Léon

Rapport de colle de la semaine n° 12

Énoncé : convergence et valeur de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, dt$.

Solution :

$f \left| \begin{array}{l}]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{t-1}{\ln(t)} \end{array}\right.$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1[$.

Par le théorème ~~des croissan~~ d'opérations sur les limites $\frac{t-1}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$.

Par limite du taux d'accroissement $\frac{t-1}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 1]{} 1$.

Comme f est prolongeable par continuité, $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, dt$ converge.

comme $u \longmapsto e^u$ est bijective est strictement croissante.

on pose le changement de variable $t = e^u$ ainsi cette intégrale vaut

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^u-1}{u}\, e^u\, du.$$

Comme elle converge, $\int_{-\infty}^0 \frac{e^u-1}{u} e^u du = \lim_{\alpha\to 0^-} \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^u-1}{u}\, e^u\, du}_{\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{2u}}{u}du - \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^u}{u}du}$

Cette intégrale généralisée est bien définie car $\frac{e^{2u}}{2u} \underset{u\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ par le théorème de croissances comparées. De même pour l'autre.

Soit $\alpha > 0$ au voisinage de 0. $\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^u-1}{u} e^u du = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{e^u}{u}\, du$. Soit $\varepsilon > 0$,

Comme $\frac{e^u}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u}$, on a

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{u} \geqslant \frac{e^u}{u} \geqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{u} \quad \text{au voisinage de } 0 \text{ (pour } u<0)$$

Par décroissance de $\int_{\alpha}^{2\alpha}$ $(2\alpha < \alpha)$, (et linéarité)

$$(1-\varepsilon)\underbrace{\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{u}\,du}_{\substack{\ln(2\alpha)-\ln(\alpha)\\ =\ln(2)}} \leq \int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^u}{u}\,du \leq (1+\varepsilon)\underbrace{\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{u}\,du}_{\ln(u)}$$ au voisinage de 0

donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^u}{u}\,du \sim \ln(2)$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)}\,dt = \ln(2)}$

Maximilien T. Colle Semaine 11

$a < b$ des réels
f $\mathcal{C}^0$ $[a,b] \to \mathbb{R}$
ϕ $\mathcal{C}^0$ $[a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui possède un unique maximum

Déterminer $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{\int_a^b \phi^n f}{\int_a^b \phi^n}$

Solution: $\exists c \in [a,b]$ tel que $\forall x \in [a,b]$ $\overset{M}{\overset{\shortparallel}{\phi(c)}} \geq \phi(x)$

Supposons $c \in \overset{\circ}{[a,b]}$ Soit $n \in \mathbb{N}$

Montrons $\displaystyle \frac{\int_a^b \phi^n f}{\int_a^b \phi^n} \longrightarrow f(c)$ i.e. $\displaystyle \frac{\int_a^b \phi^n (f - f(c))}{\int_a^b \phi^n} \longrightarrow 0$

Soit $\varepsilon > 0$ Mq $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\displaystyle \left| \frac{\int_a^b \phi^n (f - f(c))}{\int_a^b \phi^n} \right| \leq \frac{\int_a^b \phi^n |f - f(c)|}{\int_a^b \phi^n} \leq \varepsilon.$

Comme $\displaystyle f(x) \underset{x \to c}{\to} f(c)$ $\exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in \underbrace{[c-\alpha, c+\alpha]}_{V_\alpha}$ $|f(x) - f(c)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Quitte à réduire α nous pouvons supposer $\forall x \notin V_\alpha$ $\phi(x) \leq M - \varepsilon$
(car ϕ admet un unique maximum)

Ainsi $\displaystyle \frac{\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \phi^n |f - f(c)|}{\int_a^b \phi^n} \leq \frac{\varepsilon}{3} \underbrace{\frac{\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \phi^n}{\int_a^b \phi^n}}_{\leq 1 \text{ car } \phi \geq 0} \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\S$ Comme $\phi(x) \to \phi(c)$ $\exists \eta > 0$ $\forall x \in [c-\eta, c+\eta]$ $\phi(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{\int_a^{c-\alpha} \phi^n |f - f(c)|}{\int_a^b \phi^n}$$

$$\int_a^{c-\alpha} \phi^n |f-f(c)| \leq \|f - f(c)\|_\infty \int_a^{c-\alpha} \phi^n \leq (c-\alpha-a)\|f-f(c)\| (M-\varepsilon)^n$$

$$\int_a^b \phi^n \geq \int_{c-\eta}^{c+\eta} \phi^n \geq 2c\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

$$\leq \frac{(c-\alpha-a)}{2c} \|f-f(c)\|_\infty \underbrace{\left(\frac{M-\varepsilon}{M-\frac{\varepsilon}{2}}\right)}_{<1}{}^n \longrightarrow 0$$

Donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$ $\dfrac{\int_a^{c-\alpha} \phi^n |f-f(c)|}{\int_a^b \phi^n} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$

De même nous trouvons N_2 tel que $\forall n \geq N_2$ $\dfrac{\int_{c+\alpha}^{b} \phi^n |f-f(c)|}{\int_a^b \phi^n} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$

$N := \max(N_1, N_2)$

$\forall n \geq N$ $$\frac{\int_a^b \phi^n |f-f(c)|}{\int_a^b \phi^n} = \frac{\int_a^{c-\alpha} \phi^n |f-f(c)| + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \phi^n |f-f(c)| + \int_{c+\alpha}^{b} \phi^n |f-f(c)|}{\int_a^b \phi^n}$$

$$\leq 3 \times \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \quad \square$$

Tiguin, David   Colle de la semaine 12.

Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{|\sin(\lambda u)|}{u} du \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{2\ln(\lambda)}{\pi}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

On pose $f \left| \begin{array}{l}]0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \frac{|\sin(\lambda u)|}{u} \end{array} \right.$ qui est Cpm sur $]0,\pi]$

- Premièrement par changement de variable $t = \lambda u$ on a :
$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin(\lambda u)|}{u} du = \int_0^{\lambda\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

On

- Puis :
$$\int_0^{\lambda\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt}_{I} + \int_{\lfloor\lambda\rfloor\pi}^{\lambda\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

On $\forall k \in [\![1, \lfloor\lambda\rfloor]\!]$ $\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi]$ $\frac{1}{k\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{(k-1)\pi}$

- Ainsi (*) $\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| dt \leq I \leq \sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \frac{1}{(k-1)\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| dt$

- On à l'infini $\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \frac{1}{k\pi} \sim \ln(\lambda) \times \frac{1}{\pi}$ et de même avec
$$\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \frac{1}{(k-1)\pi} \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor} \frac{1}{\pi k}.$$

- De plus par positivité et par définition de la valeur absolue $\forall k \in [\![1, \lfloor\lambda\rfloor]\!]$ $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| dt = [\cos(t)]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$ si k paire sinon il est égale à $[-\cos(t)]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$
dans tous les cas $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| dt = 2$

- De même on sait que $\forall t \in [\lfloor\lambda\rfloor\pi, \lambda\pi]$
$$\frac{|\sin(t)|}{t} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\pi(\lambda-1)}$$
($t \geq \pi\lfloor\lambda\rfloor \geq \pi(\lambda-1)$
et décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$)

Ainsi

$$0 \le \int_{\lfloor \lambda \rfloor \pi}^{\lambda \pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \le \int_{\lfloor \lambda \rfloor \pi}^{\lambda \pi} \frac{1}{\pi(\lambda - 1)} dt = \frac{\lambda \pi - \lfloor \lambda \rfloor \pi}{\pi(\lambda - 1)}$$

Par inégalité sur la partie entière :

$$\frac{\lambda \pi - \lfloor \lambda \rfloor \pi}{\pi(\lambda - 1)} \le \frac{(\lfloor \lambda \rfloor + 1)\pi - \lfloor \lambda \rfloor \pi}{\lambda \pi - \pi} = \frac{\pi}{\lambda \pi - \pi} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$$

- Finalement par théorème d'encadrement sur (*)

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin(\lambda t)|}{dt} dt \sim \frac{2 \ln(\lambda)}{\pi}$$

Martin
Kirilov-Lilov.

Rapport de colle, semaine 12.

Déterminer un équivalent de

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

au voisinage de $+\infty$.

La fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & \frac{e^{-t}}{t} \end{array}\right.$$

est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. De plus si $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, puisque

$$\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o(\underbrace{\tfrac{1}{t^2}}_{\geq 0})$$

par croissance comparée et $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge par critère de Riemann, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

Les fonctions $t \longrightarrow -e^{-t}$ et $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$ et $t \longrightarrow -e^{-t}\cdot\frac{1}{t}$ admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi $\left[-e^{-t}\cdot\frac{1}{t}\right]_x^{+\infty}$ existe et puisque $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge, par intégration par parties,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \underbrace{\left[-e^{-t}\cdot\frac{1}{t}\right]_x^{+\infty}}_{\frac{e^{-x}}{x}} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$$

Une autre intégration par partie livre de même

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \underbrace{\left[-e^{-t}\cdot\frac{1}{t^2}\right]_x^{+\infty}}_{\frac{e^{-x}}{x^2}} + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}\,dt.$$

Or si $A \in \mathbb{R}_{\geq x}$,

$$\int_x^A \frac{e^{-t}}{t^3}\,dt \leq \frac{e^{-x}}{x}\int_x^A \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{e^{-x}}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{A}\right)$$

Par passage à la limite, il vient

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)$$

d'où

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x}\underbrace{\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{o(1)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

puis enfin

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

Pierre T. Colle de la semaine 12

Exercice : Montrer que $\int_0^x e^{t^2} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

__Solution :__ Soit $f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{t^2} \end{array} \right. \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

$\int_0^{+\infty} f$ diverge donc $\int_0^x f \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_1^x f$.

Soit $x > 1$.

