REUTER Robin

MPI

Rapport de colle 15

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$n \in \mathbb{N}$, $n = 2^n (2q - 1)$

$f_n : x \longmapsto f\left(x + (-1)^{pgcd(p,q)} \times \frac{p}{q}\right)$

$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} f_n(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$

Montrer que φ est continue en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et que $\forall x \in \mathbb{Q}$, φ est continue à droite, discontinue à gauche.

Remarquons que

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \| \frac{1}{n^2} f_n \|_\infty = \frac{1}{n^2}$

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \| \frac{1}{n^2} f_n \|_\infty$ converge par critère de Riemann.

Donc φ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$.

Supposons $x_0 \geqslant 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geqslant N, \quad f_n(x_k) = 1$.

Ainsi $\forall k \geqslant N$,

$|f_n(x_k) - f_n(x_0)| = 0$.

Donc $f_n(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x_0)$.

Par symétrie du problème pour $x_0 < 0$, on obtient la continuité de φ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$.

$\exists (p_0, q_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$

et $p_0 \wedge q_0 = 1$.

Fixons $N = 2^{p_0}(2q_0 - 1)$

Soit $\varepsilon > 0$

$f_N(x_0 + \varepsilon) - f_N(x_0)$

$= f(\varepsilon) - f(0)$

$= 0$

Rapport de Colle, semaine n°15

Wassim M.

Exercice : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \end{array} \right.$

Q1) Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f

Q2) la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$

Solution :

Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

. $u : x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(x) > 0$

$v : x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

ainsi $f_n = v \circ u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

. Convergence simple de f_n :

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2} = |x| \end{array} \right.$

. Convergence uniforme de f_n :

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}\,| \leq \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1/n}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}}$$

or $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \geq \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}}}_{\text{indep. de } x}$

Par passage au sup : $\| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, par <u>théorème d'encadrement</u>

$\| f_n - f \|_\infty \longrightarrow 0$

Ainsi, <u>f_n converge uniformément vers f</u>

Q2) $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$ <u>n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$</u> car f n'est pas

dérivable en 0

MATHEO . N

Rapport de colle semaine 15

Exercice 4. Pour tout x dans $[1,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt.$$

En cas d'existence, on pose

$$U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

a. Vérifier que la fonction U est définie sur $[1,+\infty[$ et exprimer $U(x)$ pour tout x dans cet intervalle.

b. Montrer que la fonction U est continue sur $[1,2]$.

c. En déduire un développement asymptotique de la fonction ζ au voisinage de 1. $\frac{1}{x-1}$

a. Soit $x \in [1,+\infty[$, montrons que $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.

• Si $x = 1$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n(1) = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln(n))$

$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - (\ln(N+1) = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \ln(N+1) - \frac{1}{N+1}$

on a (série harmonique) : $H_N = \ln(N) + \gamma + o(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

Ainsi, on a : $\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = \gamma - \frac{1}{N+1} + o(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \gamma$.

Ainsi : $\sum_{n\geq 1} u_n(1)$ converge donc $U(1)$ est définie et $U(1) = \gamma$.

• Si $x \in]1,+\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \int_1^{N+1} \frac{1}{t^x}\,dt$

[Chasles] $= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}} - 1\right)$

$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(1-x)(N+1)^{\overset{x-1}{>0}}} + \frac{1}{1-x}$

$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$

Ainsi : $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge donc $U(x)$ est bien définie et $U(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$

b.

b. On a $\forall x \in]1,+\infty[$

$$U(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$, donc par continuité sur $]1,2]$ de ζ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ on a : U continue sur $]1,2]$.

Il nous reste alors a montrer sa continuité en 1.

Nous le ferons par <u>critère de continuité pour les séries de fonction</u>.

(H1) Montrons que $\forall x \in]1,2]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} u_n(1)$

Soit $x \in]1,2]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x}\left(e^{(1-x)\ln(n+1)} - e^{(1-x)\ln(n)}\right)$$

$$= \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(1-x)}\left(e^{(1-x)\ln(n+1)} - 1 - \left(e^{(1-x)\ln(n)} - 1\right)\right)$$

or : exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^{au} - 1}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} a e^{a \times 0} = a.$$

Ainsi comme $1-x \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0$ on a :

$$u_n(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= u_n(1)$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{u_n \text{ est continue sur } [1,2]}$.

(H2) Montrons que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[1,2]$, montrons qu'elle converge normalement sur $[1,2]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ~~soit~~ $x \in [1,2]$:

$$0 \leq |u_n(x)| = \left|\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\right| = \left|\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right) dt\right|$$

Posons $f \Big|\begin{array}{l} [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{t^x} \end{array}$

f est dérivable sur $[n, n+1]$ et $\forall t \in [n, n+1]$

$$f'(t) = -\frac{x}{t^{x+1}}$$

on a : $|u_n(x)| = \left|\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right)dt\right|$

or : $\forall t \in [n, n+1]$ $\quad t^x \leq (n+1)^x \iff -\frac{1}{t^x} \leq -\frac{1}{(n+1)^x}$

Ainsi : $|u_n(x)| \leq \left|\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}}{n-(n+1)}\right| = \left|\frac{f(n)-f(n+1)}{n-(n+1)}\right|$

- f continue sur $[n, n+1]$
- f dérivable sur $]n, n+1[$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que $\frac{f(n)-f(n+1)}{n-(n+1)} = f'(c)$

Ainsi : $|u_n(x)| \leq \left|-\frac{x}{c^{x+1}}\right| \leq \frac{x}{n^{x+1}}$ $\quad [c^{x+1} \geq n^{x+1} \Rightarrow \frac{1}{c^{x+1}} \leq \frac{1}{n^{x+1}}$

d'où : $(x \in [1,2])$ $|u_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$ / indépendant de x

Ainsi : u_n est majorée et (sur $[1,2]$) $\|u_n\|_{\infty,[1,2]} \leq \frac{2}{n^2}$ / $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2}$ CV par Riemann $(2>1)$

Ainsi, par domination $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,[1,2]}$ converge

et donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[1,2]$ donc uniformément.

$\mathcal{C}_1$ Le critère nous livre alors : $\boxed{\sum_{n\geq 1}^{+\infty} u_n = U \text{ continue sur } [1,2]}$

c. La continuité de U en 1 nous livre :

$U(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} U(1)$ d'où : $\zeta(x) + \frac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \gamma$ [a1]

Ainsi : $\zeta(x) + \frac{1}{1-x} = \gamma + o(1)$ livrant $\zeta(x) = \gamma - \frac{1}{1-x} + o(1)$

Comme $\frac{o(1)}{\gamma - \frac{1}{1-x}} = \frac{o(1)(1-x)}{\gamma(1-x)-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ on a : $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \gamma - \frac{1}{1-x}$

Par critère quotient on obtient $\gamma - \frac{1}{1-x} \sim -\frac{1}{1-x}$

Ainsi, par transitivité de la relation $\sim$

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

Louis B   Khôlle de la semaine

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante

On pose, pour tout n, $u_n : x \mapsto a_n x^n (1-x)$

1) Mq la serie $\sum U_n$ CS sur $[0,1]$

2) Mq $\sum U_n$ CN sur $[0,1] \Leftrightarrow \sum \frac{a_n}{n}$ CV

3) Déterminer une condition pour que $\sum U_n$ CU sur $[0,1]$

1) Soit $x \in [0,1]$

- Si $x = 0$: alors comme la suite $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle on en déduit que $\left(\sum_{k=0}^{n} U_k(x)\right)$ converge

- Si $x = 1$: De même $U_n(1) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
  Donc $\left(\sum_{k=0}^{n} U_k(x)\right)$ converge.

- Si $x \in]0,1[$:
  Comme (a_n) est décroissante et positive
  $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n(x) \leq a_0 x^n$
  et comme $|x| < 1$ $\sum a_0 x^n$ converge
  Donc par théorème de domination
  $\sum U_n(x)$ converge

Donc $\sum U_n$ CS sur $[0,1]$

2) Calcul de $\|U_n\|_\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n' : x \longmapsto a_n \left[(1-x) n x^{n-1} - x^n\right]$

$= a_n \left((n+1)(-x^n) + n x^{n-1}\right)$

Donc $\forall x \in [0,1]$

$$U_n'(x) \geqslant 0$$

$$(\Rightarrow) \quad n x^{n-1} \geqslant (n+1) x^n$$

$$(\Leftarrow) \quad x \leqslant \frac{n}{n+1}$$

Donc

	0	$\frac{n}{n+1}$	1
U_n	$\nearrow$		$\searrow$

et $U_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$

Donc $\|U_n\|_\infty = a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$

et $\|U_n\|_\infty = a_n e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \frac{1}{n+1}$

$$= a_n e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{1}{n+1}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} a_n e^{-1} \frac{1}{n}$$

Donc par thm de comparaison

$\sum a_n e^{-1} \frac{1}{n}$ et $\sum \|U_n\|_\infty$ ont même nature

Donc $\sum \|U_n\|_\infty$ CV $\Leftrightarrow \sum a_n e^{-1} \frac{1}{n}$ CV

$\Leftrightarrow \sum \frac{a_n}{n}$ CV.

ELIOTT S.V.

ENONCÉ :

Exercice 103. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction tendant vers 0 en $+\infty$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n : x \mapsto f(nx))_{n \in \mathbf{N}^*}$.
2. Soit $a > 0$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a;+\infty[$.
3. À quelle condition y a-t-il convergence uniforme sur $]0;+\infty[$?

1) Montrons que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{C.S.} 0_{\mathbb{R}^{]0,+\infty[}}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Comme $x \neq 0$, $x > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} nx \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ f(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0 \end{array}\right\} \underset{\text{lim}}{\overset{\text{comp.}}{\Rightarrow}} f(nx) = f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2) Soit $a > 0$. Montrons que $f_n \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ [a,+\infty[}]{C.U.} 0_{\mathbb{R}^{[a,+\infty[}}$

i.e. Montrons que

- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Par définition, comme f tend vers 0 en $+\infty$,

- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}_{\geq a}\ \forall x \geq A,\ |f(x)| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists A \in \mathbb{R}_{\geq a}\ \forall x \geq A,\ |f(x)| \leq \varepsilon$.

Donc si $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq \frac{A}{n}$, $\underbrace{|f(nx)|}_{= |f_n(x)|} \leq \varepsilon$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall n \geq A,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x)| \leq \varepsilon$.

3) ~~$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$, $f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$~~

~~on rappelle que f est la fonction identiquement nulle sur $]0,+\infty[$.~~

On procède par caractérisation séquentielle de la convergence uniforme. ~~On pose $g = 0_{]0,+\infty[^{\mathbb{R}}}$~~

On pose g la fonction identiquement nulle sur $]0,+\infty[$.

On sait que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.S.} g$

On a :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U.} g \iff \left(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}, \; f_n(x_n) - g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right)$$

Soit $x \in]0,+\infty[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{x}{n}$.

