est prolongeable par continuité en 0.

Le théorème s'applique :

$$\boxed{\begin{array}{l} I \text{ est dérivable en } \mathbb{R}_+^*, \text{ donc en } \mathbb{R}^*. \\ \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad I'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\, dt \end{array}}$$

- <u>Expression simple de I.</u>

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On applique le changement de variable $u = \frac{x}{t}$ à $I'(x)$

$$I'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\, dt$$

$$= -\int_{+\infty}^{0} \frac{2}{x} u^2 e^{-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2} \left(-\frac{x}{u^2}\right) du$$

$$= -2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2-\frac{x^2}{u^2}}\, du$$

$$= -2\, I(x)$$

Donc I est solution de :

$$(E) : \quad y' + 2y = 0 \quad \text{où } y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$$

$\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = Ae^{-2x}$

~~En évaluant en 0, on a~~ $\cancel{A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

De même, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$ $\quad I(x) = Be^{2x}$ $\quad$ (lors du changement de variable le signe - s'ajoute)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\quad I(x) = \begin{cases} Ae^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ Be^{+2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On prolonge par continuité en 0, puis en évaluant en 0, on a $B = A = I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, \quad I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}}$$

On remarque que I n'est pas dérivable en 0.

Martin Kiritar-Liben

Rapport de colle, semaine 16.

Exercice 8. itp4

Soient $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1). D'une part, $x \longrightarrow \int_0^x e^{-t^2}dt$ est une primitive de $(t \longrightarrow e^{-t^2}) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, par le théorème fondamental de l'analyse. Alors, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Puis,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.}$$

D'autre part, on pose

$$h \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+) \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longrightarrow & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array} \right. .$$

On souhaite appliquer le critère de dérivabilité pour une intégrale à paramètre :

(H_1). Soit $t \in [0,1]$. Alors, $(h : x \longrightarrow h(x,t)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
On note $\frac{\partial h}{\partial x}(\cdot, t)$ sa dérivée. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}.$$

(H_2). Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors, $t \longrightarrow h(x,t)$ et $t \longrightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont dans $\mathcal{C}_{pm}([0,1], \mathbb{R})$.

(H_3). Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $(t \longrightarrow h(x,t)) \in C^0([0,1], \mathbb{R})$
donc $(t \longrightarrow h(x,t)) \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathbb{R})$.

(H_4). On utilise une hypothèse locale. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Alors,

$$\forall (x,t) \in [0,\alpha] \times [0,1], \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2|\alpha|$$

et $(t \longrightarrow 2|\alpha|) \in C_{pm}([0,1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1([0,1], \mathbb{R})$.

Ainsi le théorème s'applique et

(C_1). $g \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et est bien définie.

(C_2). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt}.$$

27. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Le changement de variable $t = x \cdot u$, $dt = x\,du$ dans $\int_0^x e^{-t^2}dt$ livre

$$f'(x) = \int_0^1 x \cdot e^{-(xu)^2}\,du. = -g'(x).$$

donc $f' + g' = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}}$, donc par critère différentiel,

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \ f(x) + g(x) = c} \quad (*)$$

$x \leftarrow 0$ dans $(*)$ livre

$$\underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{g(0)}_{\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}} = c$$

d'où le résultat.

37. On applique la version continue du théorème de la convergence dominée :

(H_1). Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors $(t \longrightarrow h(x,t)) \in \mathcal{C}pm_{[0,1]}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

(H_2). Soit $t \in [0,1]$. Alors,

$$h(x,t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

~~est~~ et $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}} \in \mathcal{C}pm_{[0,1]}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

(H_3). On a

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^+) \times [0,1], \quad |h(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et $\left(t \longrightarrow \frac{1}{1+t^2}\right) \in \mathcal{C}pm([0,1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1([0,1], \mathbb{R})$.

Ainsi le théorème s'applique et

(C_1). Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(t \longrightarrow h(x,t)) \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathbb{R})$

(C_2). ~~Pour tout~~ On a

$$g(x) = \int_0^1 h(x,t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^1 0\,dt = 0$$

De plus,

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad e^{-t^2} \leq e^{-t}$$

et $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge ; par théorème de domination, il vient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge. Alors par passage à la limite dans (*),

$$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

puis

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Titouan

D

Rapport de colle semaine 16

$$\boxed{\text{Montrer que } \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}}$$

On pose $f : t \mapsto \ln^2(t) \times \frac{1}{1-t} \quad \in \mathcal{C}_{pm}(]0;1[,\mathbb{R})$

f n'est pas définie en 0 car $t \mapsto \ln(t)$ n'est pas définie en 0

f n'est pas définie en 1 car $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas définie en 1

Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \left| \begin{array}{l}]0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln^2(t)\, t^n \end{array} \right.$

(H1) Si $n = 0$, f_0 est continue par morceaux sur $]0;1[$ et est intégrable sur $]0;1[$ car $t \mapsto \ln(t)$ l'est aussi sur cet intervalle

Si $n > 0$ alors f_n est continue par morceaux sur $]0;1[$

et $f_n(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissance comparée

$f_n(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0$ car $\ln^2(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0$ et $t^n \xrightarrow[t\to 1]{} 1$

donc f_n intégrable sur $]0;1[$

Soit $N \in \mathbb{N}$

(H2) $\sum_{n=0}^{N} f_n \left| \begin{array}{l}]0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sum_{n=0}^{N} f_n(t) = \sum_{n=0}^{N} \ln^2(t)\, t^n \end{array} \right.$

$$= \ln^2(t) \sum_{n=0}^{N} t^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} f : t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{1-t}$$

Donc $\sum_{n\geq 0} f_n \overset{CS}{\underset{]0;1[}{\Longrightarrow}} f$ continue par morceau sur $]0;1[$

(H3) $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 f_n(t)\,dt$ (car $f_n \geq 0$ sur $]0;1[$)

$$= \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \ln^2(t)\, t^n\,dt$$

$t \mapsto \ln^2(t)$

$t \mapsto \frac{2\ln(t)}{t}$ sont toutes $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$

$t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \ln^2(t)\frac{t^{n+1}}{n+1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0 \\ \ln^2(t)\frac{t^{n+1}}{n+1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ln^2(t)\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \text{ existe et vaut } 0$$

croissance comparée

$$\left.\begin{array}{l} \ln(t)\frac{t^{n+1}}{n+1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0 \\ \ln(t)\frac{t^{n+1}}{n+1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{croissance comparée} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ln(t)\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \text{ existe et vaut } 0$$

ainsi par intégration par partie

$$\int_0^1 \ln^2(t)t^n dt = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2\ln(t)}{t}t^{n+1}dt$$

$$= \frac{2}{(n+1)^2}\int_0^1 t^n dt$$

$$= \frac{2}{(n+1)^3}$$

Donc $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geq 0}\frac{2}{(n+1)^3} = \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n^3}$ converge par Riemann car $3>1$

Les hypothèses du théorème étant verifiées, on applique le théorème d'intégration terme-à-terme de Lebesgue

Donc $f=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est integrable sur $]0;1[$

et $\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$

$$\boxed{\text{ie } \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}}$$

Le resultat est donc demontré

REUTER
Robin

MPI

Rapport de Colle - 16

Exercice. Soit $t \in]-1,1[$. Montrer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{t\sin(\theta)}{1-t\cos(\theta)}\right) d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{t^n \sin(n\theta)}{n} d\theta$. En déduire la valeur de cette intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \sin(n\theta) \end{array} \right.$$

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme.

(H_1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathcal{C}pm$ et intégrable sur $[0;2\pi]$

(H_2) Soit $\theta \in [0;2\pi]$

$$\left| \frac{t^n}{n} \sin(n\theta) \right| \leqslant \frac{|t|^n}{n}$$

Or $\displaystyle\frac{|t|^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

par Riemann et comparaison

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{|t|^n}{n}$ converge.

Donc par domination $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(\theta)$ converge absolument.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement.