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^{x^2} \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du \qquad t = \sqrt{u}$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$u : t \longmapsto e^t$ $\mathcal{C}_1$ sur $[1, x^2]$

$v : t \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$ $\mathcal{C}_1$ sur $[1, x^2]$

donc par intégration par partie :

$$\int_1^{x^2} \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du = \left[\frac{e^u}{2\sqrt{u}} \right]_1^{x^2} + \int_1^{x^2} \frac{e^u}{4u\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2\sqrt{x}} - \frac{e}{2} + \int_1^{x^2} \frac{e^u}{4u\sqrt{u}} du$$

or $\frac{e^u}{4u\sqrt{u}} \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\frac{e^u}{2\sqrt{u}} \right)$

donc par théorème d'intégration des o :

$$\int_1^{x^2} \frac{e^u}{4u\sqrt{u}} du \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_1^{x^2} \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du \right)$$

donc $\int_1^{x^2} \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du \underset{x \to +\infty}{=} \frac{e^{x^2}}{2\sqrt{x}} + o\left(\int_1^{x^2} \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du \right)$

donc $\int_0^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x e^{t^2}\,dt = \int_1^{x^2} \frac{e^u}{2\sqrt{u}}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Colle de la semaine n°12

Rayan. 6
MPI

Enoncé : Justifier l'existence de
$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x+\cos(x)} - \sqrt{x}\, dx$$

Solution :

$f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{t+\cos(t)} - \sqrt{t} \end{array} \right.$ continue sur $[0,+\infty[$ et bien def car $t \mapsto t+\cos(t)$ positive sur $[0,1]$

$$f(t) = \sqrt{t}\left(\sqrt{1+\frac{\cos(t)}{t}} - 1\right)$$

Or $(1+x)^{1/2} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

et $\frac{\cos(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ (cos borné)

donc $f(t) \underset{\infty}{=} \sqrt{t}\left(1 + \frac{\cos(t)}{2t} - \frac{\cos^2(t)}{8t^2} + o\left(\frac{\cos^2(t)}{t^2}\right) - 1\right)$

$$f(t) \underset{\infty}{=} \underbrace{\frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}}}_{:= g(t)} + \underbrace{\frac{-\cos^2(t)}{8t^{3/2}}}_{:= h(t)} + o\left(\frac{\cos^2(t)}{t^{3/2}}\right)$$

1) $\int_1^{+\infty} g$ converge

$\left.\begin{array}{l} u : t \mapsto \sin(t) \\ v : t \mapsto \frac{1}{2} t^{-1/2} \end{array}\right\} \mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$

De plus $uv(t) \underset{t\to1}{\to} \frac{\sin(1)}{2}$ et (sin continue)

$uv(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ (sin borné)

Par théorème d'intégration par partie

$\int_1^{+\infty} g$ a même nature que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{-4} t^{-3/2} dt$$

Or

$$0 \leq \left|\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}} \quad \text{et}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge par Riemann $(3/2 > 1)$

Par domination, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}$ ~~est~~ intégrable en $+\infty$

On en déduit $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{-4} t^{-3/2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} g$ converge

2) $\int_1^{+\infty} h \, dt$ converge

$$0 \leq |h(t)| \leq \frac{1}{8} \frac{1}{t^{3/2}}$$

On conclut à la convergence de manière analogue à précédemment (Domination / Riemann)

Ainsi $f = g + h$. Or $h \leq 0$ donc à ~~partir~~ partir de $A \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ $f - g \leq 0$

Or 2. bien $\int_A^{+\infty} f - g$ converge par théorème de comparaison

De plus $A \geq 1$ donc par 1) $\int_A^{+\infty} g$ converge

Par linéarité $\int_A^{+\infty} f$ converge

Par continuité de f sur $[0, A]$, $\int_0^{+\infty} f$ converge

Stanislas G

Enoncé: Sachant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,dt$ calculer ce qu'elle vaut :

Solution :

$\forall t \geqslant 0$

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 \quad (\text{formule d'Euler})$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} e^{ikt} \left(e^{-i(3-k)t}\right) \quad (\text{binôme de Newton})$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{i3t} - e^{-i3t} + 3\left(e^{-it} - e^{it}\right)\right)$$

$$= \cancel{\left(\frac{1}{2i}\right)^3} - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$$

donc $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{3\sin(t)}{4t^2} - \frac{1}{4}\frac{\sin(3t)}{t^2}\,dt$$

Soit $x \geqslant 0$

$$I(x) = \int_0^x \frac{3\sin(t)}{4\,t^2} - \frac{1}{4}\frac{\sin(3t)}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^x \frac{\sin(3t)}{t^2}\,dt} \quad (\text{linéarité de l'}\textstyle\int)$$

$$= \int_0^{3x} \frac{\sin(u)}{\left(\frac{u}{3}\right)^2}\,\frac{1}{3}\,du \quad (\text{changement de variable } u = 3t)$$

$$= \int_0^{3x} \frac{3\sin(u)}{u^2}\,du$$

donc $$I(x) = \frac{3}{4}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt - \frac{3}{4}\int_0^{3x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,du$$

$$= \frac{3}{4}\left(\int_0^x \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt + \int_{3x}^0 \frac{\sin(u)}{u^2}\,du\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt \quad (\text{Charles})$$

Paul C. Semaine 17

Enoncé:

Soit $a>0$, Démontrer que, pour tout $a>0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)\, e^{-at} dt$ converge et calculer sa valeur.

Solution.

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t)\, e^{-at} \end{array} \right. \in \mathcal{C}pm([0,+\infty[, \mathbb{R}).$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in [0,+\infty[\quad 0 \leqslant |\cos(t) e^{-at}| \leqslant |e^{-at}| \\ \int_0^{+\infty} e^{-at} dt \text{ converge } (a>0) \end{array} \right\} \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-at} dt \text{ converge.}$$

On remarque que $\forall t \in [0,+\infty[, \quad f(t) = Re\left(e^{(i-a)t}\right)$

notons $F : t \mapsto e^{(i-a)t} \in \mathcal{C}pm([0,+\infty[, \mathbb{C})$

$\forall x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \int_0^x f(t) dt = Re\left(\int_0^x F(t)\, dt\right).$

Soit $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$,
$$\int_0^x e^{(i-a)t} dt = \left[\frac{1}{i-a} e^{(i-a)t}\right]_0^x = \frac{1}{i-a}\left(e^{(i-a)x} - 1\right) = \frac{a+i}{a^2+1}\left(1 - (\cos(x) + i\sin(x))\, e^{-ax}\right)$$

d'où
$$Re\left(\int_0^x e^{(i-a)t} dt\right) = Re\left(\frac{a+i}{a^2+1}\left(1 - (\cos(x) + i\sin(x))\, e^{-ax}\right)\right)$$
$$= \frac{e^{-ax}}{1+a^2}\left(\sin(x) - a\cos(x)\right) + \frac{a}{1+a^2} = \int_0^x \cos(t) e^{-at} dt$$

d'où $\int_0^x \cos(t) e^{-at} dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{a}{1+a^2}$

On obtient donc $\int_0^{+\infty} \cos(t)\, e^{-at} = \frac{a}{1+a^2}$

Paul C. Semaine 12

Enoncé :

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient intégrables sur $[0,+\infty[$

Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Solution

f' est continue sur $[0,+\infty[$ intervalle, le théorème fondamental de l'analyse livre :

$$F \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f'(t)\,dt \end{array} \right.$$ une primitive de f' sur $[0,+\infty[$,

Par description des primitives d'une fonction sur un intervalle, $\exists\, C \in \mathbb{R}$:

$f = F + C$. a une limite finie par intégrabilité de f'.

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt + C$$

notons $\ell = \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt + C$.

Par l'absurde, supposons $\ell \neq 0$. alors

$\exists\, A \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq A, \quad |f(x) - \ell| \leq |\ell/2|$

i.e. $|f(x)| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$

Alors, comme $\int_0^{+\infty} \frac{|\ell|}{2}\,dt$ diverge, $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ diverge (théorème de comparaison)

ce qui n'est pas,

Ainsi, $\ell = 0$, i.e. $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Raphaël Mouchonnet colle semaine n° 12.

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^2}}\,dt$ converge et calculer sa somme à l'aide d'un changement de variable avec $\{-1, 1\}$ comme nouvelles bornes

Solution :

$$f \left| \begin{array}{l}]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} \end{array} \right.$$ est $\mathcal{C}_{pm}(]0,1[,\mathbb{R})$

en 0 : $t-t^2 \underset{t\to 0}{\sim} t$. Donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$

Comme $\frac{1}{2} < 1$ par critère de Riemann $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge donc par comparaison $\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge.

en $+\infty$: $t-t^2 \underset{t\to 1}{=} o(t)$ Donc $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

De la même façon $\int_{1/2}^1 f(t)\,dt$ converge

Donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

La fonction $h : t \mapsto 2t-1$ est bijective et croissante.

Donc en réalisant un changement de variable $u = h(t)$.

L'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u+1}{2}\right)-\left(\frac{u+1}{2}\right)^2}} du$ converge

et à même valeur que $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Or $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u+1}{2}\right)-\left(\frac{u+1}{2}\right)^2}} du = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{u+1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-u}{2}}} du$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= \left[\arcsin(u)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} = \pi}$$

Rapport de colle, semaine n° 12

Wassim M.

Exercice: Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{|\sin(Nx)|}{x}\,dx \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(N)$

Solution:

$f \left| \begin{array}{l}]0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{|\sin(Nx)|}{x}\,dx \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $]0,\pi]$

Par le changement de variable $t = Nx$:

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(Nx)|}{x}\,dx$$

Ainsi, on a: $\int_0^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt = \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor N \rfloor} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt}_{S} + \int_{\lfloor N \rfloor\pi}^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$

or $\forall k \in [\![1, \lfloor N \rfloor]\!]$ $\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi]$ $\frac{1}{k\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{(k-1)\pi}$

donc $\sum_{k=1}^{\lfloor N \rfloor} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,dt \leq S \leq \sum_{k=1}^{\lfloor N \rfloor} \frac{1}{(k-1)\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,dt$

comme
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$
- $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,dt = 2$
- $\int_{\lfloor N \rfloor\pi}^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$ converge vers 0

Par théorème d'encadrement $S \to \frac{2}{\pi}\ln(N)$ donc $\boxed{\int_0^{\pi} \frac{|\sin(Nx)|}{x}\,dx \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(N)}$

Titouan D

Rapport de colle semaine 12

Exercice 2 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + a^2 \sin^2(t)}$

1. Montrer que $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + a^2 \sin^2(t)}$.
2. Montrer que $I = \frac{\pi}{\sqrt{1 + a^2}}$. On pourra effectuer le changement de variable $u = \tan(t)$.