Alors si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x_n) - g(x_n) = f\left(\frac{x}{n} \times n\right) - g\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)$$

Donc $f_n(x_n) - g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Ceci implique donc $f(x) = 0$.

i.e. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U} g$ ssi $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = 0$.

Donc il y a convergence uniforme sur $]0,+\infty[$ si et seulement si f est la fonction identiquement nulle sur $]0,+\infty[$

Jules R.

Colle de la semaine 15

Énoncé : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \exp(-n^2 x)$
1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$
2. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

Solution :

1. On sait :

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}_{>0} \ 0 \leq e^{-n^2 x} \leq e^{-nx}$

Par disjonction de cas :

1er cas : $x = 0$ alors :

$$e^0 = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad \text{alors}$$

$\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge grossièrement

2ème cas : $x \in \mathbb{R}_{<0}$ alors :

$$e^{-n^2 x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \quad \text{alors}$$

$\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge grossièrement

3ème cas : $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}_{>0} \ 0 \leq e^{-n^2 x} \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $|e^{-x}| \neq 1$, on a la convergence de la série géométrique et ainsi, par théorème de domination, on a $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

2.

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$: ✓

(H2) Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$

On a :

$\forall k \in \mathbb{N} \quad f_n^{(k)} = (-n^2)^k e^{-n^2 x}$

que l'on peut démontrer par récurrence.

Pierre V. Colle de la semaine 15

Suites et séries de fonctions Colle S15 MPI*

Exercice 1 : On définit sur $[0,1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_0(x) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$$

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

Solution

- Soit $x \in [0,1]$, posons $g \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t + \frac{1}{2}(x - t^2) \end{array} \right.$

g est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$ $g'(t) = 1 - t \leq 0$

donc $\left. \begin{array}{l} g \text{ est croissante sur } [0,1] \\ g(0) = \frac{1}{2}x \geq 0 \\ g(1) = \frac{1}{2}(x+1) \leq 1 \end{array} \right\}$ donc $g([0,1]) \subset [0,1]$

- Posons $u_0 = f_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = g(u_n)$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$: " $u_{n+1} = g(u_n)$ est défini, $u_{n+1} \in [0,1]$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$ "

*) Initialisation pour $n = 0$

$u_0 \in [0,1]$ donc $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}x$ est défini et $u_1 \in [0,1]$

et $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}x \geq 0$ donc $P(0)$ est vraie

*) Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$

$u_{n+1} \in [0,1]$ par hypothèse de récurrence donc $u_{n+2} = g(u_{n+1})$ est défini

et $u_{n+2} \in [0,1]$ car $[0,1]$ est stable par g

$u_{n+2} - u_{n+1} = g(u_{n+1}) - g(u_n) \geq 0$ car g est croissante sur $[0,1]$

et $u_{n+1} \geq u_n$ par hypothèse de récurrence .

*) Conclusion : Par l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$ $P(n)$ est vraie

• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in[0,1]$ ($\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\in[0,1]$)

$g(u_n)=u_{n+1}$, par continuité de g

$n\to+\infty$: $g(\ell)=\ell$ donc $\ell = \frac{1}{2}(x-\ell^2)=\ell$

donc $|\ell|=\sqrt{x}$

donc $\ell=\sqrt{x}$ (car $\ell\in[0,1]$)

Ainsi $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f \left| \begin{array}{l}[0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x}\end{array}\right.$

• Soit $n\in\mathbb{N}$ $0\le \sqrt{x} - f_{n+1}(x) = \sqrt{x} - f_n(x) - \frac{1}{2}(\overbrace{x - f_n(x)^2}^{(\sqrt{x} - f_n(x))(\sqrt{x} + f_n(x))})$

$= (\sqrt{x} - f_n(x))(1-\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2} \underbrace{f_n(x)}_{\ge 0})$

$\le (\sqrt{x} - f_n(x))(1-\frac{1}{2}\sqrt{x})$

• Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{x} - f_n(x) \le \cancel{(\sqrt{x} - f.}(1-\frac{1}{2}\sqrt{x})^n\sqrt{x}$

*) Initialisation pour $n=0$

$\sqrt{x} - f_0(x) = \sqrt{x} \le (1-\frac{1}{2}\sqrt{x})^0\sqrt{x} \le \sqrt{x}$ donc $P(0)$ est vraie

*) Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$, Montrons $P(n+1)$

$\sqrt{x} - f_{n+1}(x) \le (\sqrt{x} - f_n(x))(1-\frac{1}{2}\sqrt{x})$

$\le (1-\frac{1}{2}\sqrt{x})^{n+1}\sqrt{x}$ par hypothèse de récurrence

*) Conclusion : par l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence

$\forall n\in\mathbb{N}$ $P(n)$ est vraie.

• Posons $h \left|\begin{array}{l}[0,1]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto (1-\frac{1}{2}t)^n t\end{array}\right.$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in[0,1]$ $h'(t)=(1-\frac{t}{2})^{n-1}(1-\frac{t}{2}(1+n))$

$h'(t)>0$

donc $(1-t)^{n-1}(1-\frac{t}{2}(1+n))>0$

donc $t<\frac{2}{n+1}$

x	0		$\frac{2}{n+1}$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	$h(\frac{2}{n+1})$	$\searrow$	

$$h\left(\frac{2}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$$

donc $|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x} - f_n(x) \leq \dfrac{2}{n+1}$

Par passage a la borne superieur

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{2}{n+1}$$

et par theoreme d'encadrement

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

donc

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$$

Lina. A

Colle de la semaine 15

Énoncé :

Exercice 1 :

On pose pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

1. Justifier que S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Préciser le sens de variation de S.
3. Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.
En déduire un équivalent de S en 0.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$, posons $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \end{array} \right.$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x)| > 0$

Et

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \underbrace{\left(\frac{x+n}{x+n+1}\right)}_{\xrightarrow[n \to +1]{} 1} \longrightarrow 0 < 1$$

Par d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge donc S est bien définie.

On cherche désormais à appliquer le critère $\mathcal{C}^1$ pour les série de fonctions.

(H_1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$.

(H_2) On a démontré que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_{>0}$.

(H_3) Montrons que $\sum_{n \geq 0} f_n'$ CUK sur $\mathbb{R}_{>0}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$

Soit $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_{>0}$.

$\forall x \in [a, +\infty[\qquad |f_n'(x)| \leq \left.\frac{1}{n!(a+n)^2}\right)$ indép de x

Par passage au sup sur les x

$$\|f_n'\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n!(a+n)^2}$$

Or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(a+n)^2}$ converge.

Par théorème de domination : $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge.
Donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$
Et par conséquent $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ CUK sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Le théorème s'applique et livre que S est de classe $\mathcal{C}^1$

2. Le critère $\mathcal{C}^1$ livre également
$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2}$
On cherche à appliquer le CSSA
- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n'(x)\, f_{n+1}'(x) \leq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \qquad |f_n'(x)| = \frac{1}{n!(x+n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_{n+1}'(x)| - |f_n'(x)|$$

$$= \frac{1}{(n+1)!\,(x+n+1)^2} - \frac{1}{n!\,(x+n)^2} \leqslant 0 \quad \left[(n+1)! \geqslant n!,\ (x+n+1)^2 \geqslant (x+n)^2\right]$$

Le théorème s'applique et livre que $S'(x)$ est du même signe que son premier terme $\frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 0$.
Donc S est croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Célia A. Semaine n° 16.

énoncé

Exercice 103. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction tendant vers 0 en $+\infty$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $\left(f_n : x \mapsto f(nx)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
2. Soit $a > 0$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a;+\infty[$.
3. À quelle condition y a-t-il convergence uniforme sur $]0;+\infty[$?

Solution

① Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n(x) = f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\boxed{f_n \xrightarrow[]0,+\infty[]{CS} 0_{\mathbb{R}^{]0,+\infty[}}}$.

② Comme $f(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in]0,+\infty[\quad \forall y \geq \alpha \quad |f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \frac{\alpha}{a}$. $(a>0)$
Soit $x \in [a,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n \geq \frac{\alpha}{a}$, alors $n \geq \frac{\alpha}{x}$. $(a \leq x)$
Ainsi, $nx \geq \alpha$ et $|f(nx)| \leq \varepsilon$.

Par conséquent, $\boxed{f_n \xrightarrow[[a,+\infty[]{CU} 0_{\mathbb{R}^{[a,+\infty[}}}$

③ Montrons que $f_n \xrightarrow[]0,+\infty[]{CU} 0_{\mathbb{R}^{]0,+\infty[}}$
$\Leftrightarrow$ f est la fonction nulle.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Par contraposée, montrons que si f n'est pas la fonction nulle, alors il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Comme f n'est pas la fonction nulle,

$$\exists a \in]0,+\infty[\quad f(a) \neq 0.$$

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = \dfrac{a}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(x_n) = f(n \dfrac{a}{n}) = f(a) \neq 0$.

Ainsi, $f_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Par conséquent, $f_n \xrightarrow[]0,+\infty[]{CU} \!\!\!\!\!\!\!\!\not\quad\; 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Clairement, $0 \xrightarrow[]0,+\infty[]{CU} 0_{\mathbb{R}^{]0,+\infty[}}$.

<u>Conclusion</u>, f converge uniformément sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, f est la fonction nulle.

Youssef B   Colle de la semaine 15

$\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : x \longmapsto e^{-n^2 x}$
1) étudier la convergence simple de $\sum f_n$
2) Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

1) on étudie la convergence simple de $\sum e^{-n^2 x}$, $n \in \mathbb{N}$

$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{e^{-(n+1)^2 x}}{e^{-n^2 x}} = e^{-2nx - x^2} = e^{-2nx} e^{-x^2}$

si $x=0$, $f_n(x) = 1$ donc $\sum f_n(x)$ diverge

si $x>0$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \longrightarrow 0 < 1$
donc par d'Alembert, $\sum f_n(x)$ converge
si $x<0$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \longrightarrow +\infty$ donc par d'Alembert $\sum f_n(x)$ diverge

Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$

2) on veut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$
(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$
(H2) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$,
soit $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$
on montre par recurrence que : " $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in]0,+\infty[$
$f_n^{(k)} = (-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 x)$ " pour $n \in \mathbb{N}$
on montre que ~~f~~ $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement
soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $x \in [a,+\infty[$
$|f_n^{(k)}(x)| = |(-1)^k n^{2x} e^{-n^2 x}| \leqslant |n^{2a} e^{-n^2 a}| = n^{2a} e^{-n^2 a}$ (independant de x)
donc $\|f_n^{(k)}\| \leqslant n^{2a} e^{-n^2 a}$
par théorème de domination, $\sum \|f_n^{(k)}\|$ converge
donc $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$

Donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

Colle de la semaine 15

Adam M.