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}pm([0;2\pi])$

(H_3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| \frac{t^n}{n} \sin(n\theta) \right| d\theta$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$= \left|\frac{t^n}{n}\right| \left(\int_0^{\pi} \sin(n\theta)\,d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(n\theta)\,d\theta \right)$$

$$= \left|\frac{t^n}{n}\right| \left(\frac{2}{n} - 2\,\frac{\cos(n\pi)}{n} \right)$$

D'une part $\sum \left|\frac{t^n}{n^2}\right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

D'autre part $\sum \left|\frac{t^n}{n^2}\cos(n\pi)\right| \leq \sum \left|\frac{t^n}{n^2}\right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Par Riemann et comparaison
$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left|\frac{t^n}{n} \sin(n\theta)\right| d\theta$ converge.

Ainsi le théorème s'applique.

Appliquons le critère de dérivation à $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{t^n \sin(n\theta)}{n}}_{f_n(\theta)}$

(H_1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$

(H_2) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0, 2\pi]$.

(H_3) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \cos(n\theta)$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{\sin(n\theta)}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \cos(n\theta) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{i\theta n}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-te^{i\theta}} - 1\right) \quad \text{car } |t| < 1. \\
&= \frac{t\cos\theta - t^2}{1 - 2t\cos\theta + t^2}
\end{aligned}$$

(je n'arrive pas à mener le calcul à son terme)

Lina A

Colle de la semaine n°16.

Énoncé :

$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt$. Définition, dérivabilité, calcul.

Solution :

* Définition :

$g_x \left| \begin{array}{l}]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{array} \right.$ est cpm sur $]0,1[$.

• intégrabilité en 1 : on sait que $\frac{t-1}{\ln(t)} \longrightarrow 1$ comme taux d'accroissement. Donc $g_x(t) \sim t^x = e^{x\ln(t)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$

Donc g_x est prolongeable par continuité en 1^- pour tout $x \in \mathbb{R}$

• intégrabilité en 0^+ : $|g_x(t)| \sim \frac{t^x}{|\ln(t)|} = h_x(t)$

• $x > -1$. Soit $-1 < y < x$,

alors $h_x(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{-y}}\right)$. car $\frac{t^{\overset{>0}{x-y}}}{|\ln(t)|} \longrightarrow 0$

Et comme $-y < 1$, h_x est intégrable en 0^+.

• $x = -1$. $h_x(t) = \int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{\ln(t)\,t} dt = \ln(|\ln(1/2)|) - \ln(|\ln(\varepsilon)|)$
$\longrightarrow -\infty$.

Donc h_x est non intégrable en 0^+

• $x < -1$. Soit $x < y < -1$.

$|\ln(t)|\, t^{y-x} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par CC donc $\frac{1}{t^{-y}} = o\left(h_x(t)\right)$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^{-y}}$ est non intégrable en 0^+

Alors h_x est non intégrable.

Donc g_x est intégrable en 0^+, pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

Et

$\boxed{D_f =]-1,+\infty[}$

* __Dérivabilité :__ On cherche à appliquer le critère $\mathcal{C}^1$ à

$$g \left| \begin{array}{l} D_f \times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{array} \right.$$

(H_1) $\forall t \in]0,1[$ $g(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D_f.

(H_2) $\forall x \in D_f$ $g_x = g(x,\cdot)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ sont cpm sur $]0,1[$.

(H_3) $\forall x \in D_f$ $g(x,\cdot)$ est intégrable sur D_f.

(H_4) locale. Soit $(x,t) \in [\alpha,+\infty[\times]0,1[$ où $[\alpha,+\infty[\subset D_f$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x.$$

$\cdot$ $0<t<1$: $\alpha \leq x \Rightarrow \ln(t) x \leq \ln(t) \alpha$ $\quad [\ln(t) \leq 0]$

$$\Rightarrow |t-1| t^x \leq \underbrace{|t-1|}_{\leq 1} t^\alpha \leq t^\alpha$$

φ, $t \mapsto t^\alpha$ est cpm et intégrable sur $]0,1[$ $(-\alpha < 1)$.

Le théorème s'applique

(C_1) $\forall x \in D$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1[$.

(C_2) f est $\mathcal{C}^1$ sur D_f

Et

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^1 (t-1)t^x\,dt$$

Or

$\int_0^1 t^{x+1}\,dt$ et $\int_0^1 t^x\,dt$ sont intégrables sur $]0,1[$.

Ainsi

$$\int_0^1 (t-1)t^x\,dt = \int_0^1 t^{x+1}\,dt - \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.}$$

Lina. A.

* <u>Calcul</u> : on a démontré que

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

D'où

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1) + c.$$

On cherche à appliquer le théorème de convergence dominée version ℓ^∞.

(H_1) $\forall x \in D_f$ $g(x,\cdot)$ est cpm sur $]0,1[$.

(H_2) $g(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $0 \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$ est cpm sur $]0,1[$

(H_3) Soit $x \in [\alpha, +\infty[\subset D_f$.

$$t^x \leq t^\alpha \Rightarrow \left|\frac{t-1}{\ln(t)}\right| t^x \leq \left|\frac{t-1}{\ln(t)}\right| t^\alpha$$

$\varphi : t \longmapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est cpm et intégrable ~~sur~~ $]0,1[$ (comme avant).

Le théorème s'applique et livre :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt = \int_0^1 \lim_{x\to+\infty} \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt = 0.$$

Donc $c = 0$ et finalement

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1).}$$

MATHEO. N

Rapport de colle semaine 16

Exercice 109. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ posons $f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(t^n) \end{array} \right.$ Continue par morceaux sur $[0,1]$ (même continue par continuité de f et exponentielle et $\ln$).

Nous cherchons à appliquer le critère de convergence dominée pour les suites de fonctions.

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n est continue par morceaux sur $[0,1]$.

(H2) Soit $t \in [0,1]$:

- Si $t \in [0,1[$ $f_n(t) = f(t^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ $\left[t^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } f \text{ est continue sur } [0,1] \right]$
- Si $t = 1$: $f_n(t) = f(t^n) = f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$

Ainsi : $\boxed{f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CS} g \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} f(0) \text{ si } t \in [0,1[\\ f(1) \text{ si } t = 1 \end{cases} \end{array} \right. \text{ Cpm sur } [0,1]}$

(H3) Soit $(n,t) \in \mathbb{N} \times [0,1]$

f étant continue sur le segment $[0,1]$, le théorème des bornes atteintes nous livre que f est bornée et atteint ses bornes sur $[0,1]$ segment
donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$ $\forall t \in [0,1]$ $|f(t)| \leq M$

Ainsi $|f_n(t)| = |f(t^n)| \leq M$, en posant $\varphi \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \longmapsto M \end{array} \right.$ Cpm sur $[0,1]$

avec φ intégrable sur $[0,1]$ (intégration d'une constante sur un segment).

Nous pouvons appliquer le théorème qui nous livre

$\mathcal{C}_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n et g intégrables sur $[0,1]$

$\mathcal{C}_2$ $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 g(t)\,dt$$

$$= f(0)$$

Ainsi : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0)}$

Léon .N

Rapport de colle de la semaine n° 16.

Énoncé : posons $f \left| \begin{array}{l}]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt \end{array} \right.$

Q1 – Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et calculer f'

Q2 – En déduire une expression de $f(x)$

Solution :

soit $g \left| \begin{array}{l}]-1,+\infty[\times]0,1[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{array} \right.$

On souhaite appliquer le critère $\mathcal{C}^1$ à g.

(H1) Soit $t \in]0,1[$ $g(\cdot,t)$ est dérivable * et $\forall x \in]-1,+\infty[$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$

* continuement.

(H2) Soit $x \in]-1,+\infty[$ $g(x,\cdot)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ sont continues par morceaux sur $]0,1[$.

(H3) Soit $x \in]-1,+\infty[$

- en 1 : $g(x,t) \underset{\substack{t \to 1 \\ t < 1}}{\sim} t^x \underset{t \to 1}{\longrightarrow} 1$ par continuité de $\ln$ et $\exp$ en 1 et 0.

taux d'accroissement en 1

$g(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de 1 par car prolongeable par continuité.

