Pierre T. Colle de la semaine 10

Exercice 1. evn4
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $||f^2(x)|| \geqslant C||f(x)||$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe $C>0$ tel que : $\forall x \in E \quad ||f^2(x)|| \geqslant C||f(x)||$

On sait déjà $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$.

$\underbrace{C}_{>0} \cdot ||f(x)|| \leq ||f^2(x)|| = 0$

donc $||f(x)|| = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

On a donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$. Montrons que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

D'après le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E)$.

Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.

Soit $y \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

$\exists x \in E \quad y = f(x)$ et $f(y) = 0_E$

donc $f^2(x) = 0_E$

or $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_E$, donc $y = 0_E$.

Soit $N \left| \begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(f) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & ||f(y)|| \end{array} \right.$. Montrons que N est une norme sur $\operatorname{Im}(f)$.

Séparation : $N(0_E) = ||f(0_E)|| = ||0_E|| = 0$

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $N(y) = 0$.
$\|f(y)\| = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$
donc $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc $y = 0_E$.

Dilatation : Soit $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Im}(f)$.
$N(\lambda y) = \|f(\lambda y)\| = \|\lambda f(y)\| = |\lambda| \cdot \|f(y)\| = |\lambda| \cdot N(y)$

Inégalité triangulaire : Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}(f)^2$.
$N(x+y) = \|f(x+y)\| = \|f(x) + f(y)\| \leq \|f(x)\| + \|f(y)\| = N(x) + N(y)$.

$\exists C > 0 \ \forall x \in E \ \ \|f^2(x)\| \geq C\|f(x)\| \iff \exists C > 0 \ \forall y \in \mathrm{Im}(f) \ \ \|f(y)\| \geq C \cdot \|y\|$
$\iff \exists C > 0 \ \forall y \in \mathrm{Im}(f) \ \ N(y) \geq C \cdot \|y\|$

or $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie comme sous-espace vectoriel de E de dimension finie, donc N et $\|\cdot\|$ sont équivalentes sur $\mathrm{Im}(f)$.
donc $\exists C > 0 \ \forall y \in \mathrm{Im}(f) \ \ C \cdot \|y\| \leq N(y)$.

Antoine B. — colle de la semaine 10

$(E, \|\cdot\|)$ evn

Soit $F \subsetneq E$, K compact.

Montrer que $F + K$ est fermé.

Une solution:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (F+K)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow x \in E$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (f_n, k_n) \in F \times K$, $u_n = f_n + k_n$.

$\leadsto (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.

Comme K compact, alors $\left.\begin{array}{l}\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow \\ \exists k \in K\end{array}\right\}$ telsque $k_{\varphi(n)} \to k$.

$\left(f_{\varphi(n)}\right) = \underbrace{\left(u_{\varphi(n)}\right)}_{\substack{\text{Convergente} \\ \text{car suite extraite} \\ \text{de } (u_n) \text{ qui est CV}}} - \underbrace{\left(k_{\varphi(n)}\right)}_{\text{CV}}$ donc $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV. (combinaison linéaire de suite convergente)

Comme $F \subsetneq E$, $\underset{\exists f \in F \text{ tq}}{} f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$.

ainsi $u_{\varphi(n)} \longrightarrow k + f$ (combinaison linéaire de limite de suite CV)

Par unicité de la valeur d'adhérence d'une suite CV, $k + f = x$

donc $\underline{\underline{x \in K + F}}$

Ibrahim. K

Colle de la semaine 10

> Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
> Soit f une forme linéaire non nulle
>
> Montrer que
>
> f est Continue sur E $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f)$ non dense dans E

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f est Continue

Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E alors

Par l'absurde on suppose $H = \mathrm{Ker}(f)$ est dense dans E, comme $(x_0) \in E$

Soit $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to x_0$ où $x_0 \in E$

tq $f(x_0) \neq 0$

ainsi $f(x_n) \to f(x_0)$ par $\mathcal{C}^0$ de f

(car $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$) ($f(x_n) = 0$)

ce qui est Absurd.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si H est non dense alors H est fermé

i.e $H = \overline{H} \neq E$

Soit $x \in E \setminus H$.

~~Soit $\varepsilon > 0$.~~

$x \notin \overline{H}$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \cap H = \emptyset$.

ainsi $B(x, \varepsilon)$ ne Rencontre H.

Soit $\tau_{-x} \left| \begin{array}{l} E \to E \\ a \to a - x \end{array} \right.$

ainsi $\tau_{-x}(B(x, \varepsilon)) = B(0, \varepsilon)$.

ainsi $B(0,\varepsilon)$ ne rencontre pas le plan affine d'équation $f(a)\cdots f(x)$ par linéarité

$\|f(x)\|$ majore $\|f\|$ sur $B(0,\varepsilon)$.

donc f est C^0.

Léon

Rapport de colle de la semaine n°7

Énoncé : soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé

A, B deux parties de E ouvertes et denses dans E.
montrer que $A \cap B$ est ouverte et dense dans E.

Preuve :

Soit $a \in E$, $\varepsilon > 0$

comme A est dense dans E, $\exists x \in \underbrace{A \cap \mathcal{B}(a, \varepsilon)}_{\text{ouvert}}$

$\exists \varepsilon' > 0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon') \subset A \cap \mathcal{B}(a, \varepsilon)$.

comme B est dense dans E, $\exists y \in B \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon') \subset (A \cap B) \cap \mathcal{B}(a, \varepsilon)$

De plus, comme intersection d'ouverts : $A \cap B \in E$.

Ainsi,

$\boxed{A \cap B \text{ est une partie ouverte et dense dans } E.}$

Exercice 1 :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $3A^3 = A^2 + A + I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

2. Montrer que la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers la matrice L d'un projecteur.

Solution :

1. $P = 3X^3 - X^2 - X - 1$ annule A.

On remarque que 1 est racine de P, on en déduit que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \left\{1 ; -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3} ; -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$.

et $P = (X-1)\left(X + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(X + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

donc est annulé par un polynome scindé dans $\mathbb{C}$ à racines simples donc A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

2. On pose $z = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \{1 ; z ; \bar{z}\}$

et A diagonalisable donc : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists p \in \mathbb{N}$

$$A = P \, \mathrm{Diag}(I_{n-2p}, z I_p, \bar{z} I_p) P^{-1}$$

donc $A^k = P \, \mathrm{Diag}(I_{n-2p}; z^k I_p ; \bar{z}^k I_p) P^{-1}$

$$\forall i \in [\![1;2p]\!], \left[\mathrm{Diag}(I_{n-2p} ; z^k I_p ; \bar{z}^k I_p)\right]_{i+n-2p ; i+n-2p}$$

$$\to \mathrm{Diag}(I_{n-2p} ; O_{2p})$$

car $|\bar{z}| = |z| = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} < 1$

donc $z^k \to 0$
$\bar{z}^k \to 0$

$$f \left| \begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \\ A \to P \cdot A P^{-1} \end{array} \right.$$ est continue

car linéaire d'un espace de dimension finie à un autre.

donc $A^k \to P \begin{pmatrix} I_{n-2p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

et $\left(P\begin{pmatrix} I_{n-rp} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^2 = P\begin{pmatrix} I_{n-rp} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$

donc A^n tend bien vers la matrice d'un projecteur.

Maximilien T

Colle Semaine 10

Exercice 116. (Centrale) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et K une partie compacte de E, dont l'intérieur contient 0. On note N la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Soit F, G deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que si $A \subset F$ est compacte alors $g(A)$ l'est aussi.
2. Montrer que $H = \{u \in \mathscr{L}(E) : u(K) \subset K\}$ est une partie compacte de $\mathscr{L}(E)$.
3. Montre que si $u \in H$ alors $|\det u| \leqslant 1$.

$y_n = U_n(x) \in K$

Solution

1) Comme g est une application linéaire entre 2 espace de dim $< \infty$ g est $\mathcal{C}^0$. Ainsi par le cours $g(A)$ est un compacte.

2) Observons que comme $0 \in \mathring{K}$, $\exists r > 0$ tel que $B(0,r) \subset K$
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E quitte à normer les vecteurs de la base nous pouvons considérer les $e_1, \dots, e_n$ dans K.

Soit $(U_n) \in H^{\mathbb{N}}$ Montrons $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$ tel que $\exists U \in H$ tel que $U_{\phi(n)} \to U$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $y_{in} = U_n(e_i) \in K$ car $\begin{cases} e_i \in K \\ \text{et } U_n \in H. \end{cases}$

Comme K est compacte $\exists \phi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$ $\exists y_i \in K$ tel que $y_{i\phi_i(n)} \to y_i$

Posons $U \begin{vmatrix} E \to E \\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \end{vmatrix}$

Quitte à composer les extractrices nous pouvons considérer $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$ extractrice commune à tous les (y_{in})

Montrons que $U_{\varphi(n)} \to U$ en montrant que $\lim_{n\to+\infty} U_{\varphi(n)}$ et U coïncident sur les vecteurs de la base

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ $U(e_i) = y_i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{\varphi(n)}(e_i) = y_{i\varphi(n)} \to y_i$

Montrons maintenant $U \in H$.
Soit $k \in K$ Montrons $U(k) \in K$
~~$U(k) = \lim_{n\to+\infty} U_{\varphi(n)}(k)$~~ $\underbrace{U_{\varphi(n)}(k)}_{\in K} \to U(k)$ (La fonction évaluation est C^0)

Comme K est fermé $U(k) \in K$.

3) Par (Q1) $|\det(H)|$ est bornée ($|\det(\cdot)|$ est C^0 comme composée de C^0)
Soit $U \in H$
Remarquons $\forall k \in \mathbb{N}$ $U^k \in H$

Or $|\det(U^k)| = |\det(U)|^k$

Ainsi si $|\det(U)| > 1$ alors $\underbrace{|\det(U)|^k}_{\in |\det(H)|} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

Cela contredit le caractère borné de $|\det(H)|$.

