MATRICES

par David Blottière, le 1er septembre 2023 à 08h54

RÉVISIONS 8

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. »

Vie de Henry Brulard, Stendhal (Henri Beyle)

SOMMAIRE

§ 1. PRÉAMBULE

Une matrice à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbf{K}$.

On peut additionner des matrices de même format, multiplier une matrice par un scalaire et, dans certains cas, multiplier une matrice par une autre.

Si l'on se restreint au cas des matrices carrées à n lignes et n colonnes, alors l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qu'elles forment se trouve muni de trois opérations $+$, $\cdot$ et $\times$ qui lui confèrent la structure de $\mathbf{K}$-algèbre.

On peut alors jouer dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ à résoudre des équations algébriques, e.g. :

$$JM + MJ = 2024 \cdot I_n$$

d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Il faut cependant prendre garde à deux défauts : la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ n'est ni commutative, ni intègre dès que $n \geqslant 2$, ce qui rend les résolutions d'équations plus subtiles (et passionnantes).

La définition de la multiplication matricielle est intimement liée à la composition des applications linéaires. En fait, matrices et applications linéaires dansent ensemble : des propriétés matricielles se reflètent sur les applications linéaires et réciproquement. Ce ballet s'incarne dans le théorème C24.14 du polycopié de cours sur les matrices [PDF], qu'on étudiera intensément.

NOTATION — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ 2. COURS

Les documents supports sont :

- le polycopié de cours sur le calcul matriciel et les systèmes linéaires [PDF] ;
- le polycopié de cours sur les matrices [PDF].

Une matrice de format $n \times p$, où $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, à coefficients dans $\mathbf{K}$ est un tableau à p lignes et à n colonnes, dont les entrées sont des éléments de $\mathbf{K}$.

L'ensemble des matrices de format $n \times p$, où $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies composante par composante. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension np. Il possède une base canonique à connaître.

On attache à une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ un nombre, appelé le rang de la matrice. On étudiera soigneusement les propriétés du rang d'une matrice.

Il y a un lien ténu entre les matrices et les applications linéaires de source et but de dimension finie. Le point fondamental est le suivant : si E est un espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathscr{B}$, si F est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{C}$, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on définit la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ comme étant la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \qquad \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right]_{i,j} := i\text{-ème coordonnée de } f(e_j) \text{ dans la base } \mathscr{C}.$$

L'application :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\cdot) \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

On peut, dans certain cas, multiplier des matrices. Soient n, p, q des nombres entiers naturels non nuls. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on définit la matrice $A \times B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \qquad [A \times B]_{i,j} := \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} [B]_{k,j} .$$

On reverra les liens entre les opérations sur les applications linéaires et celles définies sur les matrices. Elles sont essentielles et on se doit de les connaître. Le plus important d'entre eux est le suivant.

THÉORÈME FONDAMENTAL — Si E est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$, si F est un espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathscr{C}$, si G est un espace vectoriel de dimension finie q muni d'une base $\mathscr{D}$, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, si $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) .$$

On observe que le produit matriciel est, en quelque sorte, le reflet de la composition d'applications linéaires.

On portera ensuite notre attention sur les matrices carrées. Si $n \in \mathbf{N}^*$, alors $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), ., +, \times)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre qui est non commutative, dès que $n \geqslant 2$.

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors on dispose d'un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(E), \cdot, +, \circ) & \longrightarrow & (\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \cdot, +, \times) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$$

qui permet de démontrer des résultats très puissants, par exemple sur l'inversibilité des matrices carrées. Il faut bien maîtriser tous les résultats de cette partie.

On reverra également tout ce qui concerne la trace d'une matrice carrée et la transposée d'une matrice, en particulier les propriétés en lien avec le produit matriciel.

On terminera par l'étude du théorème de changement de bases, qui jouera un rôle central dans le programme de MPI.

Les matrices semblables et les matrices équivalentes font, quant à elles, l'objet de nombreux sujets de concours.

Ce travail sur le cours est fondamental.

§ 3. VRAI-FAUX

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1 **UN CORRIGÉ**

L'assertion suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2 **UN CORRIGÉ**

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. La matrice $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle inversible, avec pour matrice inverse $B := \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3 **UN CORRIGÉ**

L'assertion :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})^2, \qquad AB = 0 \Longrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$

est-elle vraie ? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4 **UN CORRIGÉ**

L'assertion :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot AB + B^2$$

est-elle vraie ? Justifier la réponse.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5 **UN CORRIGÉ**

La matrice de l'application linéaire :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+y) \end{array} \right.$$

dans la base $\mathscr{B} := (u_1 := (1,1), u_2 := (1,-1))$ de $\mathbf{R}^2$ est-elle $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$?