1) $f \left| \begin{array}{l} [0;\pi] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1+a^2 \sin^2(t)} \end{array} \right. \in \mathcal{C}_{pm}([0;\pi], \mathbb{R})$ et est même $\mathcal{C}^0$ sur $[0;\pi]$ en tant que composée de fonctions continues

Donc I existe

Soit $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$

Par trigonométrie $\sin(t) = \sin(\pi - t)$ donc $\sin^2(t) = \sin^2(\pi - t)$

Par changement de variable $u = \pi - t$ $(du = -dt)$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2 \sin^2(t)} dt = \int_{\pi}^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2 \sin^2(u)} (-1) du$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1+a^2 \sin^2(u)} du$$

Ainsi $\boxed{I = 2 \int_0^{\pi/2} f(t)\, dt}$

2) $g \left| \begin{array}{l} [0;\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1+a^2 \sin^2(t)} \end{array} \right. \in \mathcal{C}_{pm}([0;\pi/2], \mathbb{R})$

Par changement de variable $u = \tan(t)$ $du = (1+\tan^2(t))\, dt$

$= (1+u^2)\, dt$

$= \frac{1}{\cos^2(t)}\, dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2\sin^2(t)}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2\cos^2(t)\tan^2(t)}\,dt$$

$\Leftarrow$ cette multiplication est possible car $t \mapsto \frac{1}{1+a^2\cos^2(t)\tan^2(t)}$ est continue par morceau sur $[0;\frac{\pi}{2}[$

Par changement de variable

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2\frac{u^2}{1+u^2}} \times \frac{1}{(1+u^2)}\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+a^2)\,u^2}\,du$$

Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \times \int_0^{x} \frac{\sqrt{1+a^2}}{1+\sqrt{1+a^2}^{\,2}\,u^2}\,du = \left[\arctan(\sqrt{1+a^2}\,u)\right]_0^{+\infty} \times \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - 0$$

Donc $\boxed{I = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}}$

Louis. D

Semaine de colle n° 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} dx$

Une solution :

- $f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)(\dots)(x+n)} dx \end{array} \right.$ est cpm sur $[0,+\infty[$

- $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n} > 0$ donc f intégrable $\Leftrightarrow n \geq 2$

- Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x+i}$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$

$$(x+i_0) f(x) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} (x+i)} = a_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \frac{a_i}{x+i}$$

Pour $x \leftarrow -i_0$

$$a_i = \frac{1}{\underbrace{\underbrace{\prod\limits_{1 \leq i \leq i_0 - 1} (i - i_0)}_{(-1)^{i_0-1} \underbrace{\prod\limits_{1 \leq i \leq i_0-1} (i_0 - i)}_{(i_0-1)!}} \underbrace{\prod\limits_{n \geq i \geq i_0+1} (i - i_0)}_{(n-i_0)!}}} = \frac{(-1)^{i_0-1}}{(i_0-1)!(n-i_0)!}$$

Une primitive de f est :

$$F : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\ln(x+i)}_{\underset{+\infty}{\sim} \ln(x)} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(n-i)!}$$

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \underbrace{\ln(x)}_{\substack{\downarrow x \to +\infty \\ +\infty}} \sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{R}$$

Or, comme f est intégrable, F a nécessairement une limite finie en $+\infty$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$

Finalement, $\int_0^y f(t)\,dt = F(y) - F(0)$

$$= \underbrace{F(y)}_{\substack{\downarrow y\to+\infty \\ 0}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \ln(i) \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!\,(n-i)}}_{\in \mathbb{R}}$$

□

Louis B

Colle de la semaine

Intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx \quad \text{et}$$

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$$

1) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et trouver sa valeur

2) Mq $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n - K_n = 0$

3) En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

---

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrande $x \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$ est C_{pm} sur $]0,\frac{\pi}{2}]$

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2(n+1)+1)x)}{\sin(x)} - \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx$$

Or $\forall (a,b) \in \mathbb{R}$ $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Donc

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos((2n+2)x)\cancel{\sin(x)}}{\cancel{\sin(x)}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+2)x)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{\sin((2n+2)x)}{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n+2}\sin(\pi n + \pi) = 0$$

Donc (I_n) est constante et comme

$$n \leftarrow 0 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2\cdot 0+1)x)}{\sin(x)}\,dx = \pi/2$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{\pi}{2}$

2) $$I_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} - \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x) \times \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) dx$$

IPP $$= \left[-\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left(-\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\cos((2n+1)\varepsilon)}{2n+1}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right)dx\right)$$

la première limite vaut 0, puis comme
$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Alors $$\frac{1}{\sin(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{x}\,\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$ puis un DL_2

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o(x)$$

Donc $$\frac{1}{\sin(\varepsilon)} - \frac{1}{\varepsilon} \underset{0}{\sim} \frac{\varepsilon}{6} \longrightarrow 0$$

Donc la deuxième limite vaut également 0.

Donc $$I_n - K_n = \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos((2n+1)x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right)}_{G(x)} dx\right)$$

Louis B.

Or $G : x \longrightarrow \cos((2n+1)x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right)$

est défini sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et en 0 :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

donc $\sin^2(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^6}{120} + o(x^6)$

$$\underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6)$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)\right)} \quad \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)\right) \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{45} + \frac{x^4}{9} + o(x^4)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(x^2)$$

Donc $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} - \frac{7x^2}{60} + o(x^2)$$

Donc $\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{6} + \frac{7x^2}{60} + o(x^2)$

Donc $\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}$

On en déduit que G est prolongeable par continuité en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0} G(x) \in \mathbb{R}$ et vaut $\frac{1}{6}$. Donc $\int_0^{\pi/2} G(x)\,dx \in \mathbb{R}$

et $J_n - K_n = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sigma(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

3)

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$$

On applique le changement de variable $u = (2n+1)x$

$$K_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2n+1}} \frac{1}{2n+1}\,du$$

$$= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u}\,du \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

Par Q1 et Q2 :

$$K_n - J_n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Donc $K_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$

Par unicité de la limite on en conclut que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Semaine 12

Oudoire
Gatien

Calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2 - \frac{1}{t^2})\,dt$ avec le changement de variable $u = t - \frac{1}{t}$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2 - \frac{1}{t^2})\,dt$$

$f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \longmapsto \exp(-t^2 - \frac{1}{t^2}) \end{array} \right.$ cpm sur $]0,+\infty[$

<u>en 0^+ :</u>

$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$ donc $\int_0^1 f$ converge

<u>en $+\infty$:</u> $0 \leq f(t) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-t)$

donc par thm de domination $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

on ~~B~~ effectue le changement de variable

$u = t - \frac{1}{t}$

$u \in \mathcal{C}^1$ ~~a~~ et $u' \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 1 + \frac{1}{t^2} > 0 \end{array} \right.$

u est continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$ donc elle admet une bijection sur ~~$]0,$~~ cet intervalle donc u est un changement de variable.

On cherche à exprimer ~~t~~ t en fonction de u.

$u = t - \frac{1}{t}$ donc $t^2 - tu - 1 = 0$

donc $t = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2}$

la solution est celle positive donc
$t = \frac{u + \sqrt{u^2+4}}{2}$

$\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2$ donc $u^2 + 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2 - 2)\left(1 + \underbrace{\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}}_{}\right)\frac{du}{2}$

fonction impaire

$= \displaystyle\frac{e^{-2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2)\, du = \frac{e^{-2}}{2}\sqrt{\pi}$

Youssef B   Colle de la semaine 12

On pose pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, I_n est convergente

2) Determiner une suite de fonctions (f_n) tel que $I_n = \int_0^1 f_n$

3) Montrer que I_n $o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$

Solution :

1) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$

$$f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^n} \end{array} \right.$$ continue par morceaux sur $[0,+\infty[$

$f(x) \sim \frac{1}{x^n}$

par critère de Riemann, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx$ converge car $n \geq 2$

Donc par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} f$ converge

2) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$

on fait un changement de variable pour la deuxième intégrale :

$u = \frac{1}{x}$ $\left(x = 1 \rightarrow u = 1, x = +\infty \rightarrow u = 0, x = dx \rightarrow u = -\frac{1}{u^2} du \right)$

on a alors :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \int_1^0 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^n} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$

$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx + \int_1^0 \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} + \frac{1}{x^2+x^{2-n}} \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x^{n+2}} + \frac{x^n}{x^{2+n}+x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{x^2+x^n}{x^2+x^{n+2}} \, dx$$

Donc f_n est définie par $\forall x \in]0,1]$ $f_n(x) = \frac{x^2+x^n}{x^2+x^{n+2}}$

3) $I_n = \int_0^1 \frac{x^2+x^{n+2}+x^n-x^{n+2}}{x^2+x^{n+2}} \, dx$

$$= \int_0^1 1 + \frac{x^n}{x^2+x^{n+2}} - \frac{x^{n+2}}{x^2+x^{n+2}} \, dx$$

$$= \int_0^1 1 + \frac{x^{n-2}}{1+x^n} - \frac{x^n}{1+x^n} \, dx$$

On fait une integration par parties pour $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \, dx$

$u : x \longmapsto \ln(1+x^n)$ $\quad \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$v : x \longmapsto x^n$

De même, on fait une integration par partie pour $\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{1+x^n} \, dx$ et on trouve que

$$\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{1+x^n} - \frac{x^n}{1+x^n} \, dx = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec le critère de Riemann et le théorème de comparaison

Donc $I_n = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$

timothée. F

Exercice 2 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la convergence de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2. Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \underset{x\to+\infty}{=} o(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt)$

3. En déduire un équivalent quand $x \to +\infty$ du terme $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Soit $f \left| \begin{array}{ccc} [x\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-t^2} \end{array} \right. \in \mathcal{C}pm([x\,;+\infty[, \mathbb{R})$

On sait que $t^2 e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée

donc $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

de plus $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable par critère de Riemann

et $f \geq 0$ donc par théorème : f est intégrable,

ainsi, $\int_x^{+\infty} f$ converge.