Exercice 1 :

1. Justifier la définition de la fonction f : $\begin{cases}]0,\pi[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx) \end{cases}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,\pi[$. Calculer f' sous forme d'une somme infinie.
3. Montrer que : $\forall x \in]0,\pi[$, $f'(x) = -1$. En déduire f sur $]0,\pi[$.

Solution : $f_n \left| \begin{array}{l}]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx) \end{array}\right.$

1. Soit $x \in]0,\pi[$

$|f_n(x)| \leq |\cos(x)|^n$

$\sum_{n\geq 1} |\cos(x)|^n$ converge car $|\cos(x)| < 1$ car $x \in]0,\pi[$

Par théorème de domination $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge

donc $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

2. (H1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0,\pi[$

(H2) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I (Q1)

(H3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in I$ $f_n'(x) = -\cos^{n-1}(x)\sin(x)\sin(nx) + \cos^n(x)\cos(nx)$

$f_n'(x) = \cos^{n-1}(x)\left[\cos(x)\cos(nx) - \sin(x)\sin(nx)\right]$

$= \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$

Soit $[a,b] \subset]0,\pi[$

D'après le théorème des bornes pour cos sur $[a,b]$

$\exists \alpha \in [a,b]$ tel que $\forall x \in I$ $|\cos(x)| \leq |\cos(\alpha)|$

$|f_n'(x)| \leq |\cos(x)|^{n-1} \leq |\cos(\alpha)|^{n-1}$ indépendant de x

Par passage au sup, $\|f_n'\|_\infty \leq |\cos(\alpha)|^{n-1}$

$\sum_{n\geq 1} |\cos(\alpha)|^{n-1}$ converge car pour $\alpha \in]0,\pi[$, $|\cos(\alpha)| < 1$

Par théorème de domination $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur tout segment de I donc converge simplement sur tout segment de I

D'après le critère $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi[$

(C1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi[$

(C2) $\forall x \in]0,\pi[\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1}(x) \cos((n+1)x)$$

3. Soit $x \in]0,\pi[$

$$f'(x) = Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1}(x)\, e^{i(n+1)x}\right)$$

$$= Re\left(\frac{e^{i2x}}{1-\cos(x)e^{ix}}\right) \quad \text{car } |\cos(x)e^{ix}| = |\cos(x)| < 1 \text{ car } x \in]0,\pi[$$

$$= Re\left(\frac{e^{i2x}(1-\cos(x)e^{-ix})}{(1-\cos(x)e^{ix})(1-\cos(x)e^{-ix})}\right)$$

$$= Re\left(\frac{e^{i2x} - \cos(x)e^{ix}}{1+\cos^2(x) - 2\cos^2(x)}\right)$$

$$= \frac{\cos(2x) - \cos^2(x)}{1+\cos^2(x) - 2\cos^2(x)} = \frac{2\cos^2(x) - 1 - \cos^2(x)}{1+\cos^2(x) - 2\cos^2(x)} = -1$$

$$f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(0) \sin(0) = 0$$

Donc $f(x) = -x$

Ibrahim K.

Colle de la semaine 15 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0(]-1,1[,\mathbb{R})$, $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ tq
$f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-1,1[.\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.

1. montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ Converge Simplement
2. Déterminer sa somme.

1) → Nous allons établir que $\sum_{n\geq 0} f_n$ Converge Normalement ce qui va livrer la convergence simple.

→ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$: "f_n est $\mathcal{C}^1$"

Initialisation à $n=1$:

par le Théorème fondamental de l'analyse on conclut directement que f_1 est $\mathcal{C}^1$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$ est Vrai

$\forall x \in]-1,1[.\quad f_{n+1}(x) = \int_0^x \underbrace{f_n}_{\mathcal{C}^1\ (HR)}(t)\,dt$

ainsi par le TFA on a f_{n+1} est $\mathcal{C}^1$.

→ Soit $a>0$ tq $a \in]-1,1[$.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ "$\|f_n\|_{\infty,[-a,a]}$ est Bien défini et

$$\|f_n\|_{\infty,[-a,a]} \leq a^n \|f_0\|_{\infty,[-a,a]}"$$

Initialisation à $n=1$:

Soit $x \in [-a,a]$; on distingue deux cas.

→ si $x \geq 0$. ainsi

$$|f_1(x)| = \left|\int_0^x f_0\right| \leq \int_0^x |f_0| \underset{\text{Théorème des Bornes atteintes}}{\leq} \int_0^x \|f_0\|_{\infty,[-a,a]}$$

$$\underset{0\leq x\leq a}{\leq} \int_0^a \|f_0\|_{\infty,[-a,a]} = a\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}.$$

→ si $x < 0$:

$$|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_0\right| = \left|\int_x^0 f_0\right| \leq \int_x^0 |f_0|$$

$$\leq \int_{-a}^{a} |f_0| \leq \int_{-a}^{0} \|f_0\|_{\infty,[-a,a]} = a\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}$$

donc tous les cas : $\forall x \in [-a,a]$.

$$|f_1(x)| \leq \underbrace{a\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}}_{\text{indép de } x}$$ donc $\|f_1\|_{\infty,[-a,a]}$ est bien déf

et $\|f_1\|_{\infty,[-a,a]} \leq a\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}$

→ Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq la propriété est vraie, Soit $x \in [-a,a]$.

on distingue 2 cas :

→ si $x \geq 0$: $$|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n\right| \leq \int_0^x |f_n| \leq \int_0^a |f_n| \leq a\|f_n\|_{\infty,[-a,a]}$$

$$\underset{HR}{\leq} a\, a^n \|f_0\|_{\infty,[-a,a]} = a^{n+1}\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}$$

→ si $x \leq 0$: $$|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n\right| = \left|\int_x^0 f_n\right| \leq \int_x^0 |f_n|$$

$$\leq \int_{-a}^0 |f_n| \leq a\|f_n\|_{\infty,[-a,a]}$$

$$\underset{HR}{\leq} a^{n+1}\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}$$

dans tous les cas $\forall x \in]-1,1[$: $|f_{n+1}(x)| \leq \underbrace{a^{n+1}\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}}_{\text{indép de } x}$

par passage au sup

- $\|f_{n+1}\|_{\infty,[-a,a]}$ est bien déf
- $\|f_{n+1}\|_{\infty,[-a,a]} \leq a^{n+1}\|f_0\|_{\infty,[-a,a]}$

ainsi comme $|a| < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} a^n \|f_0\|_{\infty,[-a,a]}$

Converge et Par Théorème de domination on conclut

que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.

ainsi ceci étant $\forall a > 0$ entre -1 et 1 on conclut

que $\boxed{\sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur }]-1,1[.}$

2. • On a $\forall n \geq 1$ f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

• par le TFA $\forall n \geq 0$ $f'_{n+1} = f_n$ ainsi

$$\sum_{n \geq 1} f'_n = \sum_{n \geq 0} f'_{n+1} = \sum_{n \geq 0} f_n = f + \sum_{n \geq 1} f_n$$

or $\sum_{n \geq 1} f_n$ CUK sur $]-1,1[$ (Découle de CN sur $[-a,a]$ $\forall a > 0$.)

• alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ CS sur $]-1,1[$.

par le critère $\mathcal{C}^1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n$$

$$\text{donc } \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) = f + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

on pose $g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

on a.

$$g' - g = f.$$

c'est une equation differentielle

ainsi $g_H : x \mapsto e^x$ et g_p une solution particulière

ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$ tq

$g = C g_H + g_p$ et par la methode de

la variation de la Constante on cherche g_p de la forme

$h g_H$ où $h \in \mathcal{C}^1(]-1,1[, \mathbb{R})$.

ainsi

$$h' g_H + h g_H - h g_H = f$$

donc $h' g_H = f$ or g_H ne s'annule pas sur $]-1,1[$ donc

$$h' = \frac{f}{g_H}$$ et par le TFA.

$$K : x \mapsto \int_0^x f e^{-t} \, dt$$ est primitive de h.

ainsi :

$$g_f : x \mapsto C e^x + e^x \cdot \int_0^x f e^{-t} \, dt.$$

ainsi

$$g(0) = C + 0.$$

or $g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f_n(0)}_{=0}.$

donc $C = 0$ d'où

$$g : x \mapsto e^x \int_0^x f e^{-t} \, dt.$$

ainsi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f + g}$$

Touchonnet Raphaël colle de la semaine n°

Énoncé :

On pose $S \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)} \end{array} \right.$

Q1) Montrer que S est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$

Q2) Préciser le sens de variations de S

Q3) Montrer que $\forall x>0 \quad xS(x) - S(x-1) = \frac{1}{e}$

Q4) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$

Q5) Déterminer un équivalent de S en 0^+.

Solution :

Q1) Posons soit $n \in \mathbb{N}$ $f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n!\,(n+x)} \end{array} \right.$

- les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in]0,+\infty[$

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{1}{n+1}\,\frac{x+n+1}{x+n} \sim \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

Donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge par d'Alembert.

S est bien défini et $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ $f_n' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2} \end{array} \right.$

On se place sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_{>0}$
Soit $x \in [a, +\infty[$

$$0 \leq |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!(n+a)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi par en remarquant que f_n' est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, par passage au supp et domination par une fonction convergente par comparaison avec une Riemann.

$\sum\limits_{n \geq 0} \|f_n\|$ converge donc $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi le critère $\mathcal{C}_1$ livre S $\mathcal{C}_1$
et $S' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2} \end{array} \right.$

Q2) Soit $k \in \mathbb{N}$ remarquons que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\circledast \quad \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k)!(x+2k)^2} + \frac{(-1)^{2k+1+1}}{(2k+1)!(x+2k+1)^2} = \frac{1}{(2k+1)!(x+2k+1)^2} - \frac{1}{(2k)!(x+2k)^2} \leq 0$$

Donc soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}$, $N = 2k+1$
en sommant $\circledast$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)!(x+2n)^2} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{2k+1+1}}{(2n+1)!(x+2n+1)^2}}_{= \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}} \leq 0$$

Comme S' est défini on peut faire tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité.