Jules R. Colle de la semaine 10

Énoncé : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie bornée non-vide de E.
Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A.

Solution :

Posons :

$$H = \{ r \in \mathbb{R}_+^* : \exists x \in E \quad A \subset B_f(x, r) \}$$

H est un ensemble non vide car A est bornée et minorée par 0. H admet donc une borne inférieure.

Posons :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad r_n = r_0 + \frac{1}{n}$

Par définition de la borne inférieure, il existe $r \in H$ tel que $r_0 \leq r < r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Par définition de H, il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset B_f(x_n, r) \subset B_f(x_n, r_n)$

Ainsi :

Soit $a \in A$ alors :

$$\|x_n - a\| \leq r_n < r_0 + 1$$

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers $x \in E$. Soit $a \in A$. En passant à la limite dans l'inégalité $\|a - x_{\varphi(n)}\| \leq r_{\varphi(n)}$, on trouve $\|a - x\| \leq r_0$. Ainsi, $H \subset B_f(x, r_0)$ et cette boule est une boule fermée de rayon minimal contenant A.

Hugo D. Semaine de colle n°10

Exercice 116. (Centrale) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et K une partie compacte de E, dont l'intérieur contient 0. On note N la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Soit F, G deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que si $A \subset F$ est compacte alors $g(A)$ l'est aussi.
2. Montrer que $H = \{u \in \mathscr{L}(E) : u(K) \subset K\}$ est une partie compacte de $\mathscr{L}(E)$.
3. Montre que si $u \in H$ alors $|\det u| \leqslant 1$.

Solution

1) $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et F et G sont de dimension finie

Donc g est continue

Comme A compacte : $g(A)$ est compacte.

2) $H \subset \mathscr{L}(E)$ de dimension finie. Montrons que H fermé et borné

Fermé Soit $(u_n) \in H^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists u \in \mathscr{L}(E)$ $u_n \xrightarrow{N} u$

Montrons que $u \in H$ ie $u(K) \subset K$

Soit $y \in u(K)$ $\exists x \in K$ $y = u(x)$

Donc $u_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} u(x)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in H$ donc $u_n(K) \subset K$ d'où $u_n(x) \in K$

$\rightsquigarrow$ $(u_n(x)) \in K^{\mathbb{N}}$ et K compact donc $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow$
$\exists z \in K$

tel que $u_{\varphi(n)}(x) \to z$

Or $u_{\varphi(n)}(x) \to u(x)$ Par ! de la limite $u(x) = z \in K$

Donc H fermé

Borné $p := \dim(E)$ Soit $(e_1, ..., e_p)$ base de E

Comme $0 \in \mathring{K} \subset K$ et K fermé car compacte :

$\exists r > 0$ $B(0, r) \subset K$

Soit $i \in [\![1, p]\!]$ $e_i' := \frac{r}{2\|e_i\|} e_i$ $(\|e_i\| \neq 0)$ de sorte que $\|e_i'\| = \frac{r}{2} <$

Donc $e_i' \in K$

$\rightsquigarrow (e_1', \dots, e_p')$ est toujours une base de E

Comme K borné car compacte : $\exists M_K > 0 \ \forall b \in K \ \|b\| \leq M_K$

On pose $M := \sup_{u \in H} \max_{i \in [\![1,p]\!]} \|u(e_i')\|$

Bien défini car H non vide $(id_E \in H)$

Et si $u \in H$, $i \in [\![1,p]\!]$ $u(e_i') \in K$ donc $\|u(e_i')\| \leq M_K$

Par passage au max : $\max_{i \in [\![1,p]\!]} \|u(e_i')\| \leq M_K$ donc l'ensemble est majoré.

Par PBS M existe.

Comme E est de dimension finie, on peut choisir la norme car elles sont toutes équivalentes

On choisit $\|\cdot\| \Big| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \sum_{i=1}^p x_i e_i' \longmapsto \sum_{i=1}^p |x_i| \end{array}$ qui est une norme

Soit $u \in H$ Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$

$\exists (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i'$

$\|u(x)\| = \|\sum_{i=1}^p x_i u(e_i')\| \leq \sum_{i=1}^p |x_i| \underbrace{\|u(e_i')\|}_{\leq M} \leq M \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \leq M$

Par passage au sup : $N(u) \leq M$

Donc H est borné.

3) $\det : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{C}$ est continue

Donc $\det(H)$ est un compact car H est un compact (Q2)

(*) Donc $\det(H)$ est borné ie $\exists M > 0 \ \forall u \in H \ |\det(u)| \leq M$

Soit $u \in K$. On montre : $\forall n \in \mathbb{N} \ P(n) : "u^n \in H"$ (I) $n=0$ ✓

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n+1)$ ✓. Soit $y \in u^{n+1}(K)$ $\exists x \in K \ y = u^{n+1}(x)$

Par H.R $u^n(x) \in K$ Donc $y = u(u^{n+1}(x)) \in K$ car $u(K) \in K$. Donc $P(n+1)$ ✓

Par l'absurde supposons $|\det(u)| > 1$ On $|\det(u^n)| = |\det(u)|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

par multiplicativité de det et $|\cdot|$ et $|\det(u)| > 1$. Ce qui est une contradiction de (*)

Eliott S.V. Semaine 10.

Enoncé :

Soit E un evn, $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq $f \circ g - g \circ f = id_E$.

Montrer que $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

En déduire que f et g ne sont pas simultanément $\mathcal{C}^0$

$P(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$ "

Initialisation $n = 1$

$$f \circ g - g \circ f := id_E = 1 \times g^0$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tq $P(n)$ vrai.

$$\begin{aligned} f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f &= f \circ g^{n+1} - g(g^n \circ f) \\ &\overset{HR}{=} f \circ g^{n+1} - g(f \circ g^n - n g^{n-1}) \\ &= f \circ g^{n+1} - g \circ f \circ g^n + n g^n \\ &= (f \circ g - g \circ f) \circ g^n + n g^n \\ &= g^n + n g^n \\ &= (n+1) g^n \quad \square \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$.

Montrons par l'absurde que g et f ne sont pas simultanément $\mathcal{C}^0$.

Supposons f et g dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Comme $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$n |||g|||^{n-1} = |||f \circ g^n - g^n \circ f||| \leq 2|||f \circ g^n||| = 2|||f||| \times |||g|||^n.$$

Comme $|||g||| \neq 0$ (sinon $f \circ g - g \circ f \neq id_E$), il vient :

$$n \leq 2|||f||| \times |||g|||.$$

Cette inégalité contredit la continuité de f ou g par caractérisation d'icelle.

Lisa N.

Colle de la semaine n° 10

Énoncé :

EXERCICE 3

Démontrer que l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques réelles de format $n \times n$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce un compact?

□

Solution :

- Montrons que $A_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$

$A_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$:

- $0 \in A_n(\mathbb{R})$
- Soit $(A_1, A_2) \in A_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in A_n(\mathbb{R})^2$

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$$\left[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2\right]_{i,j} = \lambda_1 \left[A_1\right]_{i,j} + \lambda_2 \left[A_2\right]_{i,j}$$
$$= -\lambda_1 \left[A_1\right]_{j,i} - \lambda_2 \left[A_2\right]_{j,i}$$
$$= -\left[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2\right]_{j,i}$$

alors $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in A_n(\mathbb{R})$

Comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $A_n(\mathbb{R})$ l'est aussi

$$\boxed{A_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé dans } M_n(\mathbb{R})}$$

- Par l'absurde, supposons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est borné.

i.e $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \|A\| \leq M$

On pose $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : \begin{cases} [A]_{ii} = 0 \\ [A]_{ij} = -[A]_{ji} = M \end{cases}$$

$$\|A\|_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |[A]_{ij}| = (n^2-n)M \geqslant M$$

d'où la contradiction. (les normes sur E sont équivalentes)

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un compact}}$

Rayan. G
MPI*

Colle de la semaine n°10

Enoncé : $M_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme que l'on note N, et on donne une matrice A dont la suite des puissances $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.
On pose alors $B_p = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{p}$ pour $p \geq 1$

1. Montrer que (B_p) admet une valeur d'adhérence. On en choisit une notée B. Montrer que $BA = AB = A$ puis que $B^2 = B$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A - I_n)$ et que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$. Déduire de tout cela que $\lim_{p\to+\infty} B_p = B$.

Solution :

(A^p) est borné donc

$$\exists M > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad N(A^p) \leq M$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq N(B_p) = N\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{p}\right) \leq \sum_{k=0}^{p-1} N\left(\frac{A^k}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} N(A^k) \leq M$$

(Inégalité triangulaire) (Homogénéité)

Donc (B_p) est borné et $(B_p) \in B_f(0, M)^{\mathbb{N}}$

Or $B_f(0,M)$ est borné et fermé donc compact car $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie

Par définition d'un compact, (B_p) admet une valeur d'adhérence.

On en choisit une et on la note B.

Le produit matriciel est continu car bilinéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie.

Ainsi

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow \quad B_{\varphi(p)} \to B$$

Donc $\quad AB_{\varphi(p)} \to AB \quad$ et $\quad B_{\varphi(p)} A \to BA$

Or

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad AB_{\varphi(p)} = A \sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} \frac{A^k}{\varphi(p)} = \sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} \frac{A^k}{\varphi(p)} A = B_{\varphi(p)} A$$

Par unicité de la limite : $AB = BA$

De plus

$$AB_{\varphi(p)} = \sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} \frac{A^{k+1}}{\varphi(p)} = \sum_{k=1}^{\varphi(p)} \frac{A^k}{\varphi(p)} \quad \text{(Changement d'indice)}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} \frac{A^k}{\varphi(p)}}_{\Delta_3} - \underbrace{\frac{I_n}{T}}_{\Delta_1} + \underbrace{\frac{A^{\varphi(p)}}{T}}_{\Delta_2}$$

Les puissances de A étant bornées Δ_1 et Δ_2 tendent vers 0 et par définition Δ_3 tend vers B.