- en 0 : on pose $y \in]-1, x[$

on a $g(x,t) \underset{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}{\sim} \underbrace{\frac{1}{|\ln(t)| t^x}}_{h_x(t)}$

$h_x(t) \underset{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}{=} o\left(\frac{1}{t^{-y}}\right)$ par croissances comparées

comme $-y < 1$ $t \mapsto \frac{1}{t^{-y}}$ est intégrable au voisinage de 0.

par comparaison h l'est. Par théorème de comparaison, $g(x,\cdot)$ l'est.

$g(x, \cdot)$ est intégrable sur ~~[~~ $]0,1[$.

(H4) locale : soit $a \in]-1, +\infty[$, $x \in [a, +\infty[$, $t \in]0,1[$

- si $x \geq 0$, par croissance de $t \mapsto e^{\overset{\geq 0}{x} \ln(t)}$

$$t^x = |t^x| \leq 1$$

- si $x < 0$, on a $x \underbrace{\ln(t)}_{\leq 0} \leq a \ln(t)$

par croissance de exp, $t^x = |t^x| \overset{\leq 0}{\leq} t^a$.

ainsi

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \underbrace{(t-1)\,(t^a+1)}_{\varphi(t)}$$

φ est continue par morceaux et son intégrabilité équivaut à celle de $t \mapsto (t-1)t^a$ car $t \mapsto t-1$ l'est (continue sur un segment)

en 0 : si $a \geq 0$, $t \mapsto (t-1)t^a$ est prolongeable par continuité.

si $a \leq 0$ $(t-1)t^a = O\left(\frac{1}{t^{-a}}\right)$ ainsi

par critère de Riemann et comparaison, avec $-a < 1$

$t \mapsto (t-1)t^a$ est intégrable sur un voisinage de 0.

en 1 : φ est ~~conti~~ prolongeable par continuité donc intégrable.

Alors (C1) $\forall x \in]-1, +\infty[$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0,1[$.

(C2) f est dérivable et $\forall x \in]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,dt \quad \text{soit } \varepsilon \in]0,1[.$$

$$\int_\varepsilon^1 (t-1)t^x\,dt = \int_\varepsilon^1 t^{x+1}\,dt - \int_\varepsilon^1 t^x\,dt$$

$$\int_\varepsilon^1 (t-1)t^x\,dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2}\right]_\varepsilon^1 - \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_\varepsilon^1$$

$\varepsilon \to 0$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}}$$

unicité de la limite

$x \mapsto \ln(x+2) - \ln(x+1)$ est dérivable et sa dérivée coïncide avec celle de f sur $]-1,+\infty[$ intervalle. $\exists c \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} + c$

pour $x = 0$

$\int_0^1 t-1\,dt = \frac{1}{2} - 1 + c$ or $\int_0^1 t-1\,dt = \frac{1}{2} - 1$ donc

faux problème car $t \mapsto t-1$ est continue

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[\quad f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}$$

Youssef. B. Colle de la semaine 16

Démontrer l'égalité suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

Solution :

On applique le théorème de convergence dominée ; mais sous la forme initiale de la série de fonctions proposée, on pourra pas avoir une domination indépendante de n. Donc on effectue un changement de variable : $t = x^n$:

$$n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,t^{1/n}\,dt$$

On pose alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall t\in[1,+\infty[$ $f_n(t) = \frac{e^{-t}}{t}\,t^{\frac{1}{n}}$

(H1) $\forall n\in\mathbb{N}$ f_n est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$

(H2) soit $(n,t)\in\mathbb{N}\times[1,+\infty[$

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{t}\,t^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-t}}{t} := f(t) \quad \left(\in \mathcal{C}_{pm}([1,+\infty[,\mathbb{C})\right)$$

(H3) soit $(n,t)\in\mathbb{N}\times[1,+\infty[$

$$\frac{t^{1/n}}{t} = \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}} \in [0,1]$$

Donc $|f_n(t)| = e^{-t}\frac{t^{1/n}}{t} \leq e^{-t} := \varphi(t)$

φ est intégrable et continue par morceaux sur $[1,+\infty[$

Alors d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,t^{(1/n)}\,dt = n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx \longrightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

Semaine 16 Oudoire Gatien

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n dx$

1. Etudier la ~~suite~~ convergence de la suite (u_n)

2. Prouver que la série $\sum u_n$ diverge en raisonnant par l'absurde.

1) Posons $f_n \left| \begin{array}{l} [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n \end{array} \right.$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Appliquons le théorème de convergence dominée

H_1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C_{pm}([0, \frac{\pi}{2}])$

H_2) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) \in [0, 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{C.S} f : \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \in C_{pm}([0, \frac{\pi}{2}])$$

H_3) Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

$|f_n(x)| \leq 1$ et $\left| \begin{array}{l} [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 1 \end{array} \right. \in C_{pm}([0, \frac{\pi}{2}]) \cap L^1([0, \frac{\pi}{2}])$

donc

les f_n et f sont intégrables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (H_1')

et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = 0$

2) On cherche à appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour obtenir une contradiction

H_2') Montrons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $|\cos(\frac{\pi}{2}\sin(x))| < 1$

donc la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-\cos(\frac{\pi}{2}\sin x)}$

qui est continue par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

H_3') Supposons par l'absurde que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

les f_n sont de signe constant.

donc $\sum_{n\geq 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x)| dx$ converge

donc $\left| \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1-\cos(\frac{\pi}{2}\sin(x))} \end{array} \right. \in \mathcal{L}^1(]0, \frac{\pi}{2}])$

Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$1-\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t)) \underset{t\to 0^+}{=} 1-\cos(\frac{\pi}{2}t + o(t))$$

$$\underset{t\to 0^+}{=} 1-(1-\frac{\pi^2}{8}t^2 + o(t^2))$$

donc $\frac{1}{1-\cos(\frac{\pi}{2}\sin t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \cancel{\frac{\pi^2}{8}t^2}$ $\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{t^2} \geq 0$

$2>1$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{t^2} dt$ diverge

le théorème de comparaison nous livre la contradiction.

donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge

Mehdi B. Colle de la semaine 16

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)} dt$.

1. Sur quel intervalle I de $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f est -elle définie ?
2. Montrer qu'elle est continue sur I.
3. Montrer que $x \mapsto f(x) - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt$ est bornée sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

Solution : 1) $g_x \begin{vmatrix}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^x(t+1)} \geq 0 \end{vmatrix}$ $\in \mathcal{C}_{pm}(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

Soit $x \in \mathbb{R}$

• en $+\infty$

$g_x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$. Par théorème de comparaison, g_x intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x > 0$

• en 0^+

$g_x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^x}$ donc il faut $x < 1$.

Donc $\boxed{D_f =]0, 1[}$

2) • $\forall x \in]0,1[$ g_x continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$

• $\forall t > 0$ $x \mapsto \frac{1}{t^x(t+1)}$ $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1[$

• Soit $[a,b] \subset]0,1[$, $t > 0$.

• $t \in]0,1]$

$a \leq x \leq b \overset{\ln(t) \leq 0}{\Longrightarrow} a\ln(t) \geq x \geq b\ln(t)$

donc $-a\ln(t) \leq -x \leq -b\ln(t)$ et $t^{-x} \leq t^{-b}$ et $\underbrace{\frac{1}{1+t}}_{>0} t^{-x} \leq t^{-b}$

• $\underline{t>1}$ De même ($\ln(t)>0$) $t^{-x} \leq t^{-a}$

et $\frac{1}{1+t} t^{-x} \leq \frac{1}{1+t} \frac{1}{t^{a}}$.

Donc :

$$\forall t>0 \ |g_x(t)| = g_x(t) \leq \underbrace{t^{-b} \mathbb{1}_{]0,1]}(t) + \frac{t^{-a}}{1+t} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t)}_{\varphi(t)}.$$

φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car

• $\underline{\text{en } 0^+}$: $t \mapsto \frac{1}{t^b}$ intégrable car $b<1$

• $\underline{\text{en } +\infty}$: $t \mapsto \frac{1}{1+t} \frac{1}{t^a} \sim \frac{1}{t^{a+1}}$ intégrable car $a+1>1$.