2. Si $t \in \mathbb{R}_{\geq x}$, $\frac{1}{e^{t^2}} \cdot \frac{e^{-t^2}}{t^2} = \frac{1}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\frac{e^{-t^2}}{t^2} \underset{+\infty}{=} o(\underbrace{e^{-t^2}}_{=f(t)})$

de plus $\frac{e^{-t^2}}{t^2} \geq 0$ et f intégrable (1.)

donc par théorème : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$ converge

et $\int_A^{+\infty} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \underset{A\to+\infty}{=} o\left(\int_A^{+\infty} f\right)$.

3. Théorème d'intégration par parties : si $x > 0$,

$t \longmapsto \frac{-1}{t}$, $t \longmapsto e^{-t^2}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x ; +\infty[$,

$\frac{-1}{t} e^{-t^2} \underset{t \to x}{=} \frac{-1}{x} e^{-x^2}$ et $\frac{-1}{t} e^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

par croissances comparées,

donc $\left[\frac{-1}{t} e^{-t^2} \right]_x^{+\infty}$ existe et vaut $\frac{1}{x} e^{-x^2}$,

et étant donné la convergence de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t} e^{-t^2} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} 2f$$

$$= \frac{1}{x} e^{-x^2} - 2 \int_x^{+\infty} f$$

donc $\frac{1}{2x} e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} f = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$

$$\underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} f \right)$$

donc $\frac{1}{2x} e^{-x^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} f$.

Eliott S.V. Semaine 12

Enoncé :

1. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ est convergente.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\ln t)(e^{-t} - 2e^{-2t})\mathrm{d}t$.
3. Grâce à un changement de variable calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \mathrm{d}t$.

Solution :

1) $f \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \end{array} \right. \in \mathscr{C}_{pm}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$

en 0^+ : $f(t) \underset{t \to 0^+}{=} \frac{-t + 2t + o(t)}{t} = 1 + o(1)$

Donc l'intégrale en convergente en 0^+

en $+\infty$ $t^2 f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{C.C.} 0$ donc $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or $\frac{1}{t^2} > 0$ $\forall t > 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est d'intégrale convergente en $+\infty$, ce qui implique que celle de f aussi.

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

2) $f : t \mapsto \ln(t)$ $g : t \mapsto e^{-t} - e^{-2t}$ $(f, g) \in \mathscr{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

$f' : t \mapsto \frac{1}{t}$ $g' : t \mapsto 2e^{-2t} - e^{-t}$

et $f \cdot g(t) = \ln(t)(e^{-t} - e^{-2t}) = \ln(t) \cdot t + o(t\ln(t)) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

$f \cdot g(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Par théorème d'Ipp, $\int_0^{+\infty} \ln(t)(e^{-t} - 2e^{-2t})\, dt$ converge et a même valeur que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$.

3) On remarque que $\int_0^{+\infty} -\ln(t)e^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} 2\ln(t)e^{-2t}\,dt$ convergent

car $t \longmapsto -\ln(t)e^{-t} \sim -\ln(t) > 0$ et $\int_0^1 |\ln(t)|dt$ CV.

et $t \longmapsto t^2\ln(t)e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(t)e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ CV $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt$ CV.

de même pour $t \longmapsto 2\ln(t)e^{-2t}$.

Donc $\int_0^{+\infty} \ln(t)(e^{-t}-2e^{-2t})\,dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt}_{(1)} - \int_0^{+\infty} 2\ln(t)e^{-2t}\,dt$.

En effectuant le changement de variable $t = 2u$ dans (1), il vient :

$(1) = 2\int_0^{+\infty} \ln(2)e^{-2u} + \ln(u)e^{-2u}\,du$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \ln(t)(e^{-t}-2e^{-2t})\,dt = 2\int_0^{+\infty} \ln(2)e^{-2u}\,du$

$= 2\ln(2)\left[-\frac{1}{2}e^{-2u}\right]_0^{+\infty}$

$= 2\ln(2)\left(-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \ln(2)$.

Hugo D. Semaine de colle n°13

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx$$

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$$

1) Les intégrales convergent 2) $\forall n \in \mathbb{N}\ J_n = \frac{\pi}{2}$
3) $J_n - K_n \to 0$ 4) $I = \lim K_n$

Solution

1) Pour I : en $0^+ \to$ faux problème
en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

IPP: $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \underbrace{\left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^x}_{\text{limite finie en } +\infty} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$

Or $0 \leq \dfrac{|\cos(t)|}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ CV

Par théorème de domination $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ converge

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$ converge

- Pour J_n et K_n : faux problème en 0 car

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} = (2n+1)\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)x}\,\frac{x}{\sin(x)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} (2n+1)$$

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{x} = (2n+1)\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)x} \longrightarrow (2n+1)$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx$

$\displaystyle = 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+2)x)\,dx$ (Transformation $\Sigma - \Pi$)

$\displaystyle = \frac{1}{n+1}\Big(\sin((2n+2)x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}\sin(\underbrace{(n+1)\pi}_{\in \mathbb{N}}) = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$

3) $K_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$

On pose $f \left| \begin{array}{l}]0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \end{array} \right.$ C^1 sur $]0,\frac{\pi}{2}]$

$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Soit $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$ $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x\sin(x)} = \frac{-1}{6}x \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{1} \underset{x \to 0}{\to} 0$

Donc f prolongeable par continuité en 0. On note $\tilde{f}$ son prolongement $(\tilde{f}(0) = 0)$

$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x) - x}{x^2\sin(x)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2\sin(x)} = \frac{-1}{6}\frac{x}{\sin(x)} \to \frac{-1}{6}$

On note $\tilde{f}'$ le prolongement de f' en 0 $\left(\tilde{f}'(0) = \frac{-1}{6}\right)$ (*)

Par IPP : $K_n - J_n = \underbrace{\left[\left(\frac{-1}{2n+1}\right)\cos((2n+1)x)\tilde{f}(x)\right]_0^{\pi/2}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \tilde{f}'(x) \cdot \cos((2n+1)x)dx}_{R_n}$

$0 \leq |R_n| \leq \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} |\tilde{f}'(x)|\,|\cos((2n+1)x)|\,dx$

Or $\tilde{f}'$ continue sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$

Par théorème des bornes atteintes : $\exists M \in \mathbb{R}_+$ $|\tilde{f}'| \leq M$

Donc $0 \leq |R_n| \leq \frac{1}{2n+1}\frac{\pi}{2}M \to 0$

Par théorème d'encadrement $R_n \to 0$. Donc $J_n - K_n \to 0$

(*) : $\tilde{f}'$ continue en 0

Soit $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$ $\tilde{f}'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2\cos(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$

Hugo D. Semaine de colle n° 13 <u>Suite</u>

- $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $\sin^2(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $x^2\cos(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$\Rightarrow \quad -\sin^2(x) + x\cos(x) \sim -\frac{x^4}{6}$

Donc $\tilde{f}'(x) \sim \frac{-1}{6}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{-1}{6} = \tilde{f}'(0)$

Donc $\tilde{f}'$ continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$

4) De ce qui précède, on en déduit que $K_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$

On applique le changement de variable $\varphi : t \mapsto (2n+1)t$??
à K_n

$K_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} I$ car $(2n+1)\frac{\pi}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Par unicité de la limite $I = \frac{\pi}{2}$

Ibrahim .R

Colle de la semaine 12 :

Determiner un équivalent simple de

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$ au voisinage de $+\infty$.

Soit $x \geq 1$.

$$f \left| \begin{array}{l} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \frac{e^{-t}}{t} \end{array} \right.$$ $\mathcal{C}pm$ sur $[1, +\infty[$.

de plus

par croissance comparée $t^2 f(t) \underset{+\infty}{=} o(1)$ donc $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\frac{1}{t^2} > 0$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ CV (critère de Riemann $2 > 1$).

ainsi par Théorème de Comparaison

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ CV et donc $\int_x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ aussi

$u : t \to -e^{-t}$
$v : t \to \frac{1}{t}$ $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$

$-\frac{e^{-t}}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

par Théorème d'intégration par partie, et comme l'intégrale est convergente alors.

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x} - \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}_{}$$

Bien défini car $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ CV.

or $$\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\underbrace{\frac{e^{-t}}{t}}_{\geq 0}\Big).$$

ainsi comme les intégrale sont convergent

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \underset{+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right).$$

ainsi $$\frac{e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\right).$$

donc

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}}.$$

Sophie G

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[, \mathbb{R})$ de carré intégrable

Montrer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,dt = 0$

Solution :

$$\langle 1, f \rangle = \left| \int_0^x 1 \cdot f(t)\,dt \right| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x f^2(t)\,dt}$$

(Cauchy Schwarz)

Comme $\int_0^x f^2(t)\,dt$ converge

$\forall a \geq 0 \quad \int_a^{+\infty} f^2(t)\,dt$ converge (car queue d'une intégrale convergente)

et $\int_a^x f^2(t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

ie $\forall a \geq 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > 0 \; \forall x > A \; \int_a^x f^2(t)\,dt < \varepsilon$

en particulier $a \leftarrow A$, $\varepsilon \leftarrow \varepsilon^2$ Soit $\varepsilon > 0$

$\exists A > 0 \; \forall x > A \; \int_A^x f^2(t)\,dt < \varepsilon^2$

Considérons ce $A > 0$

Soit $x > A$.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,dt = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^A f(t)\,dt}_{\text{sur un segment}}}_{①} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} \int_A^x f(t)\,dt}_{②} \quad (*)$$

① $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

ie $\exists B \in \mathbb{R} \; \forall x \geq B \; \left| \sqrt{x} \int_0^A f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon$

② Par Cauchy Schwarz :

$$\left| \int_A^x f(t)\,dt \right| \leq \sqrt{x-A} \sqrt{\int_A^x f^2(t)\,dt}$$

donc ≤ 1 car $\left(\begin{array}{l} \cdot \mapsto \sqrt{\cdot} \text{ croissante} \\ x - A < x \end{array} \right.$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \int_A^x f(t)\,dt \right| \leq \frac{\sqrt{x-A}}{\sqrt{x}} \sqrt{\int_A^x f^2(t)\,dt} \leq \varepsilon$$

alors

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq 2\varepsilon$$ (inégalité triangulaire dans (*) et les majorations de (1) et (2))

donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,dt \longrightarrow 0}$

Colle de la semaine 12

Adam M.