□

§ 4. CENTRE DE L'ALGÈBRE $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6 **UN CORRIGÉ**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Le centre de l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \cdot, +, \times)$, noté Z, est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, i.e. :

$$Z := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \,:\, \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad AM = MA\}.$$

Démontrer que $Z = \mathrm{Vect}(I_n)$.

□

§ 5. CALCUL DES PUISSANCES D'UNE MATRICE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7 **UN CORRIGÉ**

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient :

- $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 ,
- $B \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres égaux à 1.

Q1. — Démontrer que $A^2 = p \cdot A$.

Q2. — Déterminer une expression de A^n en fonction de A, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Q3. — En déduire B^n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

□

§ 6. EXEMPLES DE MATRICES SEMBLABLES À LEUR INVERSE

Cet exercice est un extrait du sujet de Petites Mines 2002, concours que l'on présentait à l'issue de l'année de Sup.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8 **UN CORRIGÉ**

E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (n fois).

On note $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et I_3 la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, on dira que la matrice A est semblable à la matrice B s'il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

Partie A

Q1. — On notera $A \sim B$, pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B sont semblables.

Q2. — Démontrer que deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels. On considère l'application w de $\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)$ vers E définie par :

$$w(x) = u^j(x)$$

pour tout $x \in \mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)$.

Q3. — Démontrer que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}\left(u^i\right)$.

Q4. — En déduire que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^i\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^j\right)\right)$.

Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 2$.

Q5. — Démontrer que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^2\right)\right) = 2$. On pourra utiliser deux fois la question 4.

Q6. — Démontrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $\left(u^2(a), u(a), a\right)$ est une base de E.

Q7. — Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 1$.

Q8. — Démontrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

Q9. — Justifier l'existence d'un vecteur c de $\mathrm{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis démontrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.

Q10. — Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. On se propose de démontrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}. On pose alors :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on introduit une matrice P de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

Q11. — Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

Q12. — Calculer N^3 et démontrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

Q13. — On suppose dans cette question que $N = 0$. Démontrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

On suppose à présent que $\mathrm{Rg}(N) = 2$. *On pose* $M = N^2 - N$.

Q14. — Démontrer que la matrice N est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire, à l'aide d'une question précédente, une matrice semblable à la matrice M.

Q15. — Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{Rg}(M)$.

Q16. — Démontrer que les matrices M et N sont semblables.

Q17. — Démontrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Q18. — On suppose dans cette question que $\mathrm{Rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Démontrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note (a, b, c) *une base de* E *et* u *l'endomorphisme de* E *de matrice* A *dans cette base.*

Q19. — Démontrer que $\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{id}_E\right)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

Q20. — Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

Q21. — Démontrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Q22. — Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

□

§ 7. MATRICE DONT L'AJOUT NE MODIFIE PAS LE DÉTERMINANT ∗

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9 UN CORRIGÉ

Soit un entier $n \geqslant 2$. Que dire d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$(\star) \qquad \forall\, X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \qquad \det(A + X) = \det(X) \quad ?$$

□

Un corrigé de l'exercice 1 Énoncé

Vrai.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On calcule le produit :

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

et on trouve :

$$\begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & -\sin(a)\sin(b) + \cos(a\cos(b) \end{pmatrix}.$$

Les formules de trigonométrie :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(b)$$

permettent de conclure.

Remarque — Si l'on oriente $\mathbf{R}^2$ à l'aide de la base canonique $\mathscr{B}_0 := ((1,0),(0,1))$, alors pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, la matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est la matrice de la rotation d'angle θ de $\mathbf{R}^2$, dans la base $\mathscr{B}_0$.

L'identité proposée s'incarne donc géométriquement : si l'on compose la rotation d'angle b par la rotation d'angle a, alors on obtient la rotation d'angle $(a+b)$.

Un corrigé de l'exercice 2 **Énoncé**

Vrai.

On calcule le produit AB pour trouver $AB = I_2$.
La matrice A est carrée et inversible à droite.
Elle est donc inversible et son inverse à droite, qui est B, égale son inverse.

■

Remarque — Il peut être commode de connaître cette formule, qui permet d'inverser rapidement une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ inversible.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 ÉNONCÉ

Faux.

Un contre-exemple est donné par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■

Remarque — Plus généralement, l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), +, \times)$ n'est pas intègre dès que $n \geqslant 2$. En effet :

$$E_{1,1} E_{2,2} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 ÉNONCÉ

Faux.