Par théorème de continuité :

$$\boxed{f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)} dt \text{ continue sur }]0,1[}$$

Alexandre M.

Colle semaine 16

Enoncé :

Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{|\sin(\lambda x)|}{x} dx \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(\lambda)$

Résolution :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

on pose $u = \lambda x$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\lambda} u$

d'où $\quad dx = \frac{1}{\lambda} du$

I_λ a la même nature que $\int_0^{\lambda\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} \cancel{\lambda} \cdot \cancel{\frac{1}{\lambda}} du$

On pose $f \left| \begin{array}{l}]0;\lambda\pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{|\sin(x)|}{x} \end{array} \right.$ qui est cpm. sur $]0;\lambda\pi]$

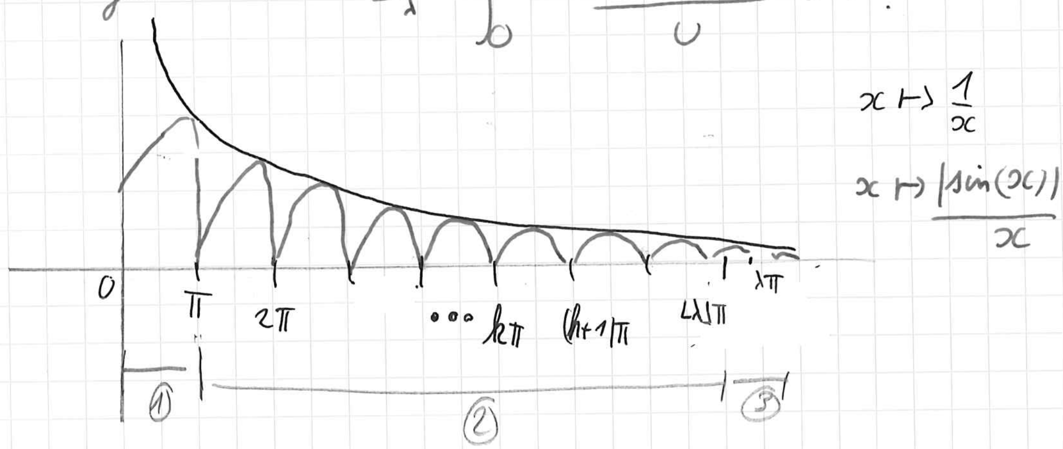
$\forall x \in]0; \min(\lambda\pi, \frac{\pi}{2})]$ $\quad f(x) = \frac{|\sin(x)|}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$

On reconnait un taux d'accroissement et on a donc

$f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$ $\quad f$ est donc prolongeable par continuité.

Il s'agit d'un faux problème, ainsi :

I converge et $I_\lambda = \int_0^{\lambda\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du$.



on suppose $\lambda > \pi$.

on scinde l'intégrale en 3 comme indiqué sur le shéma

$$\int_0^{\lambda\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du = \underbrace{\overbrace{\int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du}^{I_1}}_{cst} + \underbrace{\overbrace{\int_{\pi}^{\lfloor\lambda\rfloor\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du}^{I_2(\lambda)}}_{(*)} + \underbrace{\overbrace{\int_{\lfloor\lambda\rfloor\pi}^{\lambda\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,du}^{I_3(\lambda)}}_{(**)}$$

(*)

$$\int_{\pi}^{\lfloor\lambda\rfloor\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du = \sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$\forall u \in [k\pi ; (k+1)\pi]$

$$\frac{|\sin(u)|}{k\pi} \geq \frac{|\sin(u)|}{u} \geq \frac{|\sin(u)|}{(k+1)\pi}$$

(inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc
$$\underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{k\pi}\,du}_{\frac{2}{k\pi}} \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du \geq \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{(k+1)\pi}\,du}_{\frac{2}{(k+1)\pi}}$$

donc
$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \frac{1}{k} \geq \int_{\pi}^{\lfloor\lambda\rfloor\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du \geq \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \frac{1}{k+1}}_{\sum_{k=2}^{\lfloor\lambda\rfloor+1} \frac{1}{k}}$$

(1)

i.e
$$\frac{2}{\pi} H_{\lfloor\lambda\rfloor} \geq \underbrace{\int_{\pi}^{\lfloor\lambda\rfloor\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du}_{I_2(\lambda)} \geq \frac{2}{\pi}\left(H_{\lfloor\lambda\rfloor+1} - 1\right)$$

Alexandre M.

(**)

$$0 \leq \underbrace{\int_{\lfloor \lambda \rfloor \pi}^{\lambda \pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\, du}_{I_3(\lambda)} \leq \underbrace{\int_{\lfloor \lambda \rfloor \pi}^{\lambda \pi} \frac{1}{u}\, du}_{\ln(\lambda\pi) - \ln(\lfloor \lambda \rfloor \pi)}$$

$$\leq \ln\left(\frac{\lambda}{\lfloor \lambda \rfloor}\right)$$

$$\leq \ln\left(\frac{\lfloor \lambda \rfloor + 1}{\lfloor \lambda \rfloor}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor \lambda \rfloor}\right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

Par théorème d'encadrement

$$I_3(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

Ainsi pour tout $\lambda > \pi$ ① livre

$$I_1 + \frac{2}{\pi} H_{\lfloor \lambda \rfloor} + I_3(\lambda) \geq I_\lambda = I_1 + I_2(\lambda) + I_3(\lambda) \geq I_1 + \frac{2}{\pi}(H_{\lfloor \lambda \rfloor + 1} - 1) + I_3(\lambda)$$

et $H_{\lfloor \lambda \rfloor} \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \ln(\lfloor \lambda \rfloor)$

on a $I_\lambda \sim \frac{2}{\pi} \ln(\lambda)$

Anaé D.

Rapport de colle S16

Soit $f : [0, +\infty[$ $\mathcal{C}^0$ et de carré intégrable

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,dt \right) = 0$

Solution :

Soit $A > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x f(t)\,dt \right) \quad \text{(Chasles)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^A f(t)\,dt}_{\in \mathbb{R}}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_A^x f(t)\,dt$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$0 \leq \left| \int_A^x f(t)\,dt \right| \leq \sqrt{\int_A^x f^2(t)\,dt} \sqrt{\int_A^x 1\,dt}$$

d'où

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_A^x f(t)\,dt \right| \leq \sqrt{\int_A^x f^2(t)\,dt} \underbrace{\frac{\sqrt{x-A}}{\sqrt{x}}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1} \quad \left(\sqrt{x} > 0 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x}} > 0\right)$$

Quand $x \to +\infty$

$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,dt$ est une queue d'intégrale convergente d'où

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,dt \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

Ainsi

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_A^x f(t)\,dt \right| \leq \underbrace{\sqrt{\int_A^x f^2(t)\,dt} \frac{\sqrt{x-A}}{\sqrt{x}}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

Par théorème d'encadrement $\frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_A^x f(t)\,dt \right| \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

Léa N.

Colle de la semaine n° 16

Énoncé :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt$$

Définition, dérivabilité, calcul

Solution :

$$f : x \longmapsto \int_0^1 \underbrace{\frac{t-1}{\ln(t)} t^x}_{=: g_x(t)} \, dx$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$

g_x est continue par morceaux et positif sur $]0,1[$

. en 1 :

$$g_x(t) \underset{t \to 1^-}{\sim} t^x = e^{x \ln(t)} \xrightarrow[t \to 1^-]{} 1$$

g_x prolongeable par continuité en 1.

. en 0 :

$$g_x(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \underbrace{\frac{1}{|\ln(t)| \, t^{-x}}}_{=: h_x(t)}$$

* $x > -1$ $\quad \exists \; -1 < y < x$

$$g_x(t) \underset{t \to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{-y}}\right) \quad \text{car} \quad \frac{t^{\overbrace{x-y}^{>0}}}{|\ln(t)|} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

et $-y < 1$ donc $t \longmapsto \frac{1}{t^{-y}}$ intégrable en 0

Par comparaison, g_x est intégrable en 0.