Donc $\qquad S'(x) \leq 0$

Ainsi S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q3) Soit $x > 0$

$$xS(x) - S(x+1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x}{m!(x+m)} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(m-1)!(x+m)}$$

linéarité

$$= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(x+m)(-1)^m}{m!(x+m)}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} = \frac{1}{e}$$

Q4) Le critère C_1 de Q_1 livre en plus que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tous segments de $\mathbb{R}_+^*$ en particulier $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_{>0}$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Donc par théorème de la double limite S admet pour limite $\sum_{n=0}^{+\infty} 0$ en $+\infty$

Donc $\qquad xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{e}$

et $\qquad S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{ex}$

Q5) En remarquant que

$$\lim_{x \to 1^+} S(x) \underset{C^1}{=} S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\underbrace{m!(n+1)}_{(m+1)!}}$$

$$= -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} = 1 - \frac{1}{e}$$

Ainsi il vient que

$$\underbrace{\frac{1}{e} + S(x+1)}_{x\,S(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

Donc $\quad S(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n+n^2x} \end{array} \right.$$

Q1) Demontrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_{>0}$

Q2) Soit $a>0$,
Demontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
En déduire que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_{>0})$

Q3) Determiner la limite et un equivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Q1) Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$, Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\dfrac{1}{n+n^2x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x} \geq 0$ donc par comparaison et par Riemann,

$\sum_{n\geq 1}^{+} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_{>0}$

Q2) Soit $a>0$, soit $x \in [a,+\infty[$,

$0 \leq \dfrac{1}{n+n^2x} \leq \dfrac{1}{n+n^2a} = f_n(a)$

donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{1+n^2a}$

$\dfrac{1}{n+n^2a} \sim \dfrac{1}{n^2a} \geq 0$ ~~qui converge~~

donc par Riemman et par comparaison

$\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ CV ie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ CUK sur $\mathbb{R}_{>0}$

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_{>0})$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_{>0})$

Q3) On se place sur l'intervalle $[a, +\infty[$

H1) d'après Q2 $\sum_{n\geq 1} f_n$ CU sur $[a, +\infty[$

H2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc en appliquant le théorème de la limite en un point du bord.

C1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right)$ converge

C2) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = 0$

Considérons l'application suivante :

$$g_n \left| \begin{array}{l} [a, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x f_n(x)_{\geq 0} \end{array} \right. \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n$ est croissante sur $[a, +\infty[$ avec $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2}$

donc $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [a, +\infty[,\ 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$

donc par domination et par Riemann $\sum_{n\geq 1} g_n$ CN

en appliquant de nouveau le théorème il vient ;

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{donc } x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$$

Stanislas G

Enoncé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \end{array} \right.$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f_n est $\mathcal{C}^1$ et que f_n CU vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ 2) f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f_n' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \times \dfrac{1}{2\underbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}_{>0}} \end{array} \right. \quad (x^2 \neq -\tfrac{1}{n})$$

f_n' est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \sqrt{x^2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| = f(x)$

donc f_n converge simplement vers $|\cdot| = f$ sur $\mathbb{R}$

Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ $x \in [\alpha, \beta]$ où $\alpha < 0$, $\beta > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2+\tfrac{1}{n}} - |x|\right|$$

$$= \left|\sqrt{x^2+\tfrac{1}{n}} - |x|\right| \times \underbrace{\left|\underbrace{\sqrt{x^2+\tfrac{1}{n}}}_{\neq 0} + |x|\right|}_{\neq 0} \times \frac{1}{\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|\right|}$$

$$= \left|x^2 + \frac{1}{n} - |x|^2\right| \times \frac{1}{\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|\right|}$$

$$= \frac{1}{n} \, \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|}_{\geqslant \sqrt{\frac{1}{n}}}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

or $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc par passage au sup on obtient
$\forall x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ où $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

$$\left| f_n(x) - |x| \right| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par encadrement $\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc f_n CUK vers f sur $\mathbb{R}$

Comme
- f_n CUK vers f sur $\mathbb{R}$
- f_n CS vers f sur $\mathbb{R}$

alors $\boxed{f_n \text{ CU vers } f}$

2) f est $|\cdot|$ qui n'est pas dérivable en 0

MANGIACOMINI
Amélien

Rapport de Colle

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si : $|x| < 1$, alors : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \mathrm{d}\theta = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} \mathrm{d}\theta$. En déduire la valeur de cette intégrale. → à peine entamé.
2. Montrer que si : $|x| > 1$, alors : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \mathrm{d}\theta = 4\pi \ln(|x|)$.

1) On montre d'abord ; $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < 1$;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < 1$.
On applique le théorème de domination terme à terme ;

H_1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : \theta \mapsto \dfrac{x^n \cos(n\theta)}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 2\pi]$.

H_2) Soit $\theta \in [0; 2\pi]$, on suppose que $x \neq 0$;
$|f_n(\theta)| = |x|^n \dfrac{|\cos(n\theta)|}{n} \leq \dfrac{|x|^n}{n}$

et $\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{|x|^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x| < 1$

donc d'après d'Alembert et le théorème de domination ; $\forall \theta \in [0; 2\pi]$
$\sum_{n\geq 1} f_n(\theta)$ converge

ie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement.

Pour $x = 0$ $f_n = 0$ et le résultat est clair.

$H_3)$ $\frac{d f_n}{d\theta} = - x^n \sin(n\theta)$

et $|-x^n \sin(n\theta)| \leq |x|^n$

atteint en ; $\theta \equiv 0 [\pi]$

donc $\| \frac{d f_n}{d\theta} \|_{\infty, [0;2\pi]} = |x|^n$

et pour $x \neq 0$ on a ; $\frac{\| \frac{d f_{n+1}}{d\theta} \|_{\infty, [0;2\pi]}}{\| \frac{d f_n}{d\theta} \|_{\infty, [0;2\pi]}} = |x| < 1$

donc par d'Alembert ; $\sum_{n\geq 1} \| \frac{d f_n}{d\theta} \|_{\infty, [0;2\pi]}$

converge donc $\sum_{n\geq 1} \frac{d f_n}{d\theta}$ converge normalement.

Pour $x = 0$ le résultat est clair.

Le théorème s'applique on a ;

$$\frac{d}{d\theta} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}}_{C^1 \text{ sur } [0;2\pi]} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{x^n \cos(n\theta)}{n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} - x^n \sin(n\theta)$$

$$= - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin(n\theta)$$

$$= - \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{i\theta})^n \right)$$

$$= - \operatorname{Im}\left(\frac{x e^{i\theta}(1 - x e^{-i\theta})}{\underbrace{(1 - x e^{i\theta})}_{\neq 0}\underbrace{(1 - x e^{-i\theta})}_{\neq 0}} \right)$$

car $x \neq 1$ et -1

$$= - \operatorname{Im}\left(\frac{x e^{i\theta} - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \right)$$

$$= \frac{-1}{2} \frac{2x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$

$+ C$

et en $x = 0$ on a ; $C = 0$.

On applique maintenant le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ;

(H1) Soit $\theta \in [0 ; 2\pi]$ $\left| x^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atteint pour} \\ \theta = 0}}{\leq} \frac{|x|^n}{n}$

donc $\left\| x^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \right\|_{\infty, [0; 2\pi]} \leq \frac{|x|^n}{n}$

pour $x \neq 0$ on a ; $\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{|x|^n} \to |x| < 1$

donc par d'Alembert ; $\sum_{n \geq 1} \| x^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \|_{\infty, [0;2\pi]}$ converge donc $\sum_{n \geq 1} x^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge

normalement et a fortiori uniformément.

H_2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\theta \mapsto x^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$

est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;2\pi]$

Le théorème s'applique ;

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\cos(n\theta)}{n} d\theta}_{①} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} x^n \frac{\cos(n\theta)}{n} d\theta$$

(or $① = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\, d\theta$)

d'après ce qui précède

donc $\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\, d\theta =$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \underbrace{\left[\sin(n\theta) \right]_0^{2\pi}}_{=0} = 0.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$;

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\ln(|x|)\,d\theta + \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - \frac{2\cos\theta}{x} + \frac{1}{x^2}\right) d\theta$$

$= 0$

car $|x| > 1$

pour $X = \frac{1}{x}$

on a $|X| < 1$

donc 1) s'applique et cette intégrale vaut 0.

$$= 2\ln(|x|)\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \ln(|x|) \;\square.$$

Nicolas. H Colle de la semaine 15

Énoncé

Définition, continuité et dérivabilité de $S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$

Solution

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)} \end{array} \right.$$

- $S(0)$ existe
- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3|x|} \geq 0$$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $3>1$)

Par comparaison, S est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité sur les séries convergentes, $S(x) = -S(x)$.

$\mathbb{R}$ étant symétrique en 0, S est impaire.

Nous utilison le théorème de la dérivation d'une somme de série de fonction :

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2x^2n^3}{n^2(1+n^2x^2)^2}$

$$f_n'(x) = \frac{1 - x^2n^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$

(H2) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après la résolution de définion

(H3) Montrons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément pour tout segment de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq |f_n'(x)| = \frac{|1 - x^2n^2|}{n(1+x^2n^2)^2} \leq \frac{1 + x^2n^2}{x^2n^5} = \frac{1}{x^2n^5} + \frac{1}{n^3}$$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2n^5}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ convergent

Par théorème de domination, $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \frac{1}{n^2}$

$$f_n'(x_n) = \frac{1}{n + \frac{2}{n} + n} - \frac{1/n^2}{n + \frac{2}{n} + n} = \frac{1}{2n + \frac{2}{n}} - \frac{1}{2n^3 + n}$$

- $\frac{1}{2n^3+n} \sim \frac{1}{2n^3}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^3}$ converge
- $\frac{1}{2n+\frac{2}{n}} \sim \frac{1}{2n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} f_n'$ ne converge pas uniformément sur $[0,a]$

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $0<a<b$, soit $x \in [a,b]$

$$|f_n'(x)| = \frac{|1 - x^2n^2|}{n(1+x^2n^2)^2} \leq \frac{1 + b^2n^2}{a^2n^5} = \frac{1}{a^2n^5} + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{n^3}$$

(indépendant de x)

donc $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{a^2n^5} + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{n^3}$

De même que précédemment, $\sum_{n\geq 1} \|f_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément pour tout segment de

$\mathbb{R}_+^*$, par parité pour tout segment de $\mathbb{R}_-^*$, donc par théorème, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Robin G.

Colle de la semaine 15

> Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (-1)^n \ln\left(1+\frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) \end{array} \right.$
>
> Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge et étudier la continuité de sa somme.

Solution :

Appliquons le critère spécial des séries alternées.

$t \in \mathbb{R}$: • $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(t) f_{n+1}(t) \leq 0$ car $\underbrace{\ln\left(1+\frac{t^2}{n^2(1+t^2)}\right)}_{\geq 0} \geq 0$

• $|f_n(t)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{n(1+t^2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\frac{t^2}{n^2(1+t^2)} \to 0$

• $|f_{n+1}(t)| - |f_n(t)| = \ln\left(1+\frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)}\right) - \ln\left(1+\frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) \leq 0$

car $\frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)} \leq \frac{t^2}{n(1+t^2)}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ croissante sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers $f := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$,

et en posant $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

soit $|R_n| \leq |f_{n+1}|$.

- si $t=0$, $R_n(t)=0$
- si $t\neq 0$, $0\leq |R_n(t)| \leq \ln\left(1+\frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$

$$\leq \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right) \quad (\text{concavité de } \ln)$$

$$\leq \frac{1}{n}$$

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}$ $0\leq |R_n(t)| \leq \frac{1}{n}$

Donc $0\leq \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Et par théorème d'encadrement et par le cours $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ f_n $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,

donc $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Anoé D.