Or $AB_{\varphi(p)} \to AB$ donc par unicité de la limite $AB = B$

Établissons désormais que $B^2 = B$

$B_{\varphi(p)} B \to B^2$

et $B_{\varphi(p)} B = \sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} \frac{A^k B}{\varphi(p)}$

Or il est simple de montrer par récurrence que puisque $AB = B$ alors

$$\forall k \in [\![0, \varphi(p)-1]\!] \quad A^k B = B \qquad (\Delta)$$

Donc

$$B_{\varphi(p)} B = B$$

Par unicité de la limite $B = B^2$

Démontrons que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A - I_n)$ et $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$

Établissons d'abord $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$

$\boxed{C}$ Soit $Y \in \mathrm{Im}(B)$

$\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad Y = BX$

$$(A - I_n)Y = AY - Y = \underbrace{AB}_{=B}X - BX = 0$$

Donc $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$

Donc $AX = X$

De manière analogue à (Δ), on établit

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k X = X$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$B_{\varphi(p)} X = \sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} \frac{A^k X}{\varphi(p)} = X$$

Or $B_{\varphi(p)} X \to BX$ donc $X = BX \in \mathrm{Im}(B)$

Ainsi $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$

Il nous reste à démontrer que

$$\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A-I_n)$$

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in \mathrm{Im}(A-I_n)$

$$\exists Y \in M_{n1}(\mathbb{R}) \quad X = AY - Y$$

$$BX = \underbrace{BA}_{=B}Y - BY = 0$$

Donc $\mathrm{Im}(A-I_n) \subset \mathrm{Ker}(B)$

Or par le théorème du rang sur les matrices :

$$rg(A-I_n) + \dim(\mathrm{Ker}(A-I_n)) = n$$

et

$$rg(B) + \dim(\mathrm{Ker}(B)) = n$$

Puisque $\mathrm{Ker}(A-I_n) = \mathrm{Im}(B)$ ils ont même dimension ce qui nous livre que $rg(A-I_n) = \dim(\mathrm{Ker}(B))$

Par dimension et inclusion $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A-I_n)$

Désormais, nous devons démontrer que $B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} B$

Nous avons déjà établi que (B_p) est une suite bornée dans $\mathcal{B}f(0,M)$ compacte donc l'unicité de la valeur d'adhérence nous livrerait sa convergence vers B l'unique valeur d'adhérence

On se propose d'introduire B_1 et B_2 deux valeurs d'adhérence de (B_p)

Nous savons que $\mathrm{Ker}(B_1) = \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathrm{Ker}(B_2)$

et $\mathrm{Im}(B_1) = \mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Im}(B_2)$

De plus

$\mathrm{Ker}(B_1) \oplus \mathrm{Im}(B_1) = M_{n,1}(\mathbb{K})$ (De même pour B_2)

car

- Le théorème du rang livre l'égalité dimensionnelle
- $\mathrm{Ker}(B_1) \cap \mathrm{Im}(B_1) = \{0\}$

$\boxed{\supset}$ Clair

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathrm{Ker}(B_1) \cap \mathrm{Im}(B_1)$

$\exists Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad X = B_1 Y$

$0 = B_1 X = B_1^2 Y = B_1 Y = X$

Donc $\mathrm{Ker}(B_1) \cap \mathrm{Im}(B_1) = \{0\}$

On voudrait maintenant obtenir $\mathrm{Ker}(B_1 - B_2) = M_{n,1}(\mathbb{K})$

$\boxed{\subset}$ Clair

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

$\exists! (K, I) \in \mathrm{Ker}(B_1) \times \mathrm{Im}(B_1) \quad X = K + I$

$(B_1 - B_2)X = B_1 K - B_2 K + B_1 I - B_2 I = B_1 I - B_2 I$

$(\mathrm{Ker}(B_1) = \mathrm{Ker}(B_2))$

On introduit φ et ψ les extractrices de B_1 et B_2

$$B_{\varphi(p)} I - B_{\psi(p)} I \to B_1 I - B_2 I$$

Or

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\quad I \in \mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$

Donc $AI = I$

De manière plus générale
$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k I = I$

Donc $B_{\varphi(p)} I = I$

De même $B_{\psi(p)} I = I$

Ainsi la différence est nulle et par unicité de la limite

$$B_1 I - B_2 I = 0$$

Ainsi

$X \in \mathrm{Ker}(B_1 - B_2)$

On en déduit que $B_1 = B_2$ (I_n étant dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$)

Ainsi (B_p) converge et $B_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} B$

Uta. BDN

Rapport de colle semaine n° 40

Énoncé :

Soit Ω un ouvert et K un compact contenu dans Ω.

Mq $\exists r>0 \quad \forall x \in K \quad B(x,r) \subset \Omega$

Solution :

Par l'absurde, on suppose : $\forall r>0 \quad \exists x \in K \quad B(x,r) \not\subset \Omega$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in K$ tq $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \Omega$.

Alors $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$, donc

$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow \quad \exists x \in K$ tq $x_{\varphi(n)} \to x$

Comme $x \in K \subset \Omega$, $\exists r_x > 0$ tq $B(x, r_x) \subset \Omega$.

- $x_{\varphi(n)} \to x$ donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N_1 \quad \| x_{\varphi(n)} - x \| < \frac{r_x}{2}$
- $\frac{1}{\varphi(n)} \to 0$ donc $\exists N_2 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N_2 \quad 0 < \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{r_x}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $n \geq \max(N_1, N_2)$

Soit $y \in B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)})$

alors $$\| y - x \| \leq \underbrace{\| y - x_{\varphi(n)} \|}_{< \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{r_x}{2}} + \underbrace{\| x_{\varphi(n)} - x \|}_{< \frac{r_x}{2}} < r_x$$

donc $y \in B(x, r_x)$

Ceci étant vrai pour tout $y \in B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)})$ on obtient :

$$B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(x, r_x) \subset \Omega$$

$$\not\subset \Omega \quad \text{↯}$$

Martin Kimber-Liber. Rapport de colle, semaine 10.

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ contenu dans la boule unité ouverte. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que $K \subset B(0,r)$.

Par l'absurde, supposons

$$\forall r < 1, \ \exists x \in K, \ \|x\| \geq r$$

i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in K, \|x_n\| \geq 1 - \frac{1}{n}$.

Or $K \subset B(0,1)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x_n\| < 1$.

Par théorème d'encadrement, $\|x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
Or K est un compact, donc il existe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante et $l \in K$ tel que

$$\|x_{\varphi(n)} - l\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On sait $\|x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. Or par l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|x_{\varphi(n)} - l\| \geq |\|x_{\varphi(n)}\| - \|l\||$$

Par passage à la limite : $0 \leq |1 - \|l\|| \leq 0$, donc $\|l\| = 1$; or $l \in K \subset B(0,1)$. Cela est absurde ; on conclut donc.

MATHEO. N

Rapport de Colle semaine 10.

Exercice 105. Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose que A a la propriété suivante : pour tous $x, y \in A$, il existe une boule ouverte contenue dans A, et contenant les deux points x et y. Montrer que A est une boule ouverte.

On pose $\|\cdot\|$ norme sur E

Posons : $I = \{ r \in \mathbb{R}_{>0} : \exists x \in A : B(x,r) \subset A \}$ où $A \neq \emptyset$

- $I \neq \emptyset$ car par propriété de A pour $x \in A$, il existe : $(a,r) \in A \times \mathbb{R}_{>0}$ tels que $x \in B(a,r) \subset A$. d'où $r \in I$.
  de plus comme $x \in B(a,r)$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que
  $x \in B(x,\varepsilon) \subset B(a,r) \subset A$, donc A est ouvert.
  De plus A étant bornée, il existe $M > 0$ tel que
  $A \subset B(0,M)$, ainsi, I est majorée.
  Nous avons I partie de $\mathbb{R}_{>0}$ non vide et majorée, donc
  $\sup I$ existe et $R = \sup I \in \mathbb{R}_{>0}$. [PBS]

- Pour tout $n \geq 2$ $R - \frac{R}{n}$ ne majore pas I donc il existe $r_n > R - \frac{R}{n}$ avec $r_n < R$ et $x_n \in A$ tels que
  $B(x_n, r_n) \subset A$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $x_n \in A \subset \overline{A} \subset B_f(0,M)$: $\overline{A}$ fermée et bornée de E evn de dimension finie donc compact.
Ainsi : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗ et $l \in \overline{A}$ tel que :

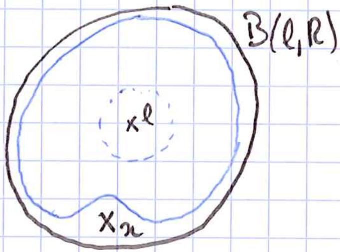
$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

On a aussi : $R - \frac{R}{n} \underset{[\varphi(n) \geq n]}{\leq} R - \frac{R}{\varphi(n)} < r_{\varphi(n)} < R$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $r_{\varphi(n)} \longrightarrow R$.

Montrons que $A = B(l, R)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in B(l, R)$ supposons que $x \notin A$



On pose $\varepsilon = R - \|x - l\| > 0$ (*)

Comme $x_{\varphi(n)} \longrightarrow l$

et $r_{\varphi(n)} \longrightarrow R$.