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ tq f et f' sont intégrable sur $[0,+\infty[$
Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$

Solution :

D'après le théorème fondamental de l'analyse,
la fonction $x \longmapsto \int_0^x f'(t)\,dt$ est l'unique primitive de f' qui s'annule en 0
Donc $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0)$
Comme f' est intégrable sur $[0,+\infty[$, f a une limite finie en $+\infty$
$\exists l \in \mathbb{R}$ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$
Par l'absurde, supposons $l \neq 0$, quitte à remplacer f par $-f$, on peut
on suppose $l > 0$
$\varepsilon \leftarrow \frac{l}{2}$ $\exists A \geq 0$ $\forall x \geq A$ $|f(x) - l| \leq \frac{l}{2}$
Donc $f(x) \geq \frac{l}{2}$
Par croissance de l'intégrale, $\int_A^x f \geq \int_A^x \frac{l}{2}\,dt = \frac{l}{2}(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
Par théorème de domination $\int_A^{+\infty} f$ diverge $\cancel{\ }$

Mehdi B. Colle de la semaine 12

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente mais non-absolument convergente.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}}^{f_n(x)}\,dx \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\frac{\sin((2n+1)x)}{x}}^{g_n(x)}\,dx$$

(1) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur

(2) Montrer que $J_n - K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(3) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

• $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est semi-convergente d'après l'exercice fait en classe. On se propose de calculer sa valeur.

1) • J_n existe pour tout $n\in\mathbb{N}$ car f_n est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0 :

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 2n+1 \xrightarrow[x\to 0]{} 2n+1 \in \mathbb{R}^*$$

K_n est bien définie de même.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme J_{n+1} et J_n convergent, par linéarité

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx$$

Or : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad \sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

$$J_{n+1} - J_n = \frac{1}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(n+2)\cos(2(n+2)x)\,dx = \frac{\overbrace{\sin((n+2)\pi)}^{\in\mathbb{Z}}}{n+2} = 0$$

Donc $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et : $\forall n\in\mathbb{N}\ J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$.

(2) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x)\underbrace{\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)}_{h(x)} dx$$

Montrons que h est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ ($h\in\mathcal{C}^1(]0,\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})$)

<u>h continue en 0^+</u>. Au voisinage de 0^+ :

$$h(x) = \frac{1}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\underbrace{(-\frac{x^2}{6}+o(x^2))}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)-1\right)$$

$$= \frac{1}{6}x + o(x)$$

Donc $h(x) \sim \frac{x}{6} \longrightarrow 0$ donc h est prolongeable par continuité en 0^+ en posant $h(0)=0$. On note (abusivement) h ce prolongement.

<u>h' continue en 0^+</u>. En 0^+ :

$$h'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2\cos(x)+\sin^2(x)}{\underbrace{x^2\sin^2(x)}_{\sim x^4}}$$

On cherche un équivalent de $\sin^2(x) - x^2\cos(x)$ en 0^+.

Mehdi B.

$$\sin^2(x) - x^2\cos(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$
$$- x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$
$$= x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
$$= \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

Donc $h'(x) \sim \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$

Ainsi, h' possède une limite finie en 0^+ $\left(\frac{1}{6}\right)$
D'après ce qui précède, h est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
Le théorème de la limite de la dérivée livre :

$h'(0) = \frac{1}{6}$ et h' est continue en 0^+.

Nous pouvons à présent utiliser le théorème d'intégration par parties car $J_n - K_n$ converge et les fonctions :

$$u : t \mapsto -\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)x) \quad \text{et} \quad h : t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On vérifie :

$$u(t)h(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \quad (\mathcal{C}^0 \text{ de } \cos \text{ et de } h \text{ avec } h(0) = 0)$$

Donc $[u(t)h(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$ existe et vaut 0 $\left(\cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0\right)$.
Comme $J_n - K_n$ converge :

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} h'(x)\,dx$$

h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc h' est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

ce qui légitime l'existence de $\|h'\|_\infty$ d'après le théorème des bornes atteintes. Dès lors :

$$0 \leq |J_n - K_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\|h'\|_\infty}{2n+1}\,dx = \frac{\pi}{2} \times \frac{\|h'\|_\infty}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par théorème d'encadrement : $\boxed{J_n - K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

On en déduit par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \overset{\text{constant par (1)}}{J_n} = J_0 = \frac{\pi}{2}$

(3) Comme K_n converge, le changement de variable $u = (2n+1)x$ donne :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u/_{2n+1}} \times \frac{1}{2n+1}\,du$$

$$= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

D'après ce qui précède, les quantités mises en jeu possèdent une limite finie quand n tend vers l'infini (et cette limite est la même par unicité de la limite).
D'après (2), $K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Ainsi pouvons-nous conclure quant à la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$$

Celia A. Semaine n°12.

énoncé :

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \arctan(\sin(\frac{1}{t^2}))\,dt$.

solution :

$$f \,\Big|\, \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arctan(\sin(\frac{1}{t^2})) \end{array}$$

est continue sur $]0,+\infty[$

Étudions la nature de $\int_1^{+\infty} \arctan(\sin(\frac{1}{t^2}))\,dt$.

Selon les développements limités usuels,

$\sin(\frac{1}{t^2}) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})$ et $\arctan(\frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})$.

D'où $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

Selon les intégrales de référence, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge absolument.

Par théorème de comparaison, f est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc

$$\int_1^{+\infty} \arctan(\sin(\frac{1}{t^2}))\,dt \text{ converge.}$$

Étudions la nature de $\int_0^1 \arctan(\sin(\frac{1}{t^2}))\,dt$.

$\forall t > 0 \quad 0 \leq |f(t)| \leq \frac{\pi}{2}$. $x \mapsto \frac{\pi}{2}$ converge sur $]0,1]$

Par théorème de domination, $f(t)$ est intégrable sur $]0,1]$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \arctan(\sin(\frac{1}{t^2}))\,dt \text{ converge.}$$

MATHEO .N

Rapport de colle semaine 12

Exercice 2. $\boxed{\text{int21}}$ On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

1. Relation de récurrence sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. Pour quelle valeur de α a-t-on $I_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$?

1.) La fonction : $n\in\mathbb{N}^*$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{(1+x^3)^n} \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrons que I_n est bien définie, soit $x\in[1,+\infty[$

or : $0 \leq \frac{1}{(1+x^3)^n} \leq \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{>0}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}$ converge ($3>1$, $\underline{\text{Riemann}}$)

$\left.\right\}$ $\xrightarrow[\text{de domination}]{\text{théorème}}$ + f C^0 sur $[0,+\infty[$ $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge.

Ainsi I_n est bien définie ⊛

Nous avons alors :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} \times 1\,dx \quad \left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto \frac{1}{(1+x^3)^n} \\ v : x \longmapsto x \end{array} \right) \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})^2$$

Nous avons : pour $x\in[0,+\infty[$

$$0 \leq u(x)v(x) = \frac{x}{(1+x^3)^n} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi par $\underline{\text{théorème d'encadrement}}$ $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Par $\underline{\text{intégration par partie}}$ sur I_n et avec u et v nous avons : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}$ et $\int_0^{+\infty} -n\times 3x^2\times(1+x^3)^{-n-1}\times x\,dx$

$$= -3n\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx$$

de même nature, donc par ⊛ convergentes, d'où :

$$I_n = [uv]_0^{+\infty} - (-3n)\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx$$

$$= 3n\int_0^{+\infty} \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx$$

$$I_n = 3n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} - \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx$$

$$\underset{\text{[linéarité]}}{=} 3n\, I_n - 3n\, I_{n+1}$$

d'où : $\boxed{I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) = \ln\left(\frac{3n-1}{3n}\right) \overset{+1}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$

Ainsi $\ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{3n} \underbrace{- \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

En notant w_n les sommes partielles des $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ nous avons que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge par domination $\underset{n-1}{W_n =} \sum_{k=1}^{n-1} -\frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$w_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $0 \leq w_n \leq \sum_{k=1} \frac{1}{n^2}$

or $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^2}\right) \geq 0$ converge par Riemann $(2>1)$ on note $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$

Ainsi, pour $N \geq 2$:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)}_{} = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + w_N$$

somme télescopique $\left(\ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) = \ln(I_{n+1}) - \ln(I_n)\right)$

donc $\ln(I_N) - \ln(I_1) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{3}\ln(N) + l + o(1)$

en notant $l' = l + \ln(I_1)$ on a en appliquant exp :

$$I_N \underset{+\infty}{=} e^{-\frac{1}{3}\ln(N)} e^{l' + o(1)}$$

$$= \frac{e^{l'+o(1)}}{N^{\frac{1}{3}}}$$

en posant $A = e^{l'+o(1)}$ on a :

$\boxed{I_N \sim \frac{A}{N^{\frac{1}{3}}}}$ la valeur de λ demandée est $\frac{1}{3}$.

Pierre V. Colle de la semaine

Exercice 109. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x + \cancel{\cos x}\ 1/x} - \sqrt{x}\right) dx$.

Solution

$f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x} \end{array} \right.$ est continue par morceau sur $]0,+\infty[$

• en $+\infty$ Soit $x \geq 1$

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ (1+x)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \end{array}\right\} \text{donc } \left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}$$

On en deduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{3/2}} \geq 0$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge pour Riemann $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$

Par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} f$ est integrable donc converge sur $[1,+\infty[$

• en 0 Soit $x > 0$

$$\sqrt{x} \times \left(\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{x^2+1} - x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge pour Riemann $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$

Par theoreme de comparaison, $\int_0^1 f$ est integrable donc converg sur $]0,1]$

• Ainsi $\int_0^{+\infty} \sqrt{x+1/x} - \sqrt{x}\, dx$ converge

Robin G.

Colle de la semaine 12

Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Étudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $x\longmapsto \dfrac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}$.