* $x = -1$

$$h_x(t) = \frac{1}{|\ln(t)|\, t}$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(t)\, t}\, dt = \ln\left(\left|\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|\right) - \ln\left(\left|\ln(\varepsilon)\right|\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -\infty$$

* $x < -1$ $\qquad \exists\ x < y < -1$

$$\frac{1}{t^{-y}} = o\left(h_x(t)\right)$$

$$|h_x(t)|\, t^{y-x} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \qquad \text{(croissances comparées)}$$

$t \longmapsto \dfrac{1}{t^{-y}}$ non intégrable en 0^+

Donc par comparaison h_x est non intégrable en 0^+

On en déduit que g_x intégrable en 0 ~~si~~ pour tout $x \in \,]-1, +\infty[$ par comparaison.

Alors $\boxed{D_f = \,]-1, +\infty[\, = A}$

2/ On veut appliquer le critère $\mathcal{C}^1$ de dérivabilité.

à $g \left| \begin{array}{ccc} A \times \,]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \dfrac{t-1}{\ln(t)}\, t^x \end{array} \right.$

(H1) $\forall t \in]0,1[$ $\quad g(\cdot,t) : x \longmapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$

et $\forall x \in A$ $\quad \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)\, t^x$ sa dérivée.

(H2) $\forall x \in A$ $\quad g(x,\cdot)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ sont cpm sur $]0,1[$

(H3) $\forall x \in A$ $\quad g(x,\cdot) : x \longmapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}\, t^x$ intégrable sur $]0,1[$

(cf début)

(H4 locale) Soit $a > -1$

Soit $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[$

$$\left|(t-1)t^x\right| \leq \underbrace{(1-t)t^a}_{\varphi(t)}$$

<u>en 0</u>

$$\varphi(t) \sim t^a = \frac{1}{t^{-a}}$$

or $a > -1$ donc par Riemann φ intégrable en 0.

<u>en 1</u> $\quad \varphi(t) \underset{t \to 1^-}{\longrightarrow} 0 = \varphi(1)$ donc intégrable en 1

Alors le théorème s'applique.

(C1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1[$

(C3) f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in A$

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)\, t^x \, dt = \int_0^1 t^{x+1} - t^x \, dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

Alors $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in A$

$$f(n) = \ln(n+2) - \ln(n+1) + c$$
$$\underset{(*)}{=} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + c$$

On sait que $h : t \longmapsto \frac{1-t}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$

en posant $h(0)=0$ et $h(1)=1$, elle devient prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Donc elle est bornée sur $]0,1[$

$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall t \in]0,1[$

$|h(t)| \leq M$

Alors $\forall n \in A$ $\quad |f(n)| \leq M \int_0^1 t^n \, dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc par passage à la limite dans (*) quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$c = 0$.

Donc $\boxed{\forall n \in]-1,+\infty[\quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^n \, dt = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}$

Enoncé : Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} n e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Introduisons $f_n \left| \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n e^{-x^n} = n e^{-e^{n\ln(x)}} \end{array} \right.$ continue par morceaux sur $[1;+\infty[$

- Caractère bien défini

  - En $+\infty$: $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ c.c.

Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ d'après Riemann.

Ainsi $I = \int_1^{+\infty} n e^{-x^n} dx$ existe bien et converge.

- Hypothèses du théorème de convergence dominée

H_1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue par morceaux sur $[1;+\infty[$

H_2) Posons $t \mapsto x^n$ bijection strictement croissante sur $[1;+\infty[$
Comme I est convergente, nous pouvons appliquer le théorème de changement de variable $t = x^n$:

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} n \frac{1}{n} e^{-x} x^{\frac{1}{n}-1} dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

On pose alors $g \left| \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{-x}}{x} \end{array} \right.$ continue par morceaux sur l'intervalle $[1;+\infty[$

H_3) Soit $x \in [1;+\infty[$.

Remarquons que $\left| \frac{e^{-t}}{t} \right| \leq e^{-t} = \varphi(t)$

Or φ est cpm et intégrable sur $[-1;+\infty[$

- Nous appliquons alors le théorème de convergence dominée

Ce dernier nous livre alors l'intégrabilité de g sur l'intervalle $[1;+\infty[$, ainsi que la relation souhaitée :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} n e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx}$$

Robin G. Colle de la semaine 16

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$\exists x_0 > 0 \quad f(t)\, e^{-x_0 t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Montrons que $\forall x > x_0 \quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt}\, dt$ est bien définie.

Solution : Soit $x > x_0$.

$h_x \left| \begin{array}{l} [0, +\infty[\\ t \mapsto f(t)\, e^{-xt} \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^0$ par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a := x - x_0 > 0$.

$e^{at} \cdot e^{-xt} = e^{-x_0 t}$

$\Rightarrow e^{at} |f(t)| e^{-xt} = |f(t)| e^{-x_0 t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $|f(t)\, e^{-xt}| \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-at})$

et $t \mapsto e^{-at}$ intégrable en $+\infty$ car $a > 0$.

Par théorème de comparaison, h_x intégrable sur $[0, +\infty[$

Donc g est bien définie sur $]x_0, +\infty[$.

Wassim M.

Rapport de Colle semaine n°16

Exercice : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ et

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
2) Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
3) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$
4) Calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Solution :

1) Par le théorème fondamental de l'analyse, $h_1 : t \mapsto \int_0^x e^{-t^2}$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $h_1'(x) = e^{-x^2}$

comme $x \mapsto x^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

2)

$H_1)$ $\forall t \in [0,1]$, $g(\cdot, t) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}\right.$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

et $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}}$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2x(1+t^2)\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2x e^{-x^2} e^{-(xt)^2}$

~~H_2) $\forall$~~

$H_2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x, \cdot) \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}\right.$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $[0,1]$

et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot) \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \end{array}\right.$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $[0,1]$

H3) comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x,.)$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x,.)$ est intégrable sur $[0,1]$

H4) ~~$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ $\left|2x e^{-x^2} e^{-(xt)^2}\right| \leq 2$~~

$\forall (x,t) \in [a,b] \subset \mathbb{R} \times [0,1]$ $\frac{2x^2}{e^{x^2} e^{(xt)^2}} \leq \frac{2a^2}{e^{a^2} e^{(at)^2}}$

$\varphi : t \mapsto \frac{2a^2}{e^{a^2} e^{(at)^2}}$ est $\mathcal{C}pm$ sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1 donc intégrable sur $[0,1]$

alors, par le critère $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètres

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est ~~d~~ intégrable sur $[0,1]$

et $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \int_0^1 -2x^2 e^{-x^2} e^{-(xt)^2} dt$

3) on pose $h \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{vmatrix}$ d'après 1) et 2) h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{(-tx)^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

$\underset{u=tx}{=} -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$

la fonction h est donc constante

Wassim M.

$h(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}}$

4) $\forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \qquad 0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$

Par le théorème d'encadrement $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

ainsi quand $x \to +\infty \qquad h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$

et donc $\qquad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$. Comme I est positive ($\int$ d'une fonction positive), on a $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ainsi $\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

MANGIACOMINI
Amélien

Rapport de Colle.

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$$

1) Ensemble de définition

2) Montrer que f est C^2 sur son ensemble de définition privé de 0.

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ on a ;

$$g : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \quad C_{pm} \text{ sur } [0 ; +\infty[$$

et $\frac{t^{\frac{3}{2}} e^{-xt}}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (c.c.) donc

$$g(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

≥ 0 et intégrable en $+\infty$

donc g est intégrable en $+\infty$ par comparaison.

et g continue donc intégrable en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}_{<0}$ on pose : $g : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$

$$t\, g(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{(c.c.)}$$

donc $\dfrac{1}{\underbrace{t\,g(t)}_{\neq 0}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(g(t)\right)$ or $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas

intégrable en $+\infty$ donc par comparaison

g n'est pas intégrable en $+\infty$.

On conclut que $D_f = \mathbb{R}_+$.