$\exists N_1 \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \forall n \geq N_1 \quad \| l - x_{\varphi(n)} \| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (**)

ie $x_{\varphi(n)} \in B\left(l, \frac{\varepsilon}{3}\right)$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \forall n \geq N_2 \quad | R - r_{\varphi(n)} | \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (***)

En posant : $N = \max\{N_1, N_2\}$ on a pour $n \geq N$:

$r_{\varphi(n)} \geq R - \frac{\varepsilon}{3}$ et $x_{\varphi(n)} \in B\left(l, \frac{\varepsilon}{3}\right)$

avec : $B(x_{\varphi(n)}, r_{\varphi(n)}) \subset A$.

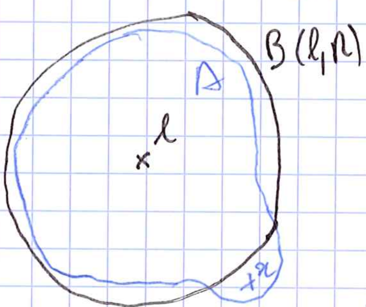
(*)

Montrons que $x \in B(x_{\varphi(n)}, r_{\varphi(n)})$

$$\begin{aligned} \|x - x_{\varphi(n)}\| &\leq \|x - l\| + \|l - x_{\varphi(n)}\| \quad \text{[inégalité triangulaire]} \\ &\leq \underbrace{R - \varepsilon}_{(*)} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(**)} \\ &= R - \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\leq r_{\varphi(n)} \end{aligned}$$

Ainsi : $x \in B(x_{\varphi(n)}, r_{\varphi(n)}) \subset A$ d'où $B(l, R) \subset A$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A$ supposons que $x \notin B(l, R)$



On suppose que $0 < \underbrace{\|l - x\| - R}_{\varepsilon} < R$

De manière analogue à (*) nous posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ et en tirant pour $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$:

$B(x_{\varphi(n)}, r_{\varphi(n)}) \subset A$.

MATHEO.N.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$.

Posons $y = \frac{x_{\varphi(n)} - x}{\|x_{\varphi(n)} - x\|} \times \left(r_{\varphi(n)} - \frac{\varepsilon}{3} \right) + x_{\varphi(n)}$

avec : $\|y - x_{\varphi(n)}\| = r_{\varphi(n)} - \frac{\varepsilon}{3} < r_{\varphi(n)}$ d'où $y \in B(x_{\varphi(n)}, r_{\varphi(n)}) \subset A$

[homogénéité de $\|\cdot\|$]

de plus : $\|y - x\| = \|x_{\varphi(n)} - x\| \left(\frac{r_{\varphi(n)} - \frac{\varepsilon}{3}}{\|x_{\varphi(n)} - x\|} + 1 \right)$

$$= r_{\varphi(n)} - \frac{\varepsilon}{3} + \|x_{\varphi(n)} - x\|$$

$(\|x-\ell\| > \|x_{\varphi(n)} - \ell\| + \Delta\varepsilon)$ $$> \underset{(***)}{R - \frac{\varepsilon}{3}} - \frac{\varepsilon}{3} + \|x - \ell\| - \|x_{\varphi(n)} - \ell\|$$

$\underline{\|x-\ell\| \geq \varepsilon + R}$ $$> R - \frac{\varepsilon}{6} + \underline{R + \varepsilon} - \underset{(**)}{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$= 2R + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or, x et y appartiennent à A, il existe dans ce cas $(x', r') \in A \times \mathbb{R}_{>0}$ telsque $(x, y) \in B(x', r')^2$ où $B(x', r') \subset A$ donc $r' \in I$.

Or la plus petite boule contenant x et y doit avoir un rayon au moins supérieur à $\frac{\|x-y\|}{2}$

d'où : $r' > \frac{2R + \frac{\varepsilon}{2}}{2} = R + \frac{\varepsilon}{4} > R$

Comme $r' \in I$, cela contredit le caractère majorant de R. Ainsi $x \in B(\ell, R)$ et alors :

$$A = B(\ell, R).$$

Donc $\boxed{A \text{ est bien une boule ouverte}}$.

Tigrin, David Colle de la semaine 10

Exercice 1 :

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $(A^p)_{p\geq 0}$ converge alors sa limite est la matrice nulle.

1) $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$. Comme $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension fini alors $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées

2) Supposons $\exists M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M$ pour une norme quelconque. Comme $A_n(\mathbb{R})$ fermée alors $M \in A_n(\mathbb{R})$.

Premièrement $\forall p \in \mathbb{N}$ $(A^{2p})^T = (A^T)^{2p} = (-1)^{2p} A^{2p} = A^{2p} \to M$

Puis $(A^{2p+1})^T = (-1)^{2p+1} (A^{2p+1})$

$= -A^{2p+1} \to -M$

Or par unicité de la limite:

$B = B^T = -B$

Ainsi la matrice B appartient à $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ qui sont supplémentaires en $M_n(\mathbb{R})$ d'où

$B = 0$

Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, dont on note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base. On pose : $\forall f \in \mathrm{L}(E)$, $\|f\| = \sum_{i=1}^{p} \|f(\vec{e}_i)\|_E$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathrm{L}(E)$.
2. Montrer que si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs dans $\mathrm{L}(E)$, alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si, pour tout $\vec{x} \in E$, la suite $(f_n(\vec{x}))_{n\geqslant 0}$ converge.

Solution :

① • Homogénéité : Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E)$.

$$\|\lambda f\| = \sum_{i=1}^{p} \|\lambda f(e_i)\|_E = \sum_{i=1}^{p} |\lambda| \, \|f(e_i)\|_E = |\lambda| \, \|f\| \quad [\|.\|_E \text{ norme}]$$

Ainsi $\boxed{\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|}$

• Inégalité triangulaire : Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

$$\|f+g\| = \sum_{i=1}^{p} \|f+g(e_i)\|_E \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|_E + \sum_{i=1}^{p} \|g(e_i)\|_E$$

Car f et g sont des endomorphismes de E et $\|.\|_E$ norme sur E.

Ainsi $\boxed{\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|}$

• Séparation : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|f\| = 0$

Premièrement, $\|f\| = 0$ donc $\sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|_E = 0$

$\|.\|$ étant une norme, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi l'on en déduit que

$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \|f(e_i)\|_E = 0$.

Or, un endomorphisme est entièrement caractérisé par son action sur une base.

Ainsi, il vient $\boxed{f = 0}$

② Raisonnons par doubles implications

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathcal{L}(E)$. Comme $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, alors la suite $(f_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit $x \in E$. Exprimons x dans $\underline{e}$:

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Comme f_n est linéaire $\quad f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_n(e_i)$

Or, comme $(f_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors chaque terme de la somme converge, et donc cela entraîne que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.

Ce résultat ayant été établi pour un $x \in E$ quelconque, il est vrai pour tout $x \in E$ et ainsi : $\boxed{\forall x \in E \quad (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } E}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall x \in E \quad (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $i \in [\![1;p]\!]$. De même que pour le sens réciproque, puisque <u>f_n est linéaire</u> et que $\forall x \in E \; (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on en déduis que $(f_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Or $\quad \exists! (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i$

$$\text{Donc } \; f_n(x) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i f(e_i)$$

Ainsi pour chaque composante μ_i, la suite $(\mu_i f_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Cette propriété étant vraie pour n'importe quel $x \in E$ il vient alors que

$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathcal{L}(E)}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}} \text{ converge} \iff \forall x \in E \quad (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

REUTER 24/11/23
Robin
MPI

Rapport de Colle - 10

Exercice 4 :
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$.
Pour φ une fonction de $E \setminus \{\tilde{0}\}$, on considère la forme linéaire T_φ sur E définie par :

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } f \in E$$

Montrer que la forme linéaire T_φ est $\underbrace{\text{continue}}_{1)}$ et $\underbrace{\text{calculer sa norme subordonnée}}_{2)}$.

---

1) • $T\varphi$ est bien une forme linéaire.
(Par distributivité dans $\mathbb{R}$ et linéarité de l'intégrale)

• Soit $f \in E$.

$$|T\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt \right|$$
$$\leqslant \int_0^1 |f(t)|\,|\varphi(t)|\,dt$$
$$\leqslant ||f||_\infty \underbrace{\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt}_{\text{constante}}$$

Donc $T\varphi$ est continue.

2) On a $|||T\varphi||| \leqslant \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$

Montrons l'égalité.
Montrons d'abord le cas où :
$\forall t \in [0;1]$, $\varphi(t) \neq 0$.

On a donc $f \left| \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} \end{array} \right.$ bien définie.

De plus f est continue comme produit de fonctions continues

Donc $f \in E$.

$$\left|\frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}\right| = 1 \text{ pour tout } t \in [0;1]$$

Donc $\|f\|_\infty = 1$ et $f \in \overline{B}_\infty(0,1)$.

$$T\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(t)\frac{|\varphi(t)|}{\varphi(t)}\,dt = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$$

- Montrons maintenant le cas où φ peut s'annuler sur $[0;1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $f_n \left| \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}} \end{array}\right.$ bien définie et continue.

$\forall t \in [0;1]$

$$\left|\frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}\right| \leq 1$$

Donc $\|f_n\| \leq 1$ et $f_n \in \overline{B}_\infty(0;1)$

$$\left| \int_0^1 \frac{\varphi^2(t)}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}} - |\varphi(t)|\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \frac{1}{n}\frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}\,dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\int_0^1 \left|\frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}\right| dt$$

$$\leq \frac{1}{n}\int_0^1 dt = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $T\varphi(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$

Puisque $\overline{B}_\infty(0;1)$ est un fermé, la lim de la suite est dans l'ensemble et $|||T\varphi||| = \int_0^1 |\varphi(t)|dt$

Colle de la semaine 10

Adam M.