Rapport de colle S15

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$

On suppose : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall n \in \mathbb{N} : \forall t \in [a,b]$ $|f_n'(t)| \leq M$

1) Montrer que si f_n converge simplement alors elle converge uniformément

2) Est ce que cela fonctionne si la fonction est définie sur un intervalle non borné ?

Solution :

On suppose que $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CS} f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{C})$

Soit $\varepsilon > 0$

- $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
- Comme la dérivée de f_n est bornée sur $[a,b]$, on a par l'inégalité des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n K-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Soit $y \in [a,b]$,

Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$ $(K > 0)$

Soit $x \in [a,b]$ tel que $|x - y| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{K}$

Comme $K > 0$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$

- $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} \leq \delta$ (Archimède)

Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$ $a_k = a + k\frac{b-a}{N}$

On a un nombre fini de $a_0, \dots, a_N$ (*)

Soit $x \in [a_k, a_{k+1}[$ où $k \in [\![0, N-1]\!]$

$|x - a_k| \leq a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n} \leq \delta$

Donc $|f_n(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon/3$ (*)

D'où $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon/3$ (***) (convergence simple de f_n vers f)

Par (*) $\exists N_k \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_k$ $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon/3$ (**) (je n'ai pas réussi à justifi

Soit $N = \max(N_0, \dots, N_N)$

$$|f_n(x) \underset{\substack{\pm f_n(a_k) \\ \pm f(a_k)}}{-} f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(a_k)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \ (*)} + \underbrace{|f_n(a_k) - f(a_k)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \ (**)} + \underbrace{|f(x) - f(a_k)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \ (***)} \leq \varepsilon$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ (par passage au sup sur $x \in [a_k, a_{k+1}[$)

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-nx^2} \end{array} \right. \qquad \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f_n'(x)| = |-2nxe^{-nx^2}| = 2n|x|e^{-nx^2}$

Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ où $a > 0$

Soit $x \in [-a, a]$

$$|f_n'(x)| \leq \underbrace{2nae^{-na^2}}_{\text{indépendant de } x}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = e^{-nx^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $f_n \xrightarrow{CS} f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \right.$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$|\underset{e^{-1}}{\underset{\shortparallel}{f_n(x_n)}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(x_n)}}| \longrightarrow 0 \quad ↯$$

Donc $f_n \overset{CU}{\not\longrightarrow} f$

Donc la propriété est fausse si l'intervalle n'est pas borné.

Mehdi B. — Colle de la semaine 15

EXERCICE 3

On pose

$$S \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}. \end{array}$$

Q1. — Justifier que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_{>0}$.

Q2. — Préciser le sens de variation de S.

Q3. — Établir que, pour tout $x>0$, $x\,S(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{e}$.

Q4. — Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Q5. — Déterminer un équivalent de S en 0.

Solution : Q 1) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)} \end{array}$

On applique le critère $\mathscr{C}^1$ pour les séries de fonction

(H1) les f_n sont $\mathscr{C}_1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2}$

(H2) Soit $x>0$. $\dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \dfrac{n!}{(n+1)!}\,\dfrac{(x+n)}{(x+n+1)} \longrightarrow 0 < 1$

Par critère de d'Alembert, $\sum f_n$ converge simplement.

(H3) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $x \in [a,b]$.

$|f_n'(x)| = \dfrac{1}{n!(x+n)^2} \leq \dfrac{1}{n!(a+n^2)}$ (avec égalité si $x=a$)

Donc $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{1}{n!(a+n)^2}$.

$\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge de même par critère de d'Alembert, ainsi $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi : S est bien définie, dérivable et de plus

$$\forall x > 0 \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}.$$

Q.2) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées.
Soit $x>0$.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n'(x) f_{n+1}'(x) \leq 0$

- $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!(x+n)^2} \longrightarrow 0$

- $\frac{|f_{n+1}'(x)|}{|f_n'(x)|} = \frac{n!(x+n)^2}{(n+1)!(x+n+1)^2} \leq 1$

Ainsi : $S'(x)$ a même signe que $f_0'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Donc $S'(x) \leq 0$ donc S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Q.3) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}
xS(x) - S(x+1) &= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n+1)} \\
&= x\left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)}
\end{aligned}$$

Méthode B.

$$xS(x) - S(x+1) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x (n-1)!(x+n) + (-1)^n n!(x+n)}{(x+n)^2 n!(n-1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \underbrace{\left(\frac{x(n-1)! + n!}{(x+n)(n-1)!} \right)}_{=1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Q.4) • On vérifie de même qu'en Q2 que $(f_n(x))$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées pour tout $x>0$. Ainsi :

(H1) $$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)!\underbrace{(x+1+n)}_{\geq 0}} \leq \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{\text{indépendant de } x}$$

donc par passage au sup et théorème d'encadrement, $\sum f_n$ converge uniformément.

(H2) $$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Par théorème de la double limite :

$$S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

• Comme $xS(x) = S(x+1) + \frac{1}{e}$, $xS(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{e}$ et

$$\boxed{S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{ex}}$$

Q.5) Par continuité de S en 1 :

$$x\,S(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{e} + S(1)$$

Or $S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = -\frac{1}{e} + 1$

On conclut :

$$\boxed{S(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Abxonche M.

Colle semaine 15.

Enoncé :

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a<b$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$
telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \nearrow$ sur $[a,b]$ et
$\exists f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CS} f$.

Montrer que $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} f$.

Résolution :

- f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. i.e.

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \alpha_\varepsilon>0 \quad \forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

- Soit $\varepsilon>0$.

On pose maintenant $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{b-a}{N} \leq \alpha_{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{(Archimède)}.$$

et

$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad a_k := a + k\cdot\frac{b-a}{N}$$

de sorte que $[a,b] = \bigsqcup_{k=0}^{N-1} [a_k, a_{k+1}[\, \cup \{a_N\}$

- Soit $k \in [\![0;N-1]\!]$

(*) $\exists N_k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_k \quad |f(a_k) - f_n(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\left(f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CS} f\right)$

Ainsi :

$\forall n \geq N_k \quad \forall x \in [a_k, a_{k+1}[$

$$f(x) - f_n(x) = \underbrace{f(x) - f(a_k)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f(a_k) - f_n(a_k)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f_n(a_k) - f_n(x)}_{\leq 0}$$

car $|x-a_k| \leq \frac{b-a}{N} \leq \alpha_{\frac{\varepsilon}{2}}$ — par ⊛ — car $f_n \nearrow$ et $x \geq a_k$

donc $f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$

De même :

$\exists N_k' \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_k' \quad |f(a_{k+1}) - f_n(a_{k+1})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi : $\forall n \geq N_k'$

$$f(x) - f_n(x) = \underbrace{f(x) - f(a_{k+1})}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f(a_{k+1}) - f_n(a_{k+1})}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f_n(a_{k+1}) - f_n(x)}_{\geq 0}$$

donc $f(x) - f_n(x) \geq -\varepsilon$

De plus : $\exists N_b \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_b \quad |f(b) - f_n(b)| \leq \varepsilon$

En posant $M := \max(N_0, N_0', \dots, N_{N-1}, N_{N-1}', N_b)$

On a $\forall n \geq M \quad \forall x \in [a, b]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

et donc $\boxed{f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} f}$

Louis Guillaume S. — Colle de la semaine 15

Soit une fonction définie de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie telle que $\forall t \in [-1;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_0(t) = 2t$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{2+f_n(t)}$
Etudier la CS et calculer les intégrales :

$$I = \int_{-1}^{1} f_n(t)\,dt \quad , \quad J = \int_{-1}^{1} \frac{1}{f_n(t)}\,dt \quad , \quad K = \int_{-1}^{1} \frac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)}\,dt$$

Solution : Etudions la convergence simple de cette fonction.

① Introduisons $h \left| \begin{array}{l} [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{2+x} \end{array} \right.$ et étudions $\forall x \in [-1;1]$ $h(x) - x = 0$

Soit $x \in [-1;1]$ $\sqrt{2+x} = x$

$\rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 9 = \sqrt{3} > 0$
2 solutions réelles : $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
Or -1 n'est pas point fixe mais 2 l'est.

② $\forall n \in \mathbb{N}$ les fonctions f_n sont croissantes et l'on montre par récurrence que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ - " $\forall t \in [-1;1]$ $|f_n(t)| \leq 2$ "

- Initialisation à $n=0$: Soit $t \in [-1;1]$ $|f_0(t)| = |2t| \leq 2$.
Donc $P(0)$ est vraie.

° Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et telle sorte que $P(n)$ soit vraie.
Démontrons $P(n+1)$.
Soit $t \in [-1;1]$.

$$|f_{n+1}(t)| = |\sqrt{2+f_n(t)}|$$

Or par (HR) : $|f_n(t)| \leq 2$

Alors $f_{n+1}(t)$ est bien définie et $|f_{n+1}(t)| \leq \sqrt{2+2} \leq 2$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

° Conclusion : La propriété ayant été initialisée et étant héréditaire, elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

Ainsi, la croissance et la majoration ainsi que le point fixe qui correspond nous livre la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Léa N. Colle de la semaine n° 15

Énoncé :

Exercice 3 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = a_n x^n(1-x)$ avec $x \in [0,1]$.

1. Montrer la convergence simple sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer que cette série de fonctions converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Solution :

1) Soit $x \in [0,1]$.

Montrons que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.

- Si $x = 1$ $f_n(x) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge
- Si $x \neq 1$

$$0 \leq a_n x^n(1-x) \leq a_n x^n \quad (0 \leq x < 1)$$

$$\leq a_0 x^n \quad ((a_n) \text{ décroissante})$$

Or $\sum\limits_{n\geq 0} a_0 x^n$ converge car $x<1$ ~~et~~ (somme géométrique)

Donc par théorème de domination $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge

Alors $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement}}$

2) Montrons que $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n(1-x) \end{array}\right.$ dérivable

$\forall x \in [0,1]$ $g_n'(x) = n x^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$

$g_n'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{n}{n+1}$

Alors

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
g_n	0	$\nearrow$	$g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = a_n \, g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$= a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$
$$= a_n \, e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \times \frac{1}{n+1}$$
$$= a_n \, e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)} \times \frac{1}{n+1}$$
$$= a_n \, e^{-\frac{n}{n+1}} \, e^{o\left(\frac{n}{n+1}\right)} \times \frac{1}{n+1}$$
$$\sim \frac{a_n}{e} \frac{1}{n}$$

Donc $\boxed{\sum_{n \geq 0} f_n \text{ CN} \iff \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \text{ CV}}$

3) Montrons que $\sum_{n \geq 0} f_n$ CU sur $[0,1]$ $\iff a_n \to 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $a_n \to 0$

Soit $N \geq n+1$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} a_k x^k (1-x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{N} x^k (1-x) \quad ((a_n) \searrow)$$

Si $x = 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x) = 0$ (cf. Q.1)

Si $0 \leq x < 1$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x) = x^{n+1} \leq 1$