2) On pose $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{array} \right.$

On applique le théorème de dérivation pour une intégrale à paramètres ;

H_1) ~~h(.,t) est $\mathcal{C}^2$~~ Soit $t \in \mathbb{R}_+$;

$h(\cdot, t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ;

$\dfrac{dh}{dx}(\cdot, t) : x \longmapsto -\dfrac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}$

$\dfrac{d^2h}{dx^2}(\cdot, t) : x \longmapsto \dfrac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}$

$H_2)$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$h(x,\cdot)\ ,\ \frac{dh}{dx}(x,\cdot)\ ,\ \frac{d^2h}{dx^2}(x,\cdot)$$

sont $\mathcal{E}_{pm}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$H_3)$ On montre que ; soit $x \in \mathbb{R}_+^*$;

$\frac{dh}{dx}(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après H_2 ; $\frac{dh}{dx}(x,\cdot)$ est $\mathcal{E}_{pm}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$t^2 \frac{dh}{dx}(x,\cdot) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \rightarrow 0 \quad (x>0 \text{ et C.C.})$$

donc $\frac{dh}{dx}(x,\cdot) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ≥ 0 et intégrable en $+\infty$

donc $\frac{dh}{dx}(x,\cdot)$ est intégrable en $+\infty$ (par comparaison)

et $\frac{dh}{dx}(x,\cdot) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ intégrable en 0

donc par comparaison $\frac{dh}{dx}(x,\cdot)$ est intégrable en 0.

On conclut $\frac{dh}{dx}(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

A4 (Oracle) Soit $[\alpha ; \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$

Soit $(x, t) \in [\alpha ; \beta] \times \mathbb{R}_+$;

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) \right| = \left| \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \right|$$

$$\leq \frac{t^2 e^{-\alpha t}}{1+t^2} := \varphi_\alpha(t)$$

On a ; φ_α est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $\mathbb{R}_+$

et $t^2 \varphi_\alpha(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (c.c. et $\alpha > 0$)

donc $\varphi_\alpha(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ≥ 0 et intégrable en $+\infty$

donc φ_α est intégrable en $+\infty$ (par comparaison)

et $t^{\frac{1}{2}} \varphi_\alpha(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\varphi_\alpha(t) \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ ≥ 0

et intégrable en 0

donc par comparaison φ_α est intégrable en 0.

On conclut, comme le théorème s'applique, que ;

(1) $\dfrac{d^2}{dx} f(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

(2) $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ est C^2

et $\dfrac{df}{dx} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} -t \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$

et $\dfrac{d^2 f}{dx^2} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$

Rayan. G

Colle de la semaine n° 16

Enoncé :

Démontrer

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Solution :

On pose $f \left| \begin{array}{l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln^2(x)}{1+x^2} \end{array} \right.$

f est bien défini et continu par morceaux sur $]0,1[$

Soit $x \in]0,1[$

$|-x^2| < 1$ donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \ln^2(x) x^{2k}$

On utilise le théorème d'intégration termes à termes de Lebesgue :

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \left| \begin{array}{l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-1)^n \ln^2(x) x^{2n} \end{array} \right.$

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue par morceaux sur $]0,1[$

De plus

en 0 : $(-1)^n \ln^2(x) x^{2n} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (Croissance comparée) en 1 : $(-1)^n \ln^2(x) x^{2n} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 1$

Donc f_n étant prolongeable par continuité en 0 et en 1, nous en déduisons f_n intégrable sur $]0,1[$.

(H2) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I $]0,1[$ vers f qui est continue par morceaux sur $]0,1[$.

(H3)

$I_n = \int_0^1 |(-1)^n \ln^2(x) x^{2n}| \, dx = \int_0^1 \ln^2(x) x^{2n} \, dx$

On pose $u : t \mapsto \ln^2(t)$, $v : t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ deux applications $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$

Par le théorème d'intégration par parties :

I_n a la même nature que $\int_0^1 \frac{2}{2n+1} x^{2n} \ln(x) \, dx$

et s'il y a convergence la même valeur car :

$[uv]_0^1$ bien défini : $uv(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (croissance comparée)

$uv(t) \underset{t \to 1^-}{\longrightarrow} 0$

$\int_0^1 \frac{2}{2n+1} x^{2n} \ln(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} \ln(x) \, dx$

On pose $w : t \mapsto \ln(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$

$[vw]_0^{+\infty}$ bien défini de manière analogue

Par le théorème d'intégration par parties :

I_n a la même nature que $\frac{2}{2n+1}\int_0^1 \frac{1}{2n+1} x^{2n}\,dx$

et s'il y a convergence la même valeur :

Or $\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1}$

Donc I_n converge et $I_n = \frac{2}{(2n+1)^3} \geq 0$

Or $\sum_{n\geq 0} \frac{2}{(2n+1)^3}$ converge par Riemann donc $\sum_{n\geq 0} I_n$ converge

(~~par théorème de comparaison~~)

Ainsi (H3) est vérifié et nous pouvons appliquer le théorème :

On en déduit que $\cancel{\sum_{n\geq 0}}$ f est intégrable sur I

et $\underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}dt} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt}_{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n \ln^2(x) x^{2n}\,dx}$

$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Nicolas M
Énoncé

Colle de la semaine 16

Exercice 2. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis déterminer une expression de f.

Solution

a) Posons $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t^2}\cos(xt) \end{array} \right.$

$g(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-t^2}\cos(xt) \end{array} \right.$, $x\in\mathbb{R}$, est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$

$g(\cdot,t) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-t^2}\cos(xt) \end{array} \right.$, $t\in\mathbb{R}_+$

Montrons que $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+$

$0\leq |g(x,t)| \leq e^{-t^2}$

- $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.
- $t\longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$

Par comparaison et domination, $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

b) Appliquons le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres

(H1) Soit $t\in\mathbb{R}_+$ $g(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t e^{-t^2}\sin(xt)$

(H2) Soit $x\in\mathbb{R}$

- $g(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$
- $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$

(H3) Soit $x\in\mathbb{R}$ d'après a), $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

(14) Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ $\quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| \leq t e^{-t^2} = \varphi(t)$

φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Alors, le théorème s'applique et :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt)\, dt$$

$t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{2}$, $t \mapsto \sin(xt)$ sont $\mathcal{C}^1$ et

$\frac{e^{-t^2}}{2} \sin(xt) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Comme $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable,

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt \quad \text{(Intégration par parties)}$$

Ainsi, $f'(x) + \frac{x}{2} f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Donc f est solution de (E) : $y' + \frac{x}{2} y = 0$, d'inconnue y

Mais, $Sol_{(E)} = \{ \cancel{A}\ x \mapsto Ae^{-\frac{x^2}{4}} : A \in \mathbb{R} \}$

$f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = Ae^0 = A$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$

Celia A.

Colle de la semaine n°16.

énoncé.

Soit $x>0$.
Montrer l'existence de l'intégrale
$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt.$$

Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$, puis exprimer cette fonction.

Solution.

Posons $f_x \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \end{array} \right.$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons que f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

en $+\infty$. $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^3}\right)$ (croissances comparées)

Or, selon les intégrales de référence, $t \longmapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable en $+\infty$ $(3>1)$.
Donc, par théorème de comparaison, f_x est intégrable en $+\infty$.

en 0.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $f_x(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{1-t-(1-xt)+o(t)}{t}$

$$\xrightarrow[t\to 0]{} x-1.$$

Par théorème de comparaison, f_x est intégrable en 0.

Donc $\boxed{f_x \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[}$

Appliquons le critère $\mathcal{C}^1$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $f_t : x \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^*$ $\dfrac{\partial f_t}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $t \mapsto e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ f_x est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $a > 0$. Soit $t > 0$. Soit $x \in [a, +\infty[$.

$|e^{-xt}| \leq e^{-at}$. ($t \mapsto \exp(-t)$ décroissant)

Or, $t \mapsto e^{-at}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ selon les intégrales de référence $(a > 0)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, I est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad I'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad I(x) = \ln(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

En évaluant en 1, nous avons $C = 0$.

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad I(x) = \ln(x)}$$

Tigüin, David

Colle de la semaine.

Exercice 4 :

1. Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Écrire $f(1)$ comme la somme d'une série.