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_n[x]^{\mathbb{N}}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{k\to+\infty} P_k(x)$ existe

On pose $Q : x \mapsto \lim\limits_{k\to+\infty} P_k(x)$

Mq Q est polynomiale

Solution : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n}$ 2 à 2 $\neq$

On pose $N_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ P \longmapsto \sup\limits_{x\in[a,b]} |P(x)| \end{array}\right.$ $\quad N_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ P \longmapsto \max\limits_{i\in[\![0,n]\!]} |P(\alpha_i)| \end{array}\right.$

* Mq N_1 norme sur $\mathbb{R}_n[x]$:
  * Soit $P\in\mathbb{R}_n[x]$ tel que $N_1(P)=0$. Soit $x\in[a,b]$

    $0 \leq |P(x)| \leq N_1(P) = 0$ donc $P(x)=0$

    P possède une infinité de solution donc $P=0$
  * Soit $P\in\mathbb{R}_n[x]$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in[a,b]$ $\quad$ si $\lambda=0$ ✓

    $|\lambda P(x)| = |\lambda|\,|P(x)| \leq \overline{|\lambda|\, N_1(P)}$ indépendant de x

    Par passage au sup : $N_1(\lambda P) \leq |\lambda|\, N_1(P)$

    $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$, $P \leftarrow \lambda P$: $|\lambda| N_1(P) \leq N_1(\lambda P)$
  * $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[x]$, $x\in[a,b]$ $\quad$ indépendant de x

    $0 \leq |P(x)+Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \overline{N_1(P)+N_1(Q)}$

    Par passage au sup $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$
* Mq N_2 norme sur $\mathbb{R}_n[x]$:
  * Soit $P\in\mathbb{R}_n[x]$ tel que $N_2(P)=0$

    $\forall$ $\quad 0 \leq |P(\alpha_i)| \leq N_2(P) = 0$ donc $P(\alpha_i)=0$

    P possède $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ $n+1$ racines distinctes or $\deg(P)\leq n$

    Donc $P=0$
  * De même que pour N_1 on montre l'homogénéité et l'inégalité triangulaire

$\forall i \in [\![0,n]\!]$ On pose $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \in \mathbb{R}_n[X]$

et $R = \sum_{i=0}^{n} Q(\alpha_i) L_i \in \mathbb{R}_n[X]$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$\exists i_{0,k} \in [\![0,n]\!]$ $N_2(P_k - R) = |P_k(\alpha_{i_{0,k}}) - R(\alpha_{i_{0,k}})|$

or $R(\alpha_{i_{0,k}}) = Q(\alpha_{i_{0,k}}) = \lim_{k\to+\infty} P_k(\alpha_{i_{0,k}})$

Donc $N_2(P_k - R) = |P_k(\alpha_{i_{0,k}}) - \lim_{k\to+\infty} P_k(\alpha_{i_{0,k}})| \longrightarrow 0$

Donc $P_k \xrightarrow{N_2} R$

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, N_1 est N_2 sont équivalentes

Donc $P_k \xrightarrow{N_1} R$

$\forall x \in [a,b]$ $0 \leq |P_k(x) - R(x)| \leq \underbrace{N_1(P_k - R)}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$

par théorème d'encadrement

$\forall x \in [a,b]$ $Q(x) = \lim_{k\to+\infty} P_k(x) = R(x)$

Or comme les fonctions polynomiales sont continues et que

et que $\bigcup_{a<b \text{ réels}} [a,b]$ est dense dans $\mathbb{R}$

On a $Q = R$, donc Q est polynomiale

Amaë D.

Rapport de colle S10

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie fermée et bornée de E, et $f : A \longrightarrow A$ une application vérifiant :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in A^2 \quad \vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Montrer que l'application $\vec{x} \longmapsto \|\vec{x} - f(\vec{x})\|$ admet un minimum sur A

Solution : Comme A est une partie fermée et bornée d'un espace de dimension finie, A est compacte.

Montrons que l'application $\vec{x} \longmapsto \|\vec{x} - f(\vec{x})\|$ est continue

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in A^2$ tels que $\vec{x} \neq \vec{y}$

$$\|\vec{x} - f(\vec{x}) - \vec{y} + f(\vec{y})\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \underbrace{\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|}_{< \|\vec{x} - \vec{y}\| \text{ (définition)}} \quad \text{(inégalité triangulaire de } \|\ \|)$$

$$\leq 2\|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Donc l'application est 2-lipschitzienne

On en déduit que l'application $\vec{x} \longmapsto \|\vec{x} - f(\vec{x})\|$ est continue

Par le théorème des bornes atteintes, il vient

$$\exists (\vec{x_m}, \vec{x_M}) \in A^2 \quad \forall \vec{x} \in A \quad f(\vec{x_m}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x_M})$$

Donc l'application admet un minimum sur A.

Alexandre M.

Colle semaine 10

Enoncé :

Exercice. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et f une application linéaire telle que : $\forall \vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$.

1. Montrer : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \vec{x} \in E$, $f_n(\vec{x}) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(\vec{x})$.

Résolution:

1) Comme E est de dimension finie, le théorème du rang livre :

$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E))$

or $\ker(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ est un sev de E.

Par cardinalité dimension il suffit donc de prouver le caractère direct de la somme pour conclure.

Par l'absurde supposons $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$

$\exists y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \quad y \neq 0$.

Ainsi : $\exists x \in E \quad y = f(x) - x$ et $f(y) = y$.

[par def de Im et ker]

On a ainsi

$y = f(x) - x$

$y = f(y) = f^2(x) - f(x)$ [f lin]

$y = f^3(x) - f^2(x)$

$\vdots$

On établit donc par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$y = f^{n+1}(x) - f^{n}(x)$

(I)$_{n=0}$ clair

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $y = f^{n+1}(x) - f^{n}(x)$ on a donc

$$f(y) = y = f^{n+2}(x) - f^{n+1}(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$y = f(x) - x$$
$$y = f^{2}(x) - f(x)$$
$$\vdots$$
$$y = f^{n+1}(x) - f^{n}(x)$$

ainsi en sommant terme à terme les égalités on obtient

$$n \cdot y = f^{n+1}(x) - x$$

donc $y = \frac{1}{n}\left(f^{n+1}(x) - x\right)$

De plus (*) $\|f^{n+1}(x)\| \leq \|f^{n}(x)\| \leq \cdots \leq \|x\|$ (énoncé)

donc $\|y\| = \frac{1}{n}\|f^{n+1}(x) - x\|$ [homogénéité]

$$\leq \frac{1}{n}\|f^{n+1}(x)\| + \|x\|$$ [inégalité triangulaire]

donc $0 < \|y\| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \times 2\|x\|}_{\downarrow n \to +\infty \atop 0}$ (*)

Par théorème d'encadrement $\|y\| = 0$ $\mathcal{E}$

Alexandre M.

2)

Soit $x \in E$. D'après q1

$\exists (a,b) \in \ker(f - Id_E) \times Im(f - Id_E) \quad x = a+b$

$\exists \omega \in E \quad b = f(\omega) - \omega$

De manière analogue à q1 :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = a + f^{n+1}(\omega) - f^n(\omega)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

donc $\sum_{k=0}^{n} f^k(x) = (n+1) \cdot a + f^{n+1}(\omega) - \omega$

et donc $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(x) = a + \frac{f^{n+1}(\omega) - \omega}{n+1}$

d'où $0 \leqslant \| \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(x)}_{f_n(x)} - a \| = \frac{\| f^{n+1}(\omega) - \omega \|}{n+1} \leqslant \frac{2\|\omega\|}{n+1} \to 0$

On conclut une nouvelle fois par théorème d'encadrement que $f_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} a$

i.e la limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est la projection de x sur $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $Im(f - Id_E)$

On en déduit donc la convergence de la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ en utilisant par exemple la norme $\|f_n\| = \sum_{i=1}^{p} \|f_n(\vec{e_i})\|_E$, où $(e_1, \dots, e_p)$ base de E $n \in \mathbb{N}$ fixé

par caractérisation de la convergence dans un espace de dim finie

Louis B.   Colle de la semaine 10

On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées.
On note F l'espace vectoriel de suites réelles dont la série associée est absolument convergente.
$\forall (u, v) \in E \times F$, on note

$$N_E(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N_F(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$$

1) Démontrer que N_F est une norme sur F
2) $\forall v \in F$, Montrer que la forme linéaire sur E $T_v : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est bien définie et que T_v est lipschitzienne.

1) Montrons que N_F est une norme sur F

- Séparation : Soit $v \in F$ tq $N_F(v) = 0$
  alors $\forall n \in \mathbb{N}$
  $$0 \leq |v_n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k| = N_F(v) = 0$$
  Donc $v_n = 0$ et $v = 0$.

- Homogénéité : Soit $(v, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$
  - si $\lambda = 0$ alors $N_F(\lambda v) = |\lambda| N_F(v) = 0$
  - si $\lambda \neq 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$
  $$0 \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda v_k| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda| |v_k|$$
  $$= |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |v_n|$$

  Par passage à la limite : $N_1(\lambda v) = |\lambda| N_1(v)$

- Inégalité triangulaire : Soit $(v_1, v_2) \in F^2$
$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k + v_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| + \sum_{k=0}^{n} |v_k|$$

Par passage à la limite : $N_1(u+v) \leq N_1(u) + N_1(v)$

2) Soit $v \in F$.