Solution :

• $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta} \end{array}\right.$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ (1+x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha - 1\right) \\ \cdot\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} 1 + \frac{\alpha}{x} \\ \left(\frac{1}{x}\xrightarrow[+\infty]{}0\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow (1+x)^\alpha - x^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}}$$

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^{\beta-\alpha+1}}$.

• $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha+1}}$ est intégrable en $+\infty \iff \beta > \alpha$

Par théorème de comparaison, f l'est si et seulement si $\underline{\beta > \alpha}$.

• en 0 :

a) si $\alpha > 0$:

$(1+0)^\alpha - 0^\alpha = 1$ donc $(1+x)^\alpha - x^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1$

donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta}$

$\frac{1}{x^\beta}$ intégrable sur $]0,1]$ $\Leftrightarrow$ $\beta < 1$

et comme avant f l'est si et seulement si $\underline{\beta < 1}$.

• si $\alpha < 0$:

• $\dfrac{(1+x)^\alpha}{x^\alpha} = \exp(\underbrace{\alpha}_{<0} \underbrace{\ln(1+\tfrac{1}{x})}_{\xrightarrow[x\to 0]{} +\infty}) \xrightarrow[x\to 0]{} 0^+$ (composée de limites)

donc $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} o(x^\alpha)$ donc $(1+x)^\alpha - x^\alpha \underset{0}{=} -x^\alpha + o(x^\alpha)$

donc $(1+x)^\alpha - x^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} -x^\alpha$

donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{x^{\beta-\alpha}}$

Comme avant, f intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\underline{\beta < \alpha + 1}$.

• si $\alpha = 0$, $f = 0_{]0,+\infty[}$.

Ainsi, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si :

• $\beta < 1$
• $\alpha < \beta$ soit $\beta - 1 < \alpha < \beta < 1$
• $\beta < \alpha + 1$

REUTER
Robin

MPI

Rapport de Colles n°12

Exercice 2 :

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Établir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $F'(x)$.
3. Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{e^{-x}}{x})$.

En déduire que : $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

4. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0+} xF(x) = 0$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$f \left| \begin{array}{ccc} [x ; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{e^{-t}}{t} \end{array} \right.$ est continue par morceaux sur $[x ; +\infty[$.

$t e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

Donc $f \underset{t\to+\infty}{=} o(\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\geq 0})$

Par Riemann $(2 > 1)$ et théorème de comparaison, $\int_x^{+\infty} f$ converge.

Donc <u>F est bien définie</u>.

2. Par le théorème de la queue de l'intégrale F est l'unique primitive de $-f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puisque f est continue comme produit de fonctions continues, <u>F est $\mathcal{C}^1$</u> et <u>$F'(x) = -f(x)$</u>, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

3. $\forall t \in [x ; +\infty[$

$\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

Donc $\frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2}$

et par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}\,dt$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leq \frac{e^{-x}}{x^2}$$

Donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)$

$$\underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$t \mapsto -e^{-t}$
$t \mapsto \frac{1}{t}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$.

et $-\frac{e^{-t}}{t} \longrightarrow 0$ par croissances comparées.

Donc par intégration par parties,

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$$

Donc $F(x) - \frac{e^{-x}}{x} = -\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$

$$\underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

Ainsi $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{4\cos x - 5} dx$

1. Calculer a_0 et a_1
2. Calculer $a_n + a_{n+2}$, En déduire une relation de récurrence sur $(a_n)_{n \geq 0}$.
3. Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Solution :

1. On applique le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ à a_0,
   - $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
   - $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= -\frac{2}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{1+(3t)^2} dt$$

$$= -\frac{2}{3\pi} \left[\text{Arctan}(3t) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \boxed{-\frac{2}{3}}$$

a_1 peut se calculer à partir de a_0,

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x)}{4\cos(x) - 5} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos(x) - 5}{4\cos(x) - 5} dx}_{=1} + 5 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4\cos(x) - 5} dx \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\times 2\pi + 5a_0\right)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{3}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} + a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+2)x) + \cos(nx)}{4\cos(x) - 5}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos(x)\cos((n+1)x)}{4\cos(x) - 5}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(4\cos(x)-5)\cos((n+1)x) + 5\cos((n+1)x)}{4\cos(x) - 5}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+1)x)\,dx}_{= \left[\frac{1}{n+1}\sin((n+1)x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0} + 5a_{n+1}\right)$$

$$= \frac{5}{2}a_{n+1}.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{n+2} - \frac{5}{2}a_{n+1} + a_n = 0}$$

3. On a montré que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On résout son équation caractéristiques :

2 (E) : $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ x inconnue dans $\mathbb{C}$.

$(E) \iff (x-2)(x-\frac{1}{2}) = 0$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \lambda\, 2^n + \mu \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme $a_0 = -\frac{2}{3}$ et $a_1 = -\frac{1}{3}$, on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -\frac{2}{3} \\ 2\lambda + \frac{\mu}{2} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Enfin, $\boxed{a_n = -\frac{2}{3} \frac{1}{2^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Antoine B. colle de la semaine 12.

Enoncé :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$.
Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+)$, $g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left(\int_a^b \varphi(t) f^n(t)\, dt \right)^{1/n} \right) \to \max\limits_{x \in [a,b]} (f(x))$

Une solution : soit $n \in \mathbb{N}^*$

- posons $M := \max\limits_{x \in [a,b]} (f(x)) \in \mathbb{R}_{>0}$ sinon $f = 0$

  $\hookrightarrow$ M existe par le théorème des bornes atteintes sur le segment $[a,b]$.

- On peut écrire : $\left(\int_a^b \varphi(t) f^n(t)\, dt \right)^{1/n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(linéarité de l'intégrale)}}}{=} M \left(\int_a^b \varphi(t) \left(\frac{f(t)}{M} \right)^n dt \right)^{1/n}$.

  On cherche à montrer que $M \left(\int_a^b \varphi(t) \left(\frac{f(t)}{M} \right)^n dt \right)^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$

  ie : $\left(\int_a^b \varphi(t) \left(\frac{f(t)}{M} \right)^n dt \right)^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$. $\int_a^b \varphi(t) \left(\frac{f(t)}{M} \right)^n dt \leqslant \int_a^b \varphi(t)\, dt \in \mathbb{R}_{>0}$ (car $\varphi > 0$)

(1). d'où $\left(\int_a^b \varphi(t) \left(\frac{f(t)}{M} \right)^n dt \right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b \varphi(t)\, dt \right)^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$

- Comme f est continue en x_0, le point (un des points) où M est atteint par f.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in [a,b]$, $|x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - M| \leqslant \varepsilon}_{\text{ie : } f(x) - M \geqslant -\varepsilon}$.

soit $\varepsilon > 0$.

$$\Big(\int_a^b \varphi(t) \underbrace{\left(\frac{f(t)}{M} \right)^n}_{= \left(\frac{f(t) + M - M}{M} \right)^n = \left(1 + \frac{f(t) - M}{M} \right)^n} dt \Big)^{1/n} \geqslant \left(\int_a^b \varphi(t) \left(1 - \frac{\varepsilon}{M} \right)^n dt \right)^{1/n}$$

or $\left(\int_a^b \varphi(t) \left(1 - \frac{\varepsilon}{M} \right)^n dt \right)^{1/n} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{M} \right) \times \left(\int_a^b \varphi(t)\, dt \right)^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \left(1 - \frac{\varepsilon}{M} \right)$

Ainsi

(1) livre

$$(1-\varepsilon)\times\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b \varphi(t)\left(\frac{f(t)}{M}\right)^n dt\right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^{1/n}$$

$$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$(1-\varepsilon)\times\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1-\varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0^+, on obtient bien : $\left(\int_a^b \varphi(t)\left(\frac{f(t)}{M}\right)^n dt\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

par théorème d'encadrement

Rémi. S

Semaine n°19

Soit $f \in \mathcal{C}_0([a;b];\mathbb{R}^+)$, $f \neq 0$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0([a,b];\mathbb{R}^{+*})$

Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b \varphi f^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max\limits_{[a;b]} f$

$\max\limits_{[a;b]} f = f(x_0) = M > 0$, $x_0 \in [a,b]$

$$(1) \int_a^b \varphi \left(\frac{f}{M}\right)^n \leq \int_a^b \varphi$$

f continue et $f(x_0) > 0$ donc pour tout $\varepsilon > 0$

il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]-\eta + x_0 ; x_0 + \eta\right[\cap [a;b] \quad f(x) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + M$$

$$\text{donc } (2) \int_a^b \varphi \left(\frac{f}{M}\right)^n \geq \int_{\max(a;x_0-\eta)}^{\min(b;x+\eta)} \varphi \left(\frac{-\varepsilon+2M}{2M}\right)^n$$

On applique $x \to x^{1/n}$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ à (1) et (2)

$$\left(\int_a^b \varphi\right)^{1/n} \geq \left(\int_a^b \varphi \left(\frac{f}{M}\right)^n\right)^{1/n} \geq \left(\int_{\max(a;x_0-\eta)}^{\min(b;x+\eta)} \varphi\right)^{1/n} \left(-\frac{\varepsilon}{2M}+1\right)$$

Par encadrement ; quand $n \to +\infty$

$$1 \geq \left(\int_a^b \varphi \left(\frac{f}{M}\right)^n\right)^{1/n} \geq 1 \left(-\frac{\varepsilon}{2M} + 1\right)$$

Vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc

$$M \geq \left(\int_a^b \varphi f^n\right)^{1/n} \geq M$$

d'où l'égalité.

Nicolas H — Colle de la semaine 12

Énoncé

Obtenir un développement asymptotique quand $t \longrightarrow +\infty$ à la précision $\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ de $\int_0^1 \frac{\cos(x)dx}{1+tx}$

Solution

Soit $t > \mathbb{R}_{>0}$

Posons $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\cos(x)}{1+tx} \end{array} \right.$.

f est continue sur $[0,1]$.

En faisant le changement de variable $u = tx$,

$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+tx}\,dx$ et $\int_0^t \frac{\cos\left(\frac{u}{t}\right)}{1+u} \times \frac{1}{t}\,du$ ont

même nature.