Soit $\forall x \in \mathbb{R}$ $g \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\sin(xt)}{e^t-1} \end{array}\right.$ cpm sur $]0,+\infty[$

- en $+\infty$ $\forall t \in]0,+\infty[$ $|g(t)| \leq \frac{1}{e^t-1}$

et $\frac{1}{e^t-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ qui est intégrable sur $]1,+\infty[$ donc par théorème de domination g intégrable sur $]1,+\infty[$

- en 0 : $\cdot$ $\sin(xt) \sim xt$ car $xt \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$
  - $e^t - 1 \sim t$

Ainsi $\frac{\sin(xt)}{e^t-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} x \in \mathbb{R}$ donc g est intégrable sur $]0,1]$

Donc f est bien défini.

2) $\cdot$ On note $\forall t \in]0,+\infty[$ $g(\cdot,t) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(xt)}{e^t-1} \end{array}\right.$

Alors $H_1)$ $\forall t \in]0,+\infty[$ $g(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
et $\frac{\partial g(\cdot,t)}{\partial x} = t\frac{\cos(xt)}{e^t-1}$ sa dérivée par rapport à x

$H_2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x,\cdot)$ est $\mathcal{C}pm$ sur $\mathbb{R}$ et si $t \in]0,+\infty[$
$g(x,\cdot)$ intégrable par (1).
De plus $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot) : t \mapsto t\frac{\cos(xt)}{e^t-1}$ $\mathcal{C}pm$ sur $]0,+\infty[$

Finalement $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$
$|g(x,t)| \leq \frac{t}{e^t-1} = \varphi(t)$ cpm

- or $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (cc) et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable sur $]1,+\infty[$ par Riemann donc par comparaison φ intégrable sur $]1,+\infty[$
- De plus $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ comme en (1) donc φ est prolongeable par continuité en 0 et intégrable sur $]0,+\infty[$

Ainsi par théorème sur la dérivabilité d'une intégrale à paramètres f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow e^{-(n+1)t} \sin(t) \end{array} \right.$

alors $H_1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est Cpm, de plus en $+\infty$: $f_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, et par Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$, donc par comparaison f_n intégrable sur $]1,+\infty[$ et elle est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,+\infty[$

$H_2)$ Comme $\forall t \in]0,+\infty[$ $0 \leq e^{-t} < 1$ et pour $t=0$ $f_n(t)=0$ donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } t=0 \\ \frac{\sin(t)}{e^t - 1} \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$

$H_3)$ Comme f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ on calcule $\int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)} \sin(t)\, dt = I_n$

$t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto e^{-t(n+1)}$ sont C^1 sur $[0, +\infty[$
alors par intégration par parties :

$$I_n = \left[-\frac{\sin(t)}{n+1} e^{-t(n+1)} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{n+1} e^{-(n+1)t} \, dt$$

$$= 0 + \left[-\frac{\cos(t)}{(n+1)^2} e^{-(n+1)t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{(n+1)^2} e^{-(n+1)t} \, dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} I_n$$ d'où

$$I_n = \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$$ et

$\sum_{n \geq 0} I_n$ converge par critère de Riemann et comparaison

$\left(I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \right)$

Par théorème d'intégration terme à terme
$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} \, dt = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$$

Maximilien .T. Colle de la Semaine 16

$$f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \end{array} \right.$$

Q1) Montrer que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et expliciter f'

Q2) Déterminer une expression simple de f

Q3) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Solution On pose $g \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \end{array} \right.$

H_1)
$\forall t \in]0,+\infty[$ $g(\cdot,t)$ $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall (x,t) \in]0,+\infty[^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t) e^{-xt}$$

H_2) $\forall x \in]0,+\infty[$ $g(x,\cdot)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ cpm sur $]0,+\infty[$

H_3) $\forall x \in]0,+\infty[$ $g(x,\cdot)$ intégrable sur $]0,+\infty[$

en 0 : prolongeable par continuité, en $+\infty$ $\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$\frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

locale
H_4) Soit $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$ Soit $t \in]0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |\sin(t)| e^{-xt} \leq |\sin(t)| e^{-at} \text{ intégrable sur }]0,+\infty[$$

(continue en 0 et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$)

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ intégrable sur $]0,+\infty[$ et

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in]0,+\infty[$ $f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t) e^{-xt} dt$

Soit $x \in]0,+\infty[$ Soit $A \in \mathbb{R}_+$

$-\int_0^A \sin(t) e^{-xt} = -\mathrm{Im}\left(\int_0^A e^{t(i-x)}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-x}\left(e^{A(i-x)} - 1\right)\right)$

$= -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+x^2} \times (-i-x) \times \left(e^{A(i-x)} - 1\right)\right)$

$= -\left(\frac{1}{1+x^2} \times \left(-e^{-Ax}\cos(A) + 1\right) - x e^{-Ax}\sin(A)\right)$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{-1}{1+x^2}$ donc $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Q2) Soit $x \in]0,+\infty[$ $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1+x^2} = f'(x)$

Ainsi $\underset{\substack{\downarrow x \to +\infty \\ 0 \text{ (CV dominée)}}}{f(x)} = \underset{\substack{\downarrow x \to +\infty \\ 0}}{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)} + C$ donc $C = 0$

Donc $f = \left|\begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}\right.$

Q3) Nous voulons appliquer la version continue du théorème de convergence dominée.

H_1) $\forall x \in]0,+\infty[$ $g(x,\cdot)$ cpm sur $]0,1]$

H_2) $\forall t \in]0,1]$ $g(x,t) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\sin(t)}{t}$

H_3) Soit $x \in]0,+\infty[$, $t \in]0,1]$

$\left|\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \leq \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \underset{t \to 0}{\sim} 1$ intégrable en 0.

Donc $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \xrightarrow[x \to 0]{} \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}$

Maximilien T.

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \xrightarrow[x\to 0]{} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad U : t \mapsto \frac{1}{t}$ C^1 sur $[1,+\infty[$

$V : t \mapsto \frac{+1}{1+x^2}\left(-e^{-tx}\cos(t) - \cancel{x}xe^{-tx}\sin(t)\right)$ C^1 sur $[1,+\infty[$ de dérivée $\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$

De plus $\frac{-\cancel{x}1}{1+x^2}\frac{\left(e^{-tx}\left(\cos(t) + \cancel{x}x\sin(t)\right)\right)}{t} \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{-1}{1+x^2}e^{-\cancel{x}x}\left(\cos(1)+x\sin(1)\right)$

$\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Donc par IPP $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt} = \frac{+1}{1+x^2}e^{-x}\left(\cos(1) \cancel{+} + x\sin(1)\right)$

$- \cancel{x}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-tx}\frac{\left(\cos(t) + \cancel{x}x\sin(t)\right)}{t^2}$

Posons $h \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\times [1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \frac{e^{-tx}\left(\cos(t)+\cancel{t}x\sin(t)\right)}{t^2}\end{array}\right.$

$H_1)$ $\forall x \in]0,+\infty[$ $h(x,\cdot)$ cpm sur $[1,+\infty[$

$H_2)$ $\forall t \in \cancel{]}[1,+\infty[$ $\quad h(x,t) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\cos(t)}{t^2}$

$H_3)$ Soit $(x,t) \in]0,+\infty[\times [1,+\infty[$

$|h(x,t)| = \frac{e^{-tx}|\cos(t) + x\sin(t)|}{t^2} \leq \frac{e^{-tx}}{t^2}\left(|\cos(t)| + x|\sin(t)|\right)$

$\leq \frac{|\cos(t)|}{t^2} + \frac{e^{-tx}x|\sin(t)|}{t^2}$

Or $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $e^{-tx} x \leq M$ car $e^{-tx} x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

et $x \mapsto e^{-tx} x$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $|Q(x,t)| \leq \frac{1}{t^2}\left(|\cos(t)| + M|\sin(t)|\right)$ intégrable en $+\infty$.