- Soit $u \in E$

Alors $0 \leq \sum_{n\geq 0} |u_n v_n| \leq \sum_{n \geq 0} N_F(u) |v_n| = \overbrace{N_F(u)}^{\text{CST}} \underbrace{\sum_{n\geq 0} |v_n|}_{\text{CV dc } \in \mathbb{R}}$

Donc $(u_n v_n)$ est absolument convergente

et donc elle est convergente.
Ainsi, T_v est bien définie

- Soit $(u_1, u_2) \in E^2$

$$\begin{aligned} |T_v(u_1) - T_v(u_2)| &\leq |T_v(u_1 - u_2)| \leq \left|\sum_{n\geq 0} v_n (u_{1n} - u_{2n})\right| \\ &\leq \sum_{n\geq 0} |v_n| |u_{1n} - u_{2n}| \\ &\leq \sum_{n\geq 0} |v_n| \, N_E(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

Comme (v_n) est absolument convergente,
$\sum_{n\geq 0} |v_n| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ donc T_v est lipschitzienne.

Célia A.

Semaine n°10

Colle n°7

Soit (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés.

Soit f ∈ F^E vérifiant :

- $\forall (x,y) \in E^2 \ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- La restriction de f à la boule unité de E est bornée.

Montrons que f est linéaire.

1. Montrons que $f(0_E) = 0_F$.

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$$

Donc $f(0_E) = 0_F$.

2. Montrons que $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times E \ \ f(nx) = nf(x)$

On raisonne par récurrence.

Définition du prédicat : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = \text{"}\forall x \in E \ f(nx) = nf(x)\text{"}$

Initialisation à n = 0 : Selon 1, P(0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que P(n) est vraie.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} f\big((n+1)x\big) &= f(nx+x) \\ &= f(nx) + f(x) \text{ (Propriété de f)} \\ &= nf(x) + f(x) \text{ (Hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

P(n+1) est donc vraie.

Conclusion : Par l'initialisation, le caractère héréditaire de la propriété et l'axiome de récurrence, P(n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Montrons que $\forall (n,x) \in \mathbb{Z} \times E \ f(nx) = nf(x)$.

Soit $(n,x) \in \mathbb{Z} \times E$.

Si $n \geq 0$, le résultat est donné par 2.

Si $n < 1$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et 2 livre $f(-nx) = -nf(x)$.

Or, selon 1, $0_F = f(0_E) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx) = f(nx) - nf(x)$

D'où $f(nx) = nf(x)$.

4. Montrons que $\forall\,(n,x) \in \mathbb{N}^* \times E\ \ f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$

Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times E$.

$$f(x) = f\left(n \times \frac{x}{n}\right)$$

$$= n\,f\left(\frac{1}{n} \times x\right) \text{ (selon 2)}$$

Donc $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x)$.

5. Montrons que $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{Q} \times E\ \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\exists(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\ \ \lambda = \frac{p}{q}$. Soit $x \in E$.

$$pf(x) = f(px) \text{ (selon 3)}$$

$$= f\left(q \times \frac{p}{q}\right)$$

$$= f(q\lambda)$$

$$= qf(\lambda) \text{ (selon 2)}$$

D'où $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

6. Montrons que f est continue en 0_E.

Comme la restriction de f à la boule unité de E est bornée, nous avons

$$\exists M \geq 0\ \ \forall x \in E\ \ ||x|| \leq 1 \Rightarrow ||f(x)|| \leq M$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in E$ tel que $||x|| \leq \frac{1}{p} \leq 1$. Par homogénéité de la norme N_1, $||px|| \leq 1$. D'où $||f(xp)|| \leq M$.

Selon 2 et l'homogénéité de la norme N_2, nous avons $||f(x)|| \leq \frac{M}{p}$.

Ainsi, f est continue en 0_E.

7. Montrons que f est continue sur E.

Soit $(y,z) \in E^2$.

De 6, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma > 0\ \ \forall x \in E\ \ ||x|| \leq \gamma \Rightarrow ||f(x)|| \leq \varepsilon$$

En spécifiant à x = y – z, et comme selon 3, $f(y-z) = f(y) - f(z)$, nous obtenons la continuité sur E.

8. Montrons que f est linéaire.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et f est continue, on prolonge l'identité obtenue en 5 sur $\mathbb{R}$.

Paul C. Colle de la semaine 10

Enoncé

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles de format $n \times n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Est-ce un compact ?

Solution

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n^2
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On montre maintenant que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact, i.e, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ non borné, ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie ~~don~~ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ fermé)

Par l'absurde, supposons $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ borné, $\exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty \leq M$.

considérons $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ A_k = k\,(E_{1,n} - E_{n,1}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & k \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ -k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

on remarque alors, $\forall k \in \mathbb{N}, \ \|A_k\|_\infty = k$

Par hypothèse, comme $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ M \geq k = \|A_k\|_\infty, \ \cancel{i.e.}$$

par passage à la limite quand $k \to +\infty$: $+\infty \leq M$ ce qui n'est pas car $M \in \mathbb{R}$.

d'où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ non borné, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact.

Lina . A. Colle de la semaine 10.

Énoncé

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie.
$A \subset E$ non vide et bornée.
Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A.

Solution:

Posons

$$D_x = \{r > 0 : \exists x \in E, \ A \subset B_f(x, r)\}.$$

Cet ensemble est non vide et minoré, car A est bornée.
D'après la propriété de la borne inférieure.

$$\varrho = \inf D_x \text{ existe}.$$

Comme $\varrho + \frac{1}{n}$ ne minore pas D_x il vient que

$$\forall n \geq 1 \quad \exists x_n \in E, \quad A \subset B(x_n, \tfrac{1}{n} + \varrho).$$

Montrons que (x_n) est bornée.

Soit $a \in A \subset B(x_n, \frac{1}{n} + \varrho)$

$$\|x_n - a\| \leq \varrho + \frac{1}{n} < \varrho + 1$$

Donc

$$\forall n \geq 1 \qquad x_n \in B_f(a, \varrho + 1)$$

Donc (x_n) est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass

$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante

$\exists x \in E$.

$$x_{\varphi(n)} \longrightarrow x.$$

Par passage à la limite et par continuité de la norme (car 1-lipschitzienne), on livre

$$\|x - a\| \leq \varrho$$

Donc pour tout $a \in A$ $\quad a \in B_f(x, \varrho)$

D'où $\boxed{A \subset B_f(x, \varrho)}$, ce qui livre le résultat voulu.

Titouan
D

Exercice 1 :
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\Gamma_f = \{(x, f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

son graphe.

1. On suppose que f continue, montrer que Γ_f est fermé.
2. On suppose f bornée et Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$, montrer que f est continue.
3. Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

On introduit $|.|$ comme norme sur $\mathbb{R}$

1) Soit $((x_n, f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_f^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers (x, y)

Par continuité de f, $f(a) \underset{a\to x}{\longrightarrow} f(x)$

De $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$

Par unicité de la limite, $((x_n, f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, f(x)) \in \Gamma_f$

Donc $\boxed{\Gamma_f \text{ est fermé}}$

2) f bornée $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq M$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \in [-M; M]$ compact de $\mathbb{R}$ car c'est un intervalle

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$

$f(x_n) \in [-M; M]^{\mathbb{N}}$ compact de $\mathbb{R}$ donc
$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$f(x_{\varphi(n)})$ converge

donc $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$ converge et par Γ_f fermé on a

$f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

De Γ_f fermé et (x_n) convergente on déduit $f(x_n)$ convergente
soit $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{f \text{ continue}}$

3) $\boxed{\text{On ne peut plus le demontrer car la compacité n'est plus garantie.}}$

Youssef. B

Colle de la semaine 10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f

1) Montrer que f continue $\Rightarrow$ Γ est fermé

2) Montrer que f bornée et Γ fermée $\Rightarrow$ f est continue

3) Montrer que Γ est fermé n'implique pas que f est continue

Solution :

1) supposons que f est continue. Montrons que Γ est fermé

soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$

$(x_n, y_n) \in \Gamma$ donc $y_n = f(x_n)$

$x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$, donc par continuité de f

$y_n = f(x_n) \longrightarrow f(x)$ et par unicité de limite : $y = f(x)$

$(x, y) \in \Gamma$ donc Γ est fermé

2) supposons que f est bornée et Γ est fermée.

soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \longrightarrow a$

soit $(y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $y_n = f(x_n)$

On considère une valeur d'adhérence de (y_n), donc

$\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow$ $y_{\varphi(n)} \longrightarrow b$

Alors $\underbrace{(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})}_{\in\Gamma^{\mathbb{N}}} \longrightarrow (a, b) \in \Gamma$ donc $b = f(a)$ (car Γ fermé)

(y_n) a une unique valeur d'adhérence

f est compacte (car f bornée et on a une dimension finie)

Donc $y_n \longrightarrow b$

Donc f est continue. ($f(x_n) \longrightarrow f(a)$)

3) On donne un contre-exemple :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$\Gamma = \{(x,y) : xy = 1\} \cup \{(0,0)\}$ est fermé par union de fermés

Mais f n'est pas continue

Rapport de colle, semaine n° 10

Wassim
M.