Alors $N \to +\infty$: $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \leq a_{n+1}$

Comme $a_n \longrightarrow 0$, par théorème d'encadrement

on conclut que $\sum_{n\geq 0} f_n$ ~~CU~~ converge uniformément sur $[0,1]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU sur $[0,1]$

Comme (a_n) est décroissante positive, par théorème

de limite monotone, elle admet une limite $l \geq 0$.

$$\forall x \in [0,1) \quad \overbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)}^{=:R_n(x)} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} l\, x^k(1-x) = l\, x^{n+1} \geq 0$$

Donc $\forall x \in [0,1) \quad l\, x^{n+1} \leq \| R_n \|_\infty$

$x \to 1 \quad l \leq \| R_n \|_\infty$

ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

On conclut que $l = 0$

Donc $\boxed{\sum_{n\geq 0} f_n \text{ CU} \iff a_n \longrightarrow 0}$

Sophie G

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array} \right.$$

Q 1) Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément

Q 2) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

__Solution__

Q 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\cdot^2 + \frac{1}{n}} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} & \mathbb{R} \\ x & \underset{\mathcal{C}^1}{\longmapsto} & x^2 + \frac{1}{n} & \underset{\mathcal{C}^1}{\longmapsto} & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}$$

donc $\boxed{f_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ comme composées de fonctions } \mathcal{C}^1}$

convergence simple :

Soit $x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{x^2} = |x|$

donc $f_n \xrightarrow{CS} f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array} \right.$

convergence uniforme :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| \leq \frac{\frac{1}{n}}{\underbrace{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}_{\geq \sqrt{\frac{1}{n}}} + \underbrace{\sqrt{x^2}}_{\geq 0}}$$

$\geq \sqrt{\frac{1}{n}}$ ($x^2 \geq 0$ $\sqrt{\cdot}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$$\leq \frac{\sqrt{n}}{n} \quad \underline{\text{indépendant de } x}$$

Par passage au sup

$$\|f_n - f\|_\infty \leq e^{\overbrace{-\frac{1}{2}\ln(n)}^{<0}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\boxed{f_n \xrightarrow{CU} f}$

Q2) f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

car $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ n'est pas dérivable en 0

$$\boxed{f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Colle de la semaine n°15

Royon. G

Enoncé : Soit $p \in \mathbb{N}$

$(P_n) \in \mathbb{C}_p[X]^{\mathbb{N}}$

En confondant polynome et fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ corps infini, on suppose que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

Montrer que f est une fonction polynomiale, puis que $f \in \mathbb{C}_p[X]$ et enfin que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tous compacts de $\mathbb{C}$.

Solution : Soit $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$ tel que

$\forall (l_1, l_2) \in [\![1, p+1]\!]^2 \quad l_1 \neq l_2 \Rightarrow x_{l_1} \neq x_{l_2}$

On pose $(y_1, \dots, y_{p+1}) = (f(x_1), \dots, f(x_{p+1}))$

Par le théorème des interpolateurs de Lagrange :

$$\exists! P \in \mathbb{C}_p[X] \quad \forall k \in [\![1, p+1]\!] \quad P(x_k) = y_k$$

On introduit $N \;\Big|\; \begin{array}{l} \mathbb{C}_p[X] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ Q \mapsto \max\limits_{1 \leq k \leq p+1} |Q(x_k)| \end{array}$

qui est une norme sur $\mathbb{C}_p[X]$

En effet, on déduit la linéarité et l'inégalité triangulaire de celles du module de $\mathbb{C}$ et on justifie la séparation par le fait que tous polynomes de $\mathbb{C}_p[X]$ possédant $p+1$ racines est nul car de degré majoré par p.

Par définition de P et N, il est clair que $P_n \xrightarrow{N} P$.
Or $\mathbb{C}_p[X]$ est de dimension finie et par conséquent nous avons l'équivalence des normes.

Soit K compact de $\mathbb{C}$ non réduit à un ensemble fini
On pose

$$\|.\|_K \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_p[X] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ B \mapsto \|B\|_{\infty_K} = \max_{x \in K} |B(x)| \end{array} \right.$$

bien défini car tous polynômes est borné sur un compact et est une norme (linéarité et inégalité triangulaire assuré par le module tandis que l'infinité de K assure la séparation)

Par équivalence des normes $P_n \xrightarrow{\|.\|_K} P$
Donc

$$\forall x \in K \qquad P_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P(x)$$

Or $P_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ par hypothèse donc par ~~hypothèse~~ unicité de la limite :

$$\forall x \in K \qquad f(x) = P(x)$$

Cela étant établi pour tous les compacts infinis f est polynomiale et $f = P \in \mathbb{C}_p[X]$
Le cas où K fini étant simple, la norme étudiée précédemment nous livre la convergence uniforme de (P_n) vers f sur tous compact de $\mathbb{C}$ (On utilise le lien entre $\|.\|_\infty$ et convergence uniforme, les fonctions étant borné car polynomial)

colle de la semaine 15.

Antoine B.

Soit $E := \{ f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) : f$ polynomiale de degré au plus $m \}$

où $m \in \mathbb{N}$.

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_m) \in [0,1]^{m+1}$ 2 à 2 $\neq$, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$

On définit pour $P \in E$, $\left| \begin{array}{l} N(P) = \max\limits_{i \in [\![0,m]\!]} |P(a_i)| \\ \text{et} \\ \|P\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |P(x)| \end{array} \right.$

1. Expliquer brièvement à l'oral pourquoi N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes
2. Montrer que $(\forall i \in [\![0,m]\!], (P_k(a_i))_{k\in\mathbb{N}}\ CV) \iff (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CV dans E pour $\|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que $(\forall i \in [\![0,m]\!], (P_k(a_i))_{k\in\mathbb{N}}\ CV) \iff (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CS sur $[0,1]$
4. Montrer que, dans ce cas, la fonction limite est dans E, ses coefficients sont les limites des coefficients des P_k.

Une solution :

2. $\boxed{\Rightarrow}$ supposons, $\forall i \in [\![0,m]\!]$, $(P_k(a_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_i \in \mathbb{R}$

Par Lagrange, on peut écrire $P_k = \sum\limits_{i=0}^{m} P_k(a_i)\, \tilde{L}_i \in E$

où $L_i = \dfrac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} (a_i - a_k)} \in \mathbb{R}_m[X]$.

et $\tilde{L}_i$ la fonction polynomiale associée

$$\left| P_k - \sum_{i=0}^{m} l_i \tilde{L}_i \right| = \left| \sum_{i=0}^{m} (P_k(a_i) - l_i)\, \tilde{L}_i \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m} |P_k(a_i) - l_i| \times \underbrace{\|\tilde{L}_i\|_\infty}_{\text{existe car } L_i\ \mathcal{C}^0 \text{ sur } [0,1]}$$

$$\leq \|\tilde{L}_j\|_\infty \sum_{i=0}^{m} |P_k(a_i) - l_i|$$

où $\|\tilde{L}_j\|_\infty = \max(\|\tilde{L}_0\|_\infty, \dots, \|\tilde{L}_m\|_\infty)$

Ainsi, par passage au sup : $\|P_k - \sum\limits_{i=0}^{m} l_i \tilde{L}_i\|_\infty \leq \|\tilde{L}_j\|_\infty \underbrace{\sum\limits_{i=0}^{m} |P_k(a_i) - l_i|}_{\to 0}$

On a ainsi $P_k \xrightarrow{CU} \sum_{i=0}^{m} l_i \tilde{L}_i$ car les 2 fonctions sont bornée (C^0 sur $[0,1]$)

d'où $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CV pour $\|.\|_\infty$. ($\circledast$ dans E)

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CV pour $\|.\|_\infty$. vers $Q \in \mathcal{P}$

Soit $i \in [\![0,n]\!]$. $|P_k(a_i) - Q(a_i)| \leq \|P_k - Q\|_\infty \to 0$

Par thm d'encadrement, $P_k(a_i) \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q(a_i) \in \mathbb{R}$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ d'après 2/$\boxed{\Rightarrow}$, on a $P_k \xrightarrow{CU} \sum_{i=0}^{m} l_i \tilde{L}_i$

d'où $P_k \xrightarrow{CS} \sum_{i=0}^{m} l_i \tilde{L}_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suppose P_k CS sur $[0,1]$. vers $Q \in \mathcal{P}$.

Par définition, $\forall x \in [0,1]$ $P_k(x) \to Q(x) \in \mathbb{R}$.

donc $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P_k(a_i)$ CV.

4. • Montrons que $\sum_{i=0}^{m} l_i \tilde{L}_i \in E$. $(*)$

. le polynome associé est de degré n comme somme de $l_i L_i$ tous de degré n.

. elle est définie sur $[0,1]$.

• Montrons que ses coefficient sont les limites des coeffs de P_k.
Soit $u \in [\![0,n]\!]$.

. $\left[\sum_{i=0}^{m} l_i L_i\right]_u = \sum_{i=0}^{m} l_i \,[L_i]_u$: le coeff de degré u du polynome $\sum_{i=0} l_i L_i$

. $[P_k]_u = \left[\sum_{i=0}^{m} P_k(a_i) L_i\right]_u = \sum_{i=0}^{m} P_k(a_i)[L_i]_u \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{m} l_i [L_i]_u$.

Hugo D. Colle de la semaine n°15

Exercice 6 :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{n!n^x}{x(1+x)\dots(n+x)}$

1. Quel est le domaine de définition de f, limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note A ce domaine.
2. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$ quand ces deux quantités sont définies.
3. Calculer pour $x \in A$, $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$

   Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A, \dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x}{k(k+x)}$.

   En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

Solution :

1) $A \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$

- Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$ Montrons que $(f_n(x))$ converge quand $n\to+\infty$

On pose $N = |\lfloor x\rfloor|+1$

Soit $n > N+2$

$$f_n(x) = \underbrace{\frac{N!}{\prod_{k=0}^{N}(k+x)}}_{\text{constant}} \underbrace{\frac{n^x \prod_{k=N+1}^{n} k}{\prod_{k=N+1}^{n}(k+x)}}_{:= g_n(x) > 0}$$

$$\ln(g_n(x)) = x\ln(n) + \sum_{k=N+1}^{n} \ln(k) - \ln(k+x) = x\ln(n) - \sum_{k=N+1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$$\text{Or } \ln(g_n(x)) = \sum_{k=N+3}^{n} \ln(g_k(x)) - \ln(g_{k-1}(x)) + \ln(g_{N+2}(x))$$

$$= \sum_{k=N+3}^{n} -x\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \sum_{p=N+1}^{k} \ln\left(1+\frac{x}{p}\right) + \sum_{p=N+1}^{k-1} \ln\left(1+\frac{x}{p}\right) + \ln(g_{N+2}(x))$$

$$= \sum_{k=N+3}^{n} \underbrace{-x\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)}_{:= u_k(x)} + \ln(g_{N+2}(x))$$

$u_k(x) \sim \dfrac{x^2+x}{k^2}$ de signe constant et $\sum_{k\geq N+3} \dfrac{1}{k^2}$ converge

(exp $\mathcal{C}^0$)

Donc $(\ln(g_n(x)))_{n\geq N+3}$ converge en $+\infty$ donc $(g_n(x))_{n\geq N+3}$ aussi

Donc $(f_n(x))_{n \geq N+3}$ aussi.