$\leq \frac{1}{t^2}(M+1) \quad (2>1)$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos(t) + x\sin(t)}{t^2} dt \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$

$\displaystyle= \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$

Or comme $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

Par unicité de la limite il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$

Hugo D. Colle de la semaine n°16

> Soient $a > 0$ et $b > 0$.
>
> Démontrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-at}}{1-e^{-bt}}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t\,e^{-(a+bn)t} \end{array} \right.$

On applique le théorème d'intégration termes à termes

(H1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ $\mathcal{C}_{pm}$ sur $\mathbb{R}_{>0}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En 0^+ f_n prolongeable par continuité

. En $+\infty$ $\displaystyle f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (C.C)

Et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ par le critère de Riemann $(2>1)$

Par théorème de comparaison : f_n intégrable $\wedge P$

(H2) Soit $t \in \mathbb{R}_{>0}$ $\displaystyle f_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(t)$ aussi

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_{>0}$

De plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{t e^{-at}}{1-e^{-bt}}$

(H3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{-1}{a+bn} e^{-(a+bn)t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$

- $-\frac{t}{a+bn} e^{-(a+bn)t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$
- $\frac{-t}{a+bn} e^{-(a+bn)t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Par intégration par parties :

$\int_0^{+\infty} t e^{-(a+bn)t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{-1}{a+bn} e^{-(a+bn)t} dt$ ont même et nature

Comme la première converge (f_n intégrable sur $\mathbb{R}_{>0}$) :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-(a+bn)t} = \frac{1}{a+bn} \int_0^{+\infty} e^{-(a+bn)t} dt$$

$$= \frac{1}{(a+bn)^2}$$

Comme $f_n \geqslant 0$: $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{(a+bn)^2}$

De plus $\frac{1}{(a+bn)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{b^2 n^2}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{b^2 n^2}$ converge

Donc $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ aussi

Par le théorème, on en déduit que

$\int_0^{+\infty} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right|$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-at}}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}}$$

Antoine B. colle de la semaine 16.

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, calculer f'

2. En déduire une expression de $f(x)$.

Une solution :

bien définie : soit $x \in]-1,+\infty[$.

montrons que $g_x \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{array} \right.$ est intégrable sur $]0,1[$.

en 0^+ : $g(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{-1}{\ln(t) t^{-x}} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$ et $t \mapsto t^{-x}$ est intégrable en 0^+ car $-x < 1$.

par comparaison, g est intégrable en 0^+.

en 1^- : changement de variable, on étudie $h = t-1$ quand $h \to 0^-$.

$$g(t) = g(h+1) = \frac{h}{\ln(h+1)} (h+1)^x \underset{h\to 0^-}{\sim} \frac{h}{h} \times 1 = 1$$

par comparaison g est intégrable en 1^- car prolongeable par continuité en 1.

$\underline{\mathcal{C}^1}$: posons $g \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[\times]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{array} \right.$

- $\forall t \in]0,1[$ $\quad g(\cdot,t) : x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$

  et $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\underbrace{g(\cdot,t)'(x)}_{\text{noté } \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot,t)} = (t-1)\, e^{x\ln(t)}$

- $\forall x \in]-1,+\infty[$ $\left| \begin{array}{l} g(x,\cdot) : t \mapsto g(x,t) \text{ est cpm sur }]0,1[\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot) : t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur }]0,1[\end{array} \right.$

- $\forall x \in]-1,+\infty[$, $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1[$

  (1ère partie de l'exercice)

- $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[$ où $a > (-1)$

$$\left| \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \right| = \Big| \underbrace{\overbrace{t^{x+1}}^{\geq 0}}_{<1} - t^x \Big| = |t-1|\, e^{x\ln(t)} \leq t^{+a} \quad \text{car } t \in]0,1[$$

$\varphi \left| \begin{array}{l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^{-a}} \end{array} \right.$ est cpm sur $]0,1[$, est intégrable sur $]0,1[$. car $-a < 1$.

ainsi, le critère $\mathcal{C}^1$ s'applique et livre f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$,

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f'(x) = \int_0^1 (t-1)\, e^{x\ln(t)}\, dt.$$

$$= \int_0^1 t^{x+1}\, dt + \int_0^1 - t^x\, dt$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Q2. $\quad \forall x \in]-1,+\infty[$

donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1) + C$.

comme $t \in]0,1[$, $\quad x \to +\infty : \underline{\underline{0 = C}}$

Piero T. Colle de la semaine 16

Exercice : Soit $a>0$ et $b>0$.
Démontrer $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$

Solution : Soit $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} \end{array} \right. \in \mathcal{C}_{pm}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto te^{-(a+bn)t} \end{array} \right. \in \mathcal{C}_{pm}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in]0,+\infty[$.

$|f_n(t)| = te^{-(a+bn)t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $|f_n|$ est intégrable en 0.

$t^3 e^{-(a+bn)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée

donc $|f_n(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann)

donc par théorème de comparaison $|f_n|$ est intégrable en $+\infty$.

$\lim_{t\to 0}\left(-\frac{te^{-(a+bn)t}}{(a+bn)}\right) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{te^{-(a+bn)t}}{(a+bn)}\right) = 0$ par croissance comparée

donc $\int_0^{+\infty} -\frac{e^{-(a+bn)t}}{(a+bn)}\,dt$ converge par théorème d'intégration par partie

et $\int_0^{+\infty} te^{-(a+bn)t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+bn)t}}{(a+bn)}\,dt$

$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{e^{-(a+bn)t}}{(a+bn)^2}\right) - \lim_{t\to 0}\left(-\frac{e^{-(a+bn)t}}{(a+bn)^2}\right)$

$= \frac{1}{(a+bn)^2}$

donc $\sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(a+bn)^2}$

or $\frac{1}{(a+bn)^2} \sim \frac{1}{b^2} \times \frac{1}{n^2}$ qui converge absolument par Riemann

donc $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ converge par théorème de comparaison.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc :

$\int_0^{+\infty} f$ converge et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

Louis B   Colle de la semaine 16

1) Etablir que $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ CV et vaut $-\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt$

2) En déduire que $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

3) Déterminer sa valeur en utilisant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

---

1) On pose $f \left| \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t} \end{array} \right.$

f est définie sur $]0,1]$ et $\mathcal{C}pm$ sur $]0,1]$

Or $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ donc $f(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 1$

Donc f est prolongeable par continuité en 0.

et donc f est intégrable sur $]0,1]$

$\left. \begin{array}{l} t \mapsto \ln(t) \\ t \mapsto \ln(1+t) \end{array} \right\} \mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$

$\ln(t)\ln(1+t) \xrightarrow[t \to 1]{} 0$ et $\ln(t)\ln(1+t) \sim t\ln(t) \underset{t \to 0}{\overset{cc}{\longrightarrow}} 0$

Donc $\ln(t)\ln(1+t)$ a une limite finie aux bornes

Par théorème d'Intégration Par Partie

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt \quad \square$$

2) On veut appliquer le théorème d'Intégration terme à terme de Lebesgue à

$$\left(f_n : t \mapsto \ln(t)(-t)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(]0,1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$$

(H1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(t)| = \ln(t)\, t^n \longrightarrow 0 \quad (cc)$

Donc f_n est $\mathcal{C}_{pm}$ et intégrable sur $]0,1]$

(H2) $\sum f_n = \sum (t \mapsto \ln(t)(-t)^n)$ CS ($|t|<1$) et vaut

$\ln(t) \dfrac{1}{1+t}$.

(H3) $\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^1 |f_n| = \int_0^1 \ln(t)\, t^n \, dt$

$\left.\begin{array}{l} t \mapsto \ln(t) \\ t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}\right\}$ $\mathcal{C}_{pm}$ sur $]0,1]$

$\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0$

Donc $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)$ a une limite finie aux bornes

donc $\int_0^1 \ln(t)\, t^n \, dt = -\int_0^1 \dfrac{t^n}{n+1} \, dt = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$

et par Riemann $\sum \dfrac{-1}{(n+1)^2}$ converge

Ainsi par le théorème on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(t)(-t)^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(t)(-t)^n \, dt$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} \, dt \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 |f_n|$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{-1}{(n+1)^2}$$

$$\|$$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Lemme B

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ $\square$

3) $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{+1}{(2n-1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\left(\pm \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2}\right) \quad = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} - \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

$N \to +\infty$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$ $\square$