Exercice :
On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$
Pour tout élément $f \in E$, on note $P(f)$ la primitive de f nulle en 0, ce qui définit un endomorphisme de E
1) Montrer que P est lipschitzien
2) Calculer $|||P|||$

Solution :

1) on sait que $\|P\|_\infty = \sup_{f \in E} \left| \int_0^x f(t)\,dt \right|$

Soit $x \in [0,1]$

on a $\left| \int_0^x f(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\,dt$

or $\int_0^x |f(t)|\,dt = \underset{\geqslant 0}{x}\, |f(x)|$

donc $\int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant x \|f\|_\infty$

Ainsi par passage au sup pour $x \in [0,1]$ on obtient

$\|P\|_\infty \leqslant x \|f\|_\infty$

$\boxed{f \text{ est continue donc lipschitzienne.}}$

2) D'après 1), on a $|||P||| \leq x$ où $x \in [0,1]$

donc $|||P||| \leq 1$

De plus en posant ~~pour tou~~ $f(x) = 1$ $(x \in [0,1])$

$P(f)(x) = |x|$ et $\boxed{|||P||| = 1}$

Oudoine Galien   Semaine 9

Exercice 5 :
On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $||.||_\infty$ où $||P||_\infty = \max_i |[P]_i|$.
Pour $c \in \mathbb{R}$, on considère la forme linéaire ϕ_c définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\phi_c(P) = P(c)$.
Pour quelles valeurs de c, la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? En cas de continuité, calculer sa norme subordonnée.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$|\phi_c(P)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k c^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| . |c|^k$$

$$\leq ||P||_\infty \sum_{k=0}^{n} |c|^k$$

$$\leq \cancel{\sum_{k=0}^{n}} \frac{1-|c|^{n+1}}{1-|c|} . ||P||_\infty$$

<u>Si $|c| < 1$:</u>

$$|\phi_c(P)| \leq \frac{1-|c|^{n+1}}{1-|c|} ||P||_\infty \leq \frac{1}{1-|c|} . ||P||_\infty$$

donc ϕ_c est continue

<u>Si $c \geq 0$</u>

En prenant $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ on a $\phi_c(P) = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}$

donc $|\phi_c(P)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-c}$

donc $|||\phi_c||| = \frac{1}{1-c}$

<u>Si $c < 0$</u>

En prenant $P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$

on obtient à nouveau $|||\phi_c||| = \frac{1}{1-c}$

Si $|c| \geq 1$

En prenant les polynomes du cas précédent on a :

$$|\phi_c(P)| = \left|\frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \quad \text{avec} \quad \|P\|_\infty = 1$$

donc ϕ_c n'est pas bornée

donc ϕ_c n'est pas continue

Sophie G

Semaine de colle n° 10

Exercice 4. Pour tout polynôme P réel, écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad N_\infty(P) = \max\{|a_n| \; ; \; n \in \mathbb{N}\}, \quad \|P\|_\infty = \max\{|P(t)| \; ; \; t \in [0,1]\}, \quad f(P) = P(0).$$

Étudier la continuité de f pour ces différentes normes.

Solution

- Montrons f linéaire

Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}^2$

$f(\lambda P + \varphi Q) = (\lambda P + \varphi Q)(0) = \lambda \underbrace{P(0)}_{f(P)} + \varphi \underbrace{Q(0)}_{f(Q)}$

Donc f linéaire

Pour N_1

$|f(P)| = |a_0| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = N_1(P)$

donc f 1-lip sur $(\mathbb{R}[X], N_1)$ donc

f continue sur $\mathbb{R}[X]$

Pour N_∞

$|f(P)| = |a_0| \leq \max\{|a_n| \; ; \; n \in \mathbb{N}\} = N_\infty$ ($|a_0| \in$)

donc f continue sur $\mathbb{R}[X]$

Pour $\|\cdot\|_\infty$

$|f(P)| = |P(0)| \leq \max\{|P(t)| \; ; \; t \in [0,1]\} = \|P\|_\infty$ ($|P(0)| \in$)

donc f continue sur $\mathbb{R}[X]$

Remarque

$$\left.\begin{array}{l} |||f||| \leq 1 \\ \text{Pour } P = 2 \; : \; \dfrac{|f(P)|}{N_1(P)} = 1 \leq |||f||| \end{array}\right\} \Rightarrow |||f||| = 1$$

de même pour N_∞ et $\|\cdot\|_\infty$ avec $P = 2$

$|||f||| = 1$.

Enoncé : $E = \{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : u$ a un nombre fini de terme non nuls $\}$

$\varphi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ (u_n) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{array} \right.$. Pour $u \in E$ on pose $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

On admet que $\|\cdot\|_1$ est une norme. Montrer que φ est continue pour $\|\cdot\|_1$ et calculer sa norme subordonnée

Solution

Soit $(u_n) \in E$, $|\cdot|$ est une norme pour $\mathbb{C}$, toutes les normes de $\mathbb{C}$ sont équivalentes car $\mathbb{C}$ dim $<\infty$

$\varphi((u_n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{2^k}$ donc $\underbrace{|\varphi((u_n))|}_{= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{2^k} \right|} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{u_k}{2^k} \right|$ (inégalité triangulaire de $|\cdot|$)

or $\forall k \in \mathbb{N}$ $\frac{|u_k|}{2^k} \leqslant |u_k|$ donc $|\varphi((u_n))| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = \|(u_n)\|_1$ (*)

donc $\boxed{\varphi \text{ est continue pour } \|\cdot\|_1}$

(*) Soit $u \in E$ tel que $\|u\|_1 \leqslant 1$

d'après (*) $|\varphi(u)| \leqslant \|u\|_1 \leqslant 1$ (1)

or $v = (1, 0, 0, \ldots) \in E$ et $\|v\|_1 = |1| = 1$

de plus $|\varphi(v)| = \frac{|1|}{2^0} = 1$ (2)

Comme $\{ |\varphi(u)| : u \in E \ \|u\|_1 \leqslant 1 \}$ est majoré par 1 d'après (1)

et que $1 \in \{ |\varphi(u)| : u \in E \ \|u\|_1 \leqslant 1 \}$ d'après (2)

alors 1 est le sup de $\{ |\varphi(u)| : u \in E \ \|u\|_1 \leqslant 1 \}$

donc $\boxed{|||\varphi||| = 1}$

Raphaël Mouchonnet colle semaine n° 10

Exercice 2 :
Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, soit K un compact de E et $f : K \to F$ une application continue et injective.

1. On pose $L = f(K)$ montrer que L est un compact.
2. Montrer que $f^{-1} : L \to K$ est continue.

1) $L = f(K)$ est compact comme image d'un compact par une application continue

2) Supposons que f^{-1} ne soit pas continue.
Alors $\exists x \in L$ $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$ tel que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad \text{mais} \quad \underbrace{f^{-1}(x_n)}_{\in K} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} f^{-1}(x)$$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\exists \ell \in K$ $f^{-1}(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow \ell$
(existe car K est compact)

Comme f est continue alors

$$f(f^{-1}(x_{\varphi(n)})) = x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$$

Par unicité des valeurs d'adhérence pour une suite convergente $f(\ell) = x$ donc $\ell = f^{-1}(x)$
Ainsi toutes les valeurs d'adhérence de $(f^{-1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ sont égales à $f^{-1}(x)$
Comme K est compact. $f^{-1}(x_n) \longrightarrow f^{-1}(x)$ $\lightning$

Pierre V. Colle de la semaine 10

> Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ contenu dans la boule unité ouverte
> Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $\overline{B(0,r)}$

Solution

Par l'absurde, supposons que pour tout $r < 1$, $K \not\subset \overline{B(0,r)}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $r = 1 - \frac{1}{n}$, alors par hypothèse

$\exists a_n \in K \cap E \setminus \overline{B(0,r)}$

donc $1 - \frac{1}{n} < \|a_n\| < 1$ $\quad (K \subset B(0,1))$

Comme K est compacte, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $\exists a \in K$

$a_{\varphi(n)} \longrightarrow a$ donc $\|a_{\varphi(n)}\| \longrightarrow \|a\|$ ($\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne)

ainsi $1 - \frac{1}{n} \underset{(n \leq \varphi(n))}{\leq} 1 - \frac{1}{\varphi(n)} < \|a_{\varphi(n)}\| < 1$

Par théorème d'encadrement, $\|a_{\varphi(n)}\| \longrightarrow 1$

or $\|a_{\varphi(n)}\| \longrightarrow \|a\|$, par unicité de la limite $\|a\| = 1$

Il y a contradiction car $K \subset B(0,1)$ mais $a \in K$

Donc $\boxed{\exists r < 1 \quad K \subset \overline{B(0,r)}}$

Mehdi B. Colle de la semaine 10

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, que l'on munit d'une norme N.

On introduit le sous-espace vectoriel $H = \{f \in E\ ;\ f(0) = 0\}$.

1. Montrer que H est soit fermé soit dense dans E.

2. Trouver des exemples de normes menant à chacun de ces deux cas.

Solution : 1/ $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ où $\varphi \left| \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array} \right.$ forme linéaire.

φ non nulle car $\varphi(1_{[0,1]}^{\mathbb{R}}) = 1$.

H est donc un hyperplan de E

• Supposons H non fermé et montrons H dense dans E, ie supposons $H \neq \overline{H}$ et montrons $\overline{H} = E$.

$H \subset \overline{H}$ et $H \neq \overline{H}$, donc : $\exists f_0 \in \overline{H}$ telle que $f \notin H$

H hyperplan : $H \oplus \mathrm{Vect}(f_0) = E$.

Montrons $E = H \oplus \mathrm{Vect}(f_0) \subset \overline{H}$ (l'inclusion réciproque étant toujours vérifiée)

Soit $f \in E$. Montrons qu'il existe $(h_n) \in H^{\mathbb{N}}$ $h_n \xrightarrow{N} f$

Comme $E = \mathrm{Vect}(f_0) \oplus H$, il existe $(h, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tels que $f = h + \lambda f_0$

$f_0 \in \overline{H}$ donc : $\exists (g_n) \in H^{\mathbb{N}}$ $g_n \xrightarrow{N} f_0$. Ainsi

$$\underset{\in H}{h} + \lambda \underset{\in H}{g_n} \longrightarrow f$$

$\in H$ sous-espace vectoriel

Ainsi $E \subset \overline{H}$ et H est dense dans E.