· On en conclut que $\boxed{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_- \subset A}$

2) Soit $x \in A$. $x+1 \in A$

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$f_n(x+1) = \frac{n! \, n^x}{\prod_{k=0}^{n}(k+x+1)} n = \frac{n! \, n^x n}{\prod_{k=1}^{n+1}(k+x)} = \frac{n! \, n^x}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)} \frac{nx}{(n+1+x)} = f_n(x) \frac{nx}{(n+1+x)} \underset{n \to +\infty}{\sim} f_n(x) x$$

$n \to +\infty$: $\boxed{f(x+1) = x f(x)}$

3) ~~Soit~~ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ f_n dérivable sur A

Soit $x \in A$

$$f_n'(x) = n! \left(\frac{\ln(n) n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} - \frac{n^x \sum_{l=0}^{n} \prod_{k=0, k \neq l}^{n} (k+x)}{\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)^2} \right)$$

$$\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \ln(n) - \frac{\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l+x} \prod_{k=0}^{n}(k+x)}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

$$= \ln(n) - \frac{1}{x} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{x+l} = \ln(n) - \frac{1}{x} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l+x} - \frac{1}{l}$$

$$\boxed{= \ln(n) - \frac{1}{x} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n} \frac{x}{(l+x)l}}$$

On pose $g_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(f_n(x)) + \ln(x) + \ln(x+1) \end{array} \right.$ $\mathcal{C}^1$ $(\mathbb{N}_1)$

Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_{>0}$ $g_n'(x) = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{x}{k(k+x)}}_{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

$$= \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+x}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k+x} = \sum_{k=2}^{n} \overbrace{-\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+x}}^{u_k(x)}$$

$\cdot\ u_k(x) \sim \dfrac{1}{2k^2} + \dfrac{x}{k^2} > 0$

Soit $a > 0$ $\forall (k,x) \in \mathbb{N}_{\geq 2} \times]0,a]$ $=$ en $x = a$

$|u_k(x)| = -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+x} \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+a}$

Donc $\|u_k\|_{\infty,]0,a]} = -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+a} \sim \dfrac{\frac{1}{2}+a}{k^2} > 0$ et $\sum_{k\geq 2} \dfrac{\frac{1}{2}+a}{k^2}$ converge

Par comparaison $\sum_{k\geq 2} \|u_k\|_{\infty,]0,a]}$ converge

Donc $\sum_{k\geq 2} u_k$ CNK d'où g_n' CUK sur $\mathbb{R}_{>0}$ (H_3)

(H_2) Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_{>0}$ $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(f(x)) + \ln(x) + \ln(x+1)$

Donc g_n CS sur $\mathbb{R}_{>0}$

Par critère $\mathcal{C}^1$ $x \mapsto \ln(f(x)) + \ln(x) + \ln(x+1)$ $\mathcal{C}^1$

Donc $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1}$ (par combinaison linéaire et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$)

Maximilien T

Colle ~~N°~~ Semaine 15

Soit des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On suppose $\sum_{n\geq 0} a_n(1+|x_n|)$ converge

On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n|x-x_n|$

Etudier la définition, la continuité et les points de non dérivabilité de f

Solution Soit $n \in \mathbb{N}$ Soit $x \in \mathbb{R}$

1)

$0 \leq a_n|x-x_n| \leq a_n(|x|+|x_n|) \leq a_n(1+|x_n|)$ qui converge.

(Si $|x| \leq 1$)

Si $|x| > 1$ alors $a_n(|x|+|x_n|) = \frac{a_n}{|x|}\left(1+\frac{|x_n|}{|x|}\right) \leq \frac{a_n}{|x|}(1+|x_n|)$ qui converge.

Par théorème de domination $\sum_{n\geq 0} a_n|x-x_n|$ converge.

2) $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n|x-x_n| \end{array} \right.$

(H_1) f_n $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

(H_2) $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS ~~sur~~ (Q1)

(H_3) Soit $[-a,a] \subset \mathbb{R}$ Soit $x \in [-a,a]$

$|f_n(x)| = a_n|x-x_n| \leq a_n(|x|+|x_n|) \leq a_n(|a|+|x_n|)$

Donc $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq a_n(|a|+|x_n|)$ or $\sum_{n\geq 0} a_n(|a|+|x_n|)$ converge (Q1)

Donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ CN donc CVK

Ainsi par double limite f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

3) Posons $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et soit $b \in A$

Mq f n'est pas dérivable en b.

Etudions $\dfrac{f(b+h)-f(b)}{h}$ où $h \in \mathbb{R}^*$ Posons $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n = b\}$

$$\frac{f(b+h)-f(b)}{h} = \frac{|h|}{h}\underbrace{\sum_{n\in B} a_n}_{\alpha>0} + \sum_{n\notin B} a_n \left(\frac{|b+h-x_n|-|b-x_n|}{h}\right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus B$ $g_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto |x-x_n|a_n \end{array}\right.$ dérivable en b.

En réappliquant la double limite à $\sum_{n\notin B} h_n$ où $h_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ h\mapsto \begin{cases} \dfrac{g_n(b+h)-g_n(b)}{h} & \text{si } h\neq 0 \\ g_n'(b) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$ $\mathcal{C}^0$

il vient $\sum_{n\notin B} a_n\left(\dfrac{|b+h-x_n|-|b-x_n|}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \underbrace{\sum_{n\notin B} g_n'(0)}_{\beta}$

Ainsi $\dfrac{f(b+h)-f(b)}{h} \begin{cases} \xrightarrow{h\to 0^+} \alpha+\beta \\ \xrightarrow[h\to 0^-]{} -\alpha+\beta \end{cases}$ or $\alpha+\beta \neq -\alpha+\beta$

Donc f n'est pas dérivable en b.

Rapport de colle semaine 15 Uta Bauyen de Noyer

Exercice 5 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, on pose

$$G_n(x) = \frac{n^x \times n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

a. Montrer que la suite de fonction $(G_n)_{n\geq 1}$ convergence simplement sur $]0,+\infty[$. La limite simple est notée G.

b. $\forall x > 0$, démontrer l'égalité :

$$\ln(G(x)) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

c. En déduire que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $G'(1)$

---

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$.

$$\ln(G_n(x)) = \ln(n^x) + \ln(n!) - \ln(x(x+1)\cdots(x+n))$$

$$= x\ln(n) + \cancel{\ln(n!)} - \cancel{\ln(n!)} - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \ln(x)$$

$$= x\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \ln(x)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} x\ln(n) - x(\ln(n) + \gamma + o(1)) - \ln(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$(H_n = \ln(n) + \gamma + o(1))$

$$\underset{n\to+\infty}{=} -\gamma x - \ln(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + o(1)$$

- $$\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{x}{k} - \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\frac{x^2}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{x^2}{k^2}$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann $(2>1)$

Donc par théorème de comparaison, $\sum_{n\geq1} \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ converge.

Ainsi $\boxed{\ln(G_n(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$

Comme exp est continue sur $\mathbb{R}$, on a.

$$G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

Donc $$\boxed{G_n \xrightarrow{CS} G \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\gamma x - \ln(x) + \sum_{n\geq1} \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \end{array}\right.}$$

c. On veut appliquer le critère $\mathcal{C}^1$ pour les séries de fonctions.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \end{array}\right.$

(H_1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ $$f_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{x}{n+x}$$

(H_2) On a montrer précédement que $\sum_{n\geq1} f_n$ CS.

(H_3) Soit $a > 0$,

on montre que $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[0, a]$.

$$\forall x \in [0, a] . \quad |f_n'(x)| \leq \frac{a}{n^2}$$

donc $\quad \|f_n'\|_{[0,a]} \leq \frac{a}{n^2}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann $(2 > 1)$

Par théorème de domination $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, a]$.

Donc $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$$

~~Donc~~ $\cancel{\ln(G(x)) = -\gamma x - \ln(x) +}$

$$\cancel{\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad (\ln(G(x)))' = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}}$$

Donc par composition de fonction, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et

$$\cancel{G'(1) = -\gamma - \frac{1}{} + \sum_{n=1}^{+\infty}}$$

$$G'(1) = \Big(-\gamma + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \, = \, 1}\Big) e^{\underbrace{-\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}_{\gamma - 1}}$$

$$= \boxed{(-\gamma + 1)\, e^{-1}}$$

Martin Kirilov-Libr.

Rapport de colle, semaine 15.

Exercice.

1. Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur un intervalle I vers une fonction f, et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs réelles convergeant vers un réel ℓ. Montrer que la suite $(f_n(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(\ell)$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer que l'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ d'inconnue x admet une unique solution *strictement positive*. On la note x_n dans la question suivante.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée, donc convergente. On note ℓ sa limite.

   (c) Montrer : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ell^k = 1$. En déduire la valeur de ℓ.

Traiter les exercices dans l'ordre indiqué.

1). Soit $\varepsilon > 0$. On sait $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$, donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2. \quad (1)$$

De plus par caractérisation séquentielle de la continuité, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$, donc

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \varepsilon/2 \quad (2)$$

Si $N := \max\{N_1, N_2\}$, (1) et (2) livrent

$$\forall n \geqslant N,\ |f_n(u_n) - f(\ell)| \leqslant |f_n(u_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \varepsilon$$

soit, $\boxed{f_n(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell).}$

2). (a). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que

$$\forall x \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} x^k \geqslant n \geqslant 1$$

donc toute solution éventuelle est dans $[0,1]$. On pose

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k \end{array} \right. .$$

On applique le théorème des valeurs intermédiaires :

- $f_n \in C^0([0,1], \mathbb{R})$
- $1 \in [0,n]$, et $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = n$

ainsi,

$$\boxed{\exists x_n \in [0,1], \quad f_n(x_n) = 1.}$$

De plus, f_n est dérivable et

$$\forall x \in]0,1], \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} > 0 \quad (*)$$

Puis si $(a,b) \in [0,1]^2$, $a < b$, alors $f_n'(b) > 0$ par $(*)$, soit $f_n' \neq 0_{\mathbb{R}^{[a,b]}}$. Par critère différentiel de stricte monotonie, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ et induit une bijection

$$\tilde{f} \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow f([0,1]) \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

Or par théorème d'image d'un intervalle par une application continue strictement monotone,

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,n]$$

Comme $1 \in [0,n]$, on a unicité des solutions à l'équation.