Soit $g \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \frac{\cos\left(\frac{u}{t}\right)}{1+u} \end{array} \right.$

quand $t \longrightarrow +\infty$

$$\frac{\cos\left(\frac{u}{t}\right)}{1+u} = \frac{1}{1+u} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u}\,du$ diverge grossièrement,
- $\frac{1}{1+u} \geqslant 0$ car $u \in [0;+\infty[$
- $\frac{\cos\left(\frac{u}{t}\right)}{1+u} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+u}$

Par intégration des équivalents

$$\int_0^t \frac{\cos\left(\frac{u}{t}\right)}{1+u} \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_0^t \frac{1}{1+u} = \ln(1+t) \sim \ln(t)$$

donc, car $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+tx}\,dx$ converge,

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+tx}\,dx = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\cos\left(\frac{u}{t}\right)}{1+u}\,du \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$

Exercice 4 : Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(t) = \sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}$ où a et b sont des réels.

1. Prouver que $f(t) = (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2} \times \frac{1}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.
2. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
3. Lorsque l'intégrale précédente est convergente, calculer la valeur de l'intégrale.

Solution : Soit $t \in \mathbb{R}_+$

(1) $f(t) = \sqrt{t} + a\sqrt{t}\sqrt{1+\frac{1}{t}} + b\sqrt{t}\sqrt{1+\frac{2}{t}}$

- $(1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
- $\frac{1}{t}, \frac{2}{t} \underset{t \to +\infty}{\longmapsto} 0$

Par théorème de composition : $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \sqrt{t} + a\sqrt{t}\left(1 + \frac{1}{2t} + \underbrace{o\left(\frac{1}{t}\right)}_{O\left(\frac{1}{t^2}\right)}\right)$
$+ b\sqrt{t}\left(1 + \frac{1}{t} + \underbrace{o\left(\frac{1}{t}\right)}_{O\left(\frac{1}{t^2}\right)}\right)$

Donc $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \sqrt{t} + a\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} + \frac{b}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$

Donc $\boxed{f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \sqrt{t}(1+a+b) + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{a+2b}{2} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)}$

(2) Etudions l'éventuelle convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ suivant différentes valeurs de a et b.

- Si $(1+a+b) \neq 0$: Alors $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} (1+a+b)\sqrt{t}$ et donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge

Supposons alors $(1+a+b) = 0$

- Si $\frac{a+2b}{2} \neq 0$: Alors $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{a+2b}{2}$ et donc d'après le critère de Riemann, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Supposons alors $\frac{a+2b}{2} = 0$

Cela revient alors à résoudre : $\begin{cases} 1+a+b = 0 \\ a+2b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Ainsi : l'intégrale $\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge si et seulement si } a=-2 \text{ et } b=1}$

③ Soit $f \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sqrt{t} - 2\sqrt{1+t} + \sqrt{2+t} \end{array} \right.$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Soit $x \geq 0$

$I : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est bien définie sur le segment $[0;x]$.

Par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$I(x) = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} + \frac{2}{3}(t+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\times 2\sqrt{2}$$

• $(1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$$I(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x}\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}} + \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \frac{4}{3}(1-2\sqrt{2})$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$+ \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{4}{3}(1-2\sqrt{2})$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} \cancel{\frac{2}{3}x\sqrt{x}} - \cancel{\frac{4}{3}x\sqrt{x}} - \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{x}} + \cancel{\frac{1}{6}\frac{\sqrt{x}}{x}} - \cancel{\frac{4}{3}\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x}} + \cancel{\frac{1}{6}\frac{\sqrt{x}}{x^2}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$+ \cancel{\frac{2}{3}x\sqrt{x}} + \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{x}} - \cancel{\frac{1}{6}\frac{\sqrt{x}}{x}} + \cancel{\frac{4}{3}\sqrt{x}} + \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{x}} - \cancel{\frac{1}{6}\frac{\sqrt{x}}{x^2}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) + \frac{4}{3}(1-2\sqrt{2})$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3}(1-2\sqrt{2}) + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{4}{3}(1-2\sqrt{2})$$

Ainsi $\boxed{\text{lorsque } \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge, } \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{4}{3}(1-2\sqrt{2})}$

Alexandre M.

Colle semaine 12

Enoncé :

Exercice 6 :

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$.
2. En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer que :
$$\forall x \in]0,1[, \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$$
3. Pour $X \in]0,1[$, démontrer l'égalité : $\int_0^X \frac{x}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^{X^2} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$.
4. En déduire un encadrement pour $X \in]0,1[$ de $\int_0^X \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$.

Résolution :

1) Soit $f \left| \begin{array}{l}]0;1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x-1}{\ln x} \end{array} \right.$. f est c.p.m. sur $]0;1[$ (on remarque f continue sur $]0;1[$)

Soit $x \in]0;1[$

On a $\frac{\overbrace{x-1}^{\xrightarrow[x\to 0^+]{} -1}}{\underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

donc f est prolongeable par continuité en 0

De plus $\left.\begin{array}{l} \ln(1+t) \underset{t\to 0}{=} t + o(t) \\ x-1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{=} x-1+o(x-1)$ (composé de limites)

i.e $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$

d'où $\frac{x-1}{\ln(x)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{x-1} = 1$

et équivalent livre $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 1$

Donc f est prolongeable par continuité en 1.

Il s'agit donc de deux faux problèmes. (f est $\mathcal{C}^0$ sur $]0;1[$)

Ainsi $\boxed{\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx \quad \text{converge.}}$

2) Soit $x \in]0;1[$

On a $\ln$ $\mathcal{C}^0$ sur $[x;1]$

$\ln$ dérivable sur $]x;1[$

D'après le théorème des accroissements finis :

$\exists\, c \in]x;1[\qquad \ln(x) - \ln(1) = \ln'(c)(x-1)$

i.e $\qquad \ln(x) = \frac{x-1}{c}$

on a $0 < x < c$

donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{c} > 0$

d'où $\frac{x-1}{x} < \frac{x-1}{c} = \ln(x) \qquad [x-1<0]$

comme $0 < c < 1$ on en déduit de même

$$\ln(x) = \frac{x-1}{c} < x-1$$

d'où : $\forall x \in]0;1[\qquad \boxed{\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x-1}$

3) Soit $X \in]0;1[$

comme $f \,\Big|\, \begin{array}{l}]0;X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{\ln x} \end{array}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0;X]$

et prolongeable par continuité en 0 $\left[\frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \right]$

on a $\int_0^X \frac{x}{\ln(x)}\,dx$ converge.

en posant $u = x^2 \qquad [\cdot^2$ est $\mathcal{C}^1$; $\nearrow$ et bij sur $\mathbb{R}_+]$

on a $x = \sqrt{u} \qquad [x \geq 0]$

Abscandre M.

Par théorème de changement de variable :

i.e $$\int_0^X \frac{x}{\ln(x)}dx = \int_0^{X^2} \frac{\cancel{\sqrt{u}}}{\ln(\sqrt{u})}\left(\frac{1}{2\cancel{\sqrt{u}}}du\right)$$

$$= \int_0^{X^2} \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}}\ln(u)}\cancel{\frac{1}{2}}\,du$$

d'où $$\boxed{\int_0^X \frac{x}{\ln(x)}dx = \int_0^{X^2}\frac{1}{\ln(u)}du}$$

q.e.d.

4) Soit $X \in]0;1[$ on a $0 < X^2 < X$

d'après q3) $\int_0^X \frac{x}{\ln(x)}dx$ et $\int_0^{X^2}\frac{1}{\ln x}dx$ convergent

donc par continuité de $\frac{1}{\ln}$ sur $[X^2;X]$ on a $\int_0^X \frac{1}{\ln x}dx$ converge

Par linéarité on a $\int_0^X \frac{x-1}{\ln(x)}dx = \int_0^X \frac{x}{\ln(x)}dx - \int_0^X \frac{1}{\ln(x)}dx$

Chasles et q3) $$= \int_0^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx - \left(\int_0^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx + \int_{X^2}^X \frac{1}{\ln(x)}dx\right)$$

$$= -\int_{X^2}^X \frac{1}{\ln(x)}dx.$$

Soit $x \in [X^2;X] \subset]0;1[$ on obtient par q2) (inv ↘↘ sur $\mathbb{R}_-^*$)

$$0 > \frac{x}{x-1} > \frac{1}{\ln(x)} > \frac{1}{x-1}$$

par croissance de l'intégrale sur un segment

$$0 \geqslant \int_{X^2}^X \frac{x}{x-1} \geqslant \int_{X^2}^X \frac{1}{\ln(x)}dx \geqslant \int_{X^2}^X \frac{1}{x-1}dx \quad (*)$$

1   2

① : $\int_{X^2}^{X} \frac{x}{x-1}\,dx = \int_{X^2}^{X} 1 + \frac{1}{x-1}\,dx$

$= [x + \ln(|x-1|)]_{X^2}^{X}$

$= X(1-X) + \underbrace{\ln\left(\left|\frac{X-1}{X^2-1}\right|\right)}_{\ln\left(\left|\frac{1}{X+1}\right|\right)}$

② : $\int_{X^2}^{X} \frac{1}{x-1}\,dx = [\ln(|x-1|)]_{X^2}^{X}$

$= \ln\left(\left|\frac{1}{X+1}\right|\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{X+1}\right)$ $[X \in]0;1[)$

✱ livre

$\alpha \leq \underbrace{-X(1-X)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{- \ln\left(\frac{1}{X+1}\right)}_{\substack{\ln(X+1) \\ \downarrow \\ \ln(2)}} \leq -\int_{X^2}^{X} \frac{1}{\ln(x)}\,dx \leq \underbrace{-\ln\left(\frac{1}{X+1}\right)}_{\substack{\ln(X+1) \\ \downarrow \\ \ln(2)}}$

$X \to 1^-$

Par théorème d'encadrement

$-\int_{X^2}^{X} \frac{1}{\ln(x)} \underset{X \to 1^-}{\longrightarrow} \ln(2)$

d'où

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx = \ln(2)}$$

Anaë D.