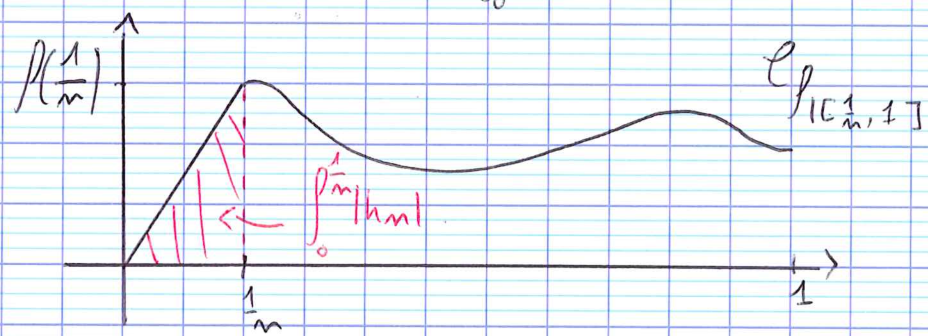
2/ **H fermé**

φ est continue pour $\|.\|_\infty$ ($\forall f \in E \; \|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$) car

$\forall f \in E \; |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ soit $|\varphi(f)| \leq 1 \cdot \|f\|_\infty$

$H = \varphi^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}})$, c'est donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue. **H est donc fermé dans E pour la norme infinie**

H dense Soit $f \in E$. On cherche $(h_n) \in H^{\mathbb{N}}$ tel que $h_n \xrightarrow{\|.\|_1} f$.
On veut $\|f - h_n\|_1 = 0$, soit $\int_0^1 |f - h_n| \to 0$



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $h \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} f(t) \text{ si } t \geq \frac{1}{n} \\ n(f(\frac{1}{n}) - f(0))t \text{ si } 0 \leq t < \frac{1}{n} \end{cases} \end{array} \right. \in H.$

$$0 \leq \int_0^1 |f - h_n| = \int_0^{1/n} |f - h_n| + \overbrace{\int_{1/n}^1 |f - h_n|}^{0} \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |f| + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{n}} |h_n|}_{= \frac{f(\frac{1}{n}) \times \frac{1}{n}}{2} \to 0}$$

Si F est une primitive de $|f|$ sur $[0,1]$ (existe car f $\mathcal{C}^0$) alors
$\int_0^{\frac{1}{n}} |f| = F(\frac{1}{n}) - F(0) \to F(0) - F(0) = 0$ (car F dérivable donc $\mathcal{C}^0$).
Par théorème d'encadrement $h_n \xrightarrow{\|.\|_1} f$ et **H dense dans E pour $\|.\|_1$**

Robin G.

Colle de la semaine 10

> Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-1,1]$.
>
> Montrer que $A^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Solution :

- $\exists P, D \in GL_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
- On pose $(d_1, \dots, d_p) \in \mathbb{R}^p$ tq $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_p)$.
- $\{d_1, \dots, d_p\} = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(D) \subset \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-1,1]$.

Ainsi, $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $|d_i| \leq 1$.

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $A^k = PD^kP^{-1}$ $(\star)$ (par récurrence)
- Soit $\sigma_p \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ B \longmapsto PBP^{-1} \end{array} \right.$

σ_p est linéaire par linéarité du produit matriciel, et $\sigma_p \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})) = \mathcal{L}_c(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$ car $\dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})) = p$ (finie).

- Ainsi σ_p est continue et $\sigma_p(D^k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, car $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $d_i^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ $(|d_i| < 1)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\sigma_p(D^k) = A^k$ d'après $(\star)$, donc $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

1/1

Nicolas.H — Colle de la semaine 10

Énoncé

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés de dimension non finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Supposons : $\forall (a_n) \in E^{\mathbb{N}}$, si $a_n \longrightarrow 0_E$ $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
Montrer que f est continue sur E

Solution :

Par caractérisation des fonctions linéaires, montrons que f est continue en 0_E.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} 0_E$.
Montrons que $f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_F} f(0_E) = 0_F$
Il existe $M_x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f(a_n)\|_F \leq M_x$
Posons $I = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n\|_E = 0\}$

- Si I est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ $\|x_n\| \neq 0$
Posons, pour tout $n \geq n_0$, $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|_E}}$

$y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} 0_E$, donc il existe $M_y \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \geq n_0$
$\|f(y_n)\|_F \leq M_y$

Soit $n \geq n_0$ $\left\|f\left(\dfrac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|_E}}\right)\right\|_F \leq M_y$.

Par linéarité de f et homogénéité de $\|\cdot\|_F$,
$0 \leq \|f(x_n)\| \leq \sqrt{\|x_n\|_E}\, M_y$
Ainsi, par théorème d'encadrement, $\|f(x_n)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Si I est infini, Posons $J = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n\|_E \neq 0\}$
  - Si J est fini, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$
  $x_n = 0$. Ainsi, $f(x_n) = 0_F \longrightarrow 0_F$
  - Si J est infini, $\forall n \in \mathbb{N}$: Soit $x_n = 0_E$, ou $x_n \neq 0_E$
  Par les cas précédents, on en déduit que $f(x_n) \longrightarrow 0_F = f(0_E)$

Ceci étant valable pour toute suite qui tend vers 0_E,
F est continue en 0_E, donc continue sur E

Rapport de Colle

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$ avec $Spec_{\mathbb{R}}(A) \subset]-1;1[$

Montrer que $A^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On suppose que $A \in \mathcal{T}_p^+(\mathbb{R})$

on note $A := \begin{cases} a_{ij} & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On pose $\left| \begin{array}{l} b \in \mathbb{R}_+^* \\ P_b = diag(1, b, b^2, .., b^{p-1}) \end{array} \right.$

On remarque que $P_b \times P_{\frac{1}{b}} = P_{\frac{1}{b}} \times P_b = I_p$

donc $P_b \in Gl_p(\mathbb{R})$ et $(P_b)^{-1} = P_{\frac{1}{b}}$.

On a $P_b^{-1} A P_b = \begin{pmatrix} a_{11} & b a_{1,2} & \cdots & b^{n-1} a_{1,n} \\ & \ddots & b a_{2,3} & \vdots \\ & & \ddots & b^2 a_{p-2,p} \\ & & \ddots & b\, a_{p-1,p} \\ 0 & & & a_{pp} \end{pmatrix}$

$= \begin{cases} a_{ij} b^{j-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On pose $\|.\|$ la norme subordonnée ;

$$\|.\| \left| \begin{array}{lcl} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ M & \longmapsto & \sup\limits_{A \in \mathbb{R}^n,\ \|A\|_1 = 1} \|MA\|_1 \end{array} \right.$$

On a $\forall M \in M_p(\mathbb{R})$;

si $M = ([M]_{\cdot 1}, \dots, [M]_{\cdot p})$

alors $\|M\| = \max\limits_{1 \leq j \leq p} \|[M]_{\cdot j}\|_1$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $j \in [\![1 ; p]\!]$

Pour $b \to 0$, on a ; $\|[P_b^{-1} A P_b]\|_1$

$$= \sum_{i=1}^{j} |b^{j-i} a_{ij}|$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \underbrace{b}_{\to 0} \underbrace{|b^{\overset{0 \leq}{j-i-1}} a_{ij}|}_{\text{bornée}} + \underbrace{|a_{jj}|}_{< 1}$$

$$\leq (j-i)\varepsilon + |a_{jj}|$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{|a_{jj}| + 1}{2(j-i)}$

On a ; $\|[A]_{\cdot j}\|_1 < 1$ □

Pour $j = 1$ on a ; $\|[P_\ell^{-1} A P_\ell]_{\cdot 1}\|_1 = |a_{11}| < 1$ ok.

Donc pour ℓ suffisamment petit on a

$$\lim \| P_\ell^{-1} A P_\ell \| = \max_{1 \leq j \leq p} \|[P_\ell^{-1} A P_\ell]_{\cdot j}\|_1$$

< 1.

On en déduit que, la norme $\|.\|$ subordonnée étant sous-multiplicative et comme on a ;

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P_\ell^{-1} A^n P_\ell$ (1)

donc $\forall n \in \mathbb{N} \; 0 \leq \|A^n\| \leq \|P_\ell\| \, \|(P_\ell^{-1} A P_\ell)^n\| \, \|P_\ell^{-1}\|$

((1) et sous-multiplicativité de $\|.\|$)

Puis $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \|A^n\| \leq \|P_\ell\| \, \|P_\ell^{-1}\| \, \|P_\ell^{-1} A P_\ell\|^n$

(sous-multiplicativité de $\|.\|$)

Finalement pour ℓ assez petit on a ;

$$\|P_b^{-1} A P_b\| < 1$$

donc $\|P_b^{-1} A P_b\|^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc d'après le théorème d'encadrement ; $\|A^n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\| A^n - 0_{M_p(\mathbb{R})} \|$$

donc $A^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

En général ; si A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et que $\operatorname{spec}(A) \subset]-1 ; 1[$

Comme A est trigonalisable $\exists P \in GL_p(\mathbb{R})$

tel que $P^{-1} A P \in T_n^+(\mathbb{R})$.

D'après l'étude précédent et comme $\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}(P^{-1} A P)$ on a ;

$$(P^{-1} A P)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0_{M_p(\mathbb{R})}$$

On pose $\varphi_P \left| \begin{array}{l} M_p(\mathbb{R}) \to M_p(\mathbb{R}) \\ M \mapsto P A P^{-1} \end{array} \right.$

$\mathcal{L}_P$ est linéaire entre deux espaces de dimension finie donc $\mathcal{L}_P$ est continue.

$\forall n \in \mathbb{N}$: ($\mathcal{L}_P$ continue)

$$\mathcal{L}_P\left((P^{-1}AP)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{L}_P\left(0_{M_p(\mathbb{R})}\right)$$

$$\mathcal{L}_P\left((P^{-1}AP)^n\right) = P\underbrace{(P^{-1}AP)^n}_{P^{-1}A^nP}P^{-1} = A^n$$

$$\mathcal{L}_P\left(0_{M_p(\mathbb{R})}\right) = 0_{M_p(\mathbb{R})}$$

Donc $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{M_p(\mathbb{R})}$