(b). f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ par 2).(a) et $(x_{n+1}, x_n) \in [0,1]^2$, si $n \in \mathbb{N}$. (*) Ainsi,

$$f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) \implies x_{n+1} \leq x_n.$$

Or,

$$f_n(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{n+1}^k = 1 - \underbrace{x_{n+1}^{n+1}}_{>0} \leq f_n(x_n) = 1$$

D'où le résultat.

(*) d'où la minoration demandée.

(c). Si $x \in [0,1[$,

$$f_n(x) \underset{+\infty}{=} x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x}{1-x}.$$

Puisque $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, par 1),

$$\underbrace{f_n(x_n)}_{1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{l}{1-l}$$

soit $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} l^n}_{1} = \frac{l}{1-l}$, puis $\boxed{l = \frac{1}{2}}$.

Tiguin, David — Colle de la semaine 15

Exercice 5. sef3

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ où $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

1) Si $0 < x$ $\quad \exp(-x\sqrt{n}) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (croissances comparées)
donc par Riemann $\sum_{n\geq 1} \exp(-x\sqrt{n})$ converge par comparaison.
Sinon $\exp(-x\sqrt{n}) \not\to 0$ donc la série ne converge pas ainsi
$\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement $\Leftrightarrow 0 < x$

2) · $\forall n \in \mathbb{N}^*$ u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
· Soit $a > 0$ alors $\forall n \in \mathbb{R}_+^*$
$0 < \|u_n\|_{\infty, [a,+\infty[} \leq \exp(-a\sqrt{n})$
Or $\sum_{n\geq 1} \exp(-a\sqrt{n})$ converge comme en (1)
donc par domination $\sum_{n\geq 0} \exp(-x\sqrt{n})$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$ par domination. Ainsi par théorème sur la continuité
S est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$

3) On a montré la convergence uniforme en (2)
de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exp(-\sqrt{n}\,x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors par théorème sur la double limite au bord de l'intervalle $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$

4) Soit $0 < x \leq y$ alors

$-y \leq -x < 0$ et par croissance de exp $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$0 < \exp(-y\sqrt{n}) \leq \exp(-x\sqrt{n})$ donc si $N \in \mathbb{N}^*$

$0 < \sum_{n=1}^{N} \exp(-y\sqrt{n}) \leq \sum_{n=1}^{N} \exp(-x\sqrt{n})$ et $N \to +\infty$

comme S est bien définie :

$0 < S(y) \leq S(x)$

Pierre T. Colle de la semaine

Exercice : $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto nt^n \sin(\pi t) \end{array} \right.$

1. Montrez que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CS sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]}|f_n(t)|\right)$.
3. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne CU pas sur $[0,1]$.

Solution :

1. Soit $t\in[0,1]$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

Si $t=1$: $f_n(t)=0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $t\neq 1$: $|f_n(t)| = |nt^n\sin(\pi t)| \leq n e^{n\underbrace{\ln(t)}_{<0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CS sur $[0,1]$ vers $0_{\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $t\in[\frac{1}{2},1]$.

$\frac{1}{2}\leq t\leq 1$ donc $0\leq 1-t\leq \frac{1}{2} \leq t$

donc $n(1-t)^n\sin(\pi(1-t)) \leq nt^n \sin(\pi(1-t))$

donc $n(1-t)^n\sin(\pi(1-t))\leq nt^n\sin(\pi t)$

donc $f_n(1-t)\leq f_n(t)\leq \sup_{x\in[\frac{1}{2},1]}|f_n(x)|$

donc par passage au sup : $\sup_{t\in[\frac{1}{2},1]}|f_n(1-t)| = \sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]}|f_n(t)| \leq \sup_{x\in[\frac{1}{2},1]}|f_n(x)|$

donc $\sup_{t\in[0,1]}|f_n(t)| = \sup_{t\in[\frac{1}{2},1]}|f_n(t)|$.

f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :
$\forall t \in [0,1]$ $f_n'(t) = n(nt^{n-1}\sin(\pi t) + \pi t^n \cos(\pi t))$

$f_n'(\frac{1}{2}) = n^2 (\frac{1}{2})^{n-1} \neq 0$

donc comme f_n est $\mathcal{C}^0$ et que $\frac{1}{2}$ n'est pas un point du bord, f_n n'atteint son maximum en $\frac{1}{2}$, ni en 1 puisque $f_n(1) = 0$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe donc $\alpha_n \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $f(\alpha_n) = \sup_{t\in[0,1]} f(t)$. Comme α_n n'est pas un point du bord :

$f_n'(\alpha_n) = 0$ donc $n\alpha_n^{n-1}\sin(\pi\alpha_n) = -\pi\alpha_n^n \cos(\pi\alpha_n)$

donc $\tan(\pi\alpha_n) = -\frac{\pi\alpha_n}{n}$ $(\pi\alpha_n \in]\frac{\pi}{2}, \pi[)$

Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée : $-\frac{\pi\alpha_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\tan(\pi\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ $(\pi\alpha_n \in]\frac{\pi}{2}, \pi[)$

Soit $\varepsilon_n = 1 - \alpha_n$.
$\tan(\pi\alpha_n) = \tan(\pi(1-\varepsilon_n)) = -\tan(\pi\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\pi\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$

donc $-\pi\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\pi(1-\varepsilon_n)}{n}$

donc $n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \varepsilon_n$

donc $(n+1)\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - o(n\varepsilon_n)$

donc $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} + o(\varepsilon_n)$

donc $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n}$

donc $f_n(\alpha_n) = f_n(1-\varepsilon_n)$

$$= n(1-\varepsilon_n)^n \sin(\pi(1-\varepsilon_n))$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \sin\left(\pi\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} n e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} n e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \pi e^{-1+o(1)} + o\left(e^{-1+o(1)}\right)$$

donc comme exp est $\mathcal{C}^0$ en -1 : $f_n(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{e}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)|\right) = \frac{\pi}{e}$.

3. $\|f_n - 0_{\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})}\|_\infty \longrightarrow \frac{\pi}{e} \neq 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne CU pas sur $[0,1]$.

Léon

Rapport de colle de la semaine n° 15.

Énoncé : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $n \neq m \Rightarrow |z_n - z_m| \geq 1$

Nature de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{z_n^3}$.

Solution :

- soit $r>0$, posons $A_r := \{ k \in \mathbb{N}^* : |z_k| \leq r\}$
  $B_r := \{ |z_k| : k \in A_r \}$

- soit $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $n\neq m$, alors $\underline{\mathcal{B}(z_n, \frac{1}{2}) \cap \mathcal{B}(z_m, \frac{1}{2}) = \emptyset}$

$\hookrightarrow$ supposons $\exists y \in \mathcal{B}(z_n, \frac{1}{2}) \cap \mathcal{B}(z_m, \frac{1}{2})$
alors $|z_n - z_m| \leq |z_n - y| + |y - z_m| \leq 1$ $\lightning$.

- soit $k \in A_r$, $y \in \mathcal{B}(z_k, \frac{1}{2})$, alors $\underline{|y| \leq r + \frac{1}{2}}$.

$\hookrightarrow$ $|y| = |y - z_k + z_k| \leq \frac{1}{2} + r$.

Ainsi $\bigsqcup\limits_{k\in A_r} \mathcal{B}(z_k, \frac{1}{2}) \subset \mathcal{B}(0, r + \frac{1}{2})$

Par monotonie et additivité de la mesure d'aire,

$$|A_r|\, \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \pi \left(r + \frac{1}{2}\right)^2$$

donc A_r est fini

$$\underline{|A_r| \leq (2r+1)^2} \quad (\emptyset)$$

L'ensemble $\{ |z_k| : k \in A_{|z_1|} \}$ est fini et non-vide (de $\mathbb{R}$), il admet un minimum. Soit $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|z_{N_1}|$ ~~valle~~ vaut ce minimum.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons construits $N_1, N_2, \dots, N_n$ tels que

$|z_{N_1}| \leq |z_{N_2}| \leq \dots \leq |z_{N_n}|$ et $N_1, N_2, \dots, N_n$ deux à deux distincts

Comme $A_{|z_{N_n}|}$ est fini, $\exists\, l \in \mathbb{N}^*$ tel que $l \notin A_{|z_{N_n}|}$,

ainsi $B_{|z_l|} \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \{|z_{N_k}|\}$ est non-vide et fini ~~comme~~.

Il admet un minimum donc on pose N_{n+1} tel que $|z_{N_n}|$ vaut ce minimum.

On a construit $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$|z_{N_1}| \leq |z_{N_2}| \leq \dots$

et $N_1, N_2, \dots$ 2 à 2 distincts. Cette suite est ainsi injective.

Soit $m \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$, par l'absurde supposons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_n \neq m$ (+)

~~alors~~ $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}^*, |z_m|}$ ~~ne~~ ~~suivera~~ pas

Comme $(|z_{N_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non-majorée

(supposons que $M > 0$ majore la suite alors $\{A_M\}$ ~~est~~ est infini ⚡),

par le théorème de la limite monotone

$$|z_{N_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$\exists r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq r$ $|z_{N_n}| > |z_m|$, notons ℓ le minimum de ces r. On a $|z_{N_\ell}| \in B_{|z_{\ell-1}|} \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\ell-1} \{|z_{N_i}|\}$

par transitivité et (+) $|z_m| \in B_{|z_{\ell-1}|} \setminus \bigsqcup_{i=1} \{|z_{N_i}|\}$

or par construction $|z_{N_\ell}| \leq |z_m|$ ⚡.

$(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est bijective.

L'ordre de sommation n'important pas pour la sommabilité des familles de réels positifs.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|^3} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_{N_n}|^3}$$

Soit $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a $|A_{N_k}| \geq k$ par construction de la suite ainsi par $(\mathcal{A})$, $|z_{N_k}| \geq \frac{\sqrt{k}-1}{2}$. ainsi, soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z_{N_k}|^3} \leq \frac{1}{|z_{N_1}|^3} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{2^3}{(\sqrt{k}-1)^3}}_{\sim \frac{8}{k^{3/2}}} \quad \text{or } 3/2 > 1$$

par le critère de Riemann $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge, par comparaison $\sum_{n\geq 2} \frac{8}{(\sqrt{k}-1)^3}$ converge ainsi

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{|z_k|} \leq \frac{1}{|z_{N_1}|^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{8}{(\sqrt{k}-1)^3}$$

La famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi sommable

Louis D. Semaine de colles n°15

Énoncé :

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$ puis sa convergence uniforme.

b. Le passage à la limite sous l'intégrale est-il valide pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?

Solution :

a) • Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CS} f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to 0 \end{array} \right.$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$f_n'(x) = \frac{e^{-x}}{n!} x^{n-1} (n - x)$$

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	0 ← (CC)

Donc $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \dfrac{n^n}{n!} e^{-n}$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^n}{n^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(x)}_{0} \, dx = 0$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

$$= \frac{\Gamma(n-1)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Or $\lim_{n \to +\infty} 1 = 1 \neq 0$

Le passage à la limite sous l'intégrale n'est pas valide.