Rapport de colle S12

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} (\arctan(1+x) - \arctan(x))\,dx$ est convergente
2. Démontrer que $\lim_{X \to +\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x)\,dx$
4. Calculer $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))\,dx$

Solution :

1) Montrons que $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))\,dx$ est convergente

$f \left| \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arctan(x+1) - \arctan(x) \end{array} \right.$ $\mathcal{C}pm$ sur $[0, +\infty[$

Soit $x \geq 0$

$g \left| \begin{array}{l} [x, x+1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \arctan(t) \end{array} \right.$ $\mathcal{C}^0$ sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$

$\forall t \in]x, x+1[\quad g'(t) = \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ (inverse décroissant sur $\mathbb{R}_+$)

Par l'inégalité des accroissements finis, il vient

$\arctan(x+1) - \arctan(x) \leq \frac{1}{x^2}$

D'où $\quad 0 \leq \int_0^{+\infty} \arctan(x+1) - \arctan(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge par critère de Riemann. Donc par théorème de domination, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

2) Montrons que $\lim_{X \to +\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

Soit $X \geq 0$

$u : x \longmapsto \arctan(x)$ $\qquad v : x \longmapsto x$

$u' : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad v : x \longmapsto 1$ $\qquad (u, v)$ $\mathcal{C}^1$ sur $[X, X+1]$

Par intégration par parties sur le segment $[X, X+1]$, il vient :

$$\int_X^{X+1} \arctan(x)\,dx = \left[x\arctan(x)\right]_X^{X+1} - \int_X^{X+1} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= (X+1)\arctan(X+1) - X\arctan(X) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_X^{X+1}$$

$$= X\left(\arctan(X+1) - \arctan(X)\right) + \arctan(X+1) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+(X+1)^2) - \ln(1+X^2)\right]$$

$$= X\left(\arctan(X+1) - \arctan(X)\right) + \arctan(X+1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+(X+1)^2}{1+X^2}\right)$$

$$= X\left(\arctan(X+1) - \arctan(X)\right) + \underbrace{\arctan(X+1)}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(\frac{1+X^2}{1+(X+1)^2}\right)}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{} 0}$$

Or on sait par Q1 que

$\forall X \geq 0 \qquad 0 \leq \arctan(X+1) - \arctan(X) \leq \frac{1}{X^2}$

$\Rightarrow \qquad 0 \leq X(\arctan(X+1) - \arctan(X)) \leq \frac{1}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0 \qquad (X \geq 0)$

Par théorème d'encadrement $X(\arctan(X+1) - \arctan(X)) \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$

Ainsi on a

$$\int_X^{X+1} \arctan(x)\,dx \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

3. Pour $X = 0$, en reprenant les calculs de la question précédentes, il vient

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx = \arctan(1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

4. Soit $A \geq 0$

(linéarité de l'intégrale) $\displaystyle\int_0^A \arctan(x+1) - \arctan(x)\,dx = \int_0^A \arctan(x+1)\,dx - \int_0^A \arctan(x)\,dx$

$u = x+1 \qquad \displaystyle = \int_1^{A+1} \arctan(u)\,du - \int_0^A \arctan(x)\,dx$

$$= \cancel{\int_0^A \arctan(u)\,du} + \int_0^1 \arctan(u)\,du + \int_A^{A+1} \arctan(u)\,du$$

$$- \cancel{\int_0^A \arctan(x)\,dx} \qquad \text{(Chasles)}$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(x+1) - \arctan(x)\,dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$

MANGIACOMINI
Amélien

Rapport de colle 12

Soient $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{t^\alpha (-\ln(t))^\beta}}_{f(t)} dt$

$\left|\begin{array}{l}]0; \frac{1}{2}] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) \end{array}\right.$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $]0; \frac{1}{2}]$

Si $\alpha > 1$ alors $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ D.V. ;

On pose $\gamma = \frac{\alpha+1}{2}$ tel que $1 < \gamma < \alpha$

Or on ; $\frac{1}{t^\gamma} \times \frac{1}{f(t)} = t^{\alpha-\gamma}(-\ln(t))^\beta \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ (C.C.)

donc $\frac{1}{t^\gamma} = o(f(t))$ et a fortiori

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{t^\gamma} = O(f(t)) \quad / \geq 0 \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\gamma} \text{ D.V. } (\gamma \geq 1) \end{array}\right\}$ Par comparaison $\Rightarrow$ $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ D.V.

Si $\alpha < 1$ alors $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$ C.V.

$$f(t)\, t^{\alpha} = \frac{1}{(-\ln(t))^{\beta}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right)$ et a fortiori

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = O\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right) \quad \color{red}{\geq 0} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{\alpha}} \text{ C.V. } (\alpha < 1) \end{array}\right\} \underset{\text{comparaison}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \text{ C.V.}$$

Si $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$ alors, soit $x > 0$;

$$\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} (-\ln(t))^{-\beta}\, dt$$

$$= -\left[\frac{(-\ln(t))^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_x^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\left[\frac{\ln(2)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(-\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta}\right]$$

si $\beta > 1$; $\underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{\ln(2)^{1-\beta}}{1-\beta} \in \mathbb{R}$.

MANGIACOMINI
Aurélien

si $\beta < 1$; $\underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.

Et enfin si $\beta = 1$; soit $x > 0$;

$$\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} (-\ln(t))^{-\beta} dt = \Big[\ln(-\ln(t))\Big]_x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln(\ln(2)) - \ln(-\ln(x))$$

$$\underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

On conclut quand $\alpha = 1$;

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(-\ln(t))^{\beta}} dt \text{ C.V.}$$

$\Longleftrightarrow \beta > 1$ □.

Jules R. Colle de la semaine 12

Énoncé : Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$f \left| \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \end{array} \right.$$ est C_{pm} sur $[0, +\infty[$

Soit $x \in [0, +\infty[$

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

$t \mapsto t$, $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ sont C^1 sur $[0, +\infty[$

$$= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^x + 2n \int_0^x t^2 (1+t^2)^{-n-1} dt$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int_0^x t^2 (1+t^2)^{-n-1} dt$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int_0^x (1+t^2)^{-n} - (1+t^2)^{-n-1} dt$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 2n (I_n - I_{n+1})$$

On obtient donc :

$$I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2n} I_n$$

Montrons maintenant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n) : \text{" } I_n = \frac{\pi (2(n-1))!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \text{ "}$$

(I) à $n = 1$: $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est C_{pm} sur $[0, +\infty[$

$$I_n = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi (2(n-1))!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2n} I_n$$

$$= \frac{\pi (2n-1)(2(n-1))!}{n\, 2^{2n} ((n-1)!)^2} \quad \text{d'après HR}$$

$$= \frac{\pi (2n-1)(2(n-1))!}{n\, 2^{2n} ((n-1)!)^2} \times \frac{2n}{2n}$$

$$= \frac{\pi (2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$$

L'hérédité est prouvée.

Léa Nasr

Colle de la semaine n° 12

Énoncé :

Nature et Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+|t|)}\,dt$

Solution :

· $f \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{(1+t^2)(1+|t|)} \end{array} \right.$

Continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$

On remarque que f est paire, ie $\forall x \in \mathbb{R}$
$f(-x) = f(x)$.

Il suffira donc d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+|t|)} = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t)}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t}$$

(d'après une décomposition en éléments simples)

Soit $A \geq 0$

$$\int_0^A f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{4}\int_0^A \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctan}(t)\right]_0^A - \frac{1}{4}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^A + \frac{1}{2}\left[\ln(1+t)\right]_0^A$$

(intégration sur un segment)

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(A) - \frac{1}{4}\ln(A^2) - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) + \frac{1}{2}\ln(A) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{A}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(A) - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{A}\right)$$

$A \longrightarrow +\infty$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$

On conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge.

Et comme f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f = 2\int_0^{+\infty} f$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}}$.

Lina. A. Colle de la semaine S12 :

Énoncé :

Soient $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.
Déterminer la nature de l'intégrale.

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha(-\ln(t))^\beta}\,dt.$$

Solution :

$f \left| \begin{array}{l}]0,\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(-\ln(t))^\beta} \end{array} \right.$ est continue par morceaux sur $]0,\frac{1}{2}]$ et positive.

1er cas : $\alpha < 1$:

Comme $\frac{1}{(-\ln(t))^\beta} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

Alors $\frac{1}{t^\alpha(-\ln(t))^\beta} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$.

Or $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge d'après le critère de Riemann ($\alpha < 1$).

Donc par théorème de comparaison $\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge.

2e cas : $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$.

$\forall t \in]0,\frac{1}{2}]$ $f(t) = \frac{1}{t}(-\ln(t))^{-\beta}$.

Soit $x \in]0,1/2[$

$$\int_x^{1/2} f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{1-\beta}(-\ln(t))^{1-\beta}\right]_x^{1/2}.$$

$$= \frac{1}{1-\beta}(-\ln(x))^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta}(\ln(2))^{1-\beta}$$

$$\xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1 \end{cases}$$

Donc $\int_0^{1/2} \frac{1}{t(-\ln(t))^{1-\beta}} dt$ converge $\Leftrightarrow$ $\beta > 1$

3^e cas : $\alpha > 1$. Soit $1 < \delta < \alpha$

Comme
$$\frac{t^{\delta}}{t^{\alpha}(-\ln(t))^{\beta}} = \frac{t^{\overbrace{\delta-\alpha}^{<0}}}{(-\ln(t))^{\beta}} \xrightarrow[t\to 0^+]{CC} +\infty$$

nous pouvons en déduire que.
$$0 \leq \frac{1}{t^{\delta}} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}(-\ln(t))^{\beta}}\right)$$

Donc si $\int_0^{1/2} f(t)\, dt$ converge alors

$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{\delta}}$ convergerait aussi ~~par~~ théorème de comparaison

Ce qui contredit le critère de Riemann car $\delta > 1$.

Donc $\int_0^{1/2} f(t)\, dt$ diverge.

4^e cas : $\beta = 1$.

$\forall t \in]0, \frac{1}{2}]$ $\quad f(t) = \frac{1}{t^{\alpha}(-\ln(t))}$

Comme $\frac{1}{-\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

Alors $\frac{1}{t^{\alpha}(-\ln(t))} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right)$

Donc $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{\alpha}(-\ln(t))}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$.