On calcule :

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

et donc :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot AB + B^2 \iff AB = BA\,.$$

En prenant deux matrices A et B qui ne commutent pas, on obtient donc un contre-exemple. Ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, livrent un contre-exemple. En effet :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

■

Remarque — Cette question met en lumière l'importance de l'hypothèse « $AB = BA$ » lorsqu'on veut appliquer la formule du binôme de Newton pour développer $(A+B)^n$, où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ avec $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 ÉNONCÉ

Vrai.

- Par définition, la première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est formée des coordonnées du vecteur $f(u_1)$ dans la base $\mathscr{B}$. Comme

$$f(u_1) = f((1,1)) = (1,2) = \frac{3}{2} \cdot u_1 - \frac{1}{2} \cdot u_2$$

la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

- Par définition, la deuxième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est formée des coordonnées du vecteur $f(u_2)$ dans la base $\mathscr{B}$. Comme

$$f(u_2) = f((1,-1)) = (3,0) = \frac{3}{2}.u_1 + \frac{3}{2}.u_2$$

la deuxième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6

ÉNONCÉ

On pourra visionner un corrigé vidéo en cliquant sur le lien suivant [YouTube] (33 minutes).

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 ÉNONCÉ

Q1. — Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

$$\left[A^2\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \cdot [A]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} 1 = p = p\,[A]_{i,j} = [p \cdot A]_{i,j}$$

Les matrices A^2 et $p\,A$ ont même format et même coefficients. Elles sont donc égales.

■

Q2. — Démontrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = p^{n-1} \cdot A$, en raisonnant par récurrence.

- Initialisation au rang 1. Si $n = 1$, alors $p^{n-1} A = p^0 \cdot A = A$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^n = p^{n-1} \cdot A$.

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A \times p^{n-1} \cdot A & [\text{hypothèse de récurrence}] \\ & = & p^{n-1} \cdot A^2 & \\ & = & p^{n-1} \cdot p \cdot A & [\text{question 1}] \\ & = & p^n \cdot A. & \end{array}$$

- Conclusion. D'après l'initialisation à $n = 1$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A^n = p^{n-1} \cdot A$.

■

Q3. — On remarque que $B = A - I_p$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} B^n & = & (A - I_p)^n & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot A^k \times (-I_p)^{n-k} & [\text{formule du binôme de Newton dans } \mathcal{M}_p(\mathbf{K}),\ AI_p = I_p A] \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{n-k} \times A^k & \\ & = & \displaystyle(-1)^n \cdot I_p + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{n-k} \cdot p^{k-1} \times A & [\text{question 2, attention la formule fausse au rang } 0] \\ & = & \displaystyle(-1)^n \cdot I_p + \frac{1}{p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{n-k} \cdot p^k \right) \cdot A & \\ & = & \displaystyle(-1)^n \cdot I_p + \frac{(p-1)^n - (-1)^n}{p} \cdot A & [\text{formule du binôme de Newton dans } \mathbf{K}] \end{array}$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8 **ÉNONCÉ**

Q1. —

- Démontrons que la relation $\sim$ est réflexive. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. La matrice I_3 est inversible, d'inverse I_3. De plus :
$$(I_3)^{-1} AI_3 = I_3 AI_3 = A\,.$$
Donc $A \sim A$.
- Démontrons que la relation $\sim$ est symétrique. Soient $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A \sim B$. Alors il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On en déduit :
$$B = PAP^{-1}\,. \tag{1}$$
La matrice P^{-1} étant inversible, d'inverse P, l'identité (1) s'écrit encore :
$$B = \left(P^{-1}\right)^{-1} AP^{-1}\,.$$
Ainsi $B \sim A$.
- Démontrons que la relation $\sim$ est transitive. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors il existe deux matrices P, Q de $GL_3(\mathbf{R})$ telles que :
$$A = P^{-1}BP \qquad \text{et} \qquad B = Q^{-1}CQ\,.$$
On en déduit :
$$A = P^{-1}Q^{-1}CQP\,. \tag{2}$$
La matrice QP étant inversible, d'inverse $P^{-1}Q^{-1}$, l'identité (2) s'écrit encore :
$$A = (QP)^{-1} CQP\,.$$
Ainsi $A \sim C$.

■

Q2. — Nous raisonnons par contraposition.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ deux matrices semblables. Démontrons qu'elles ont même déterminant.
Comme A et B sont semblables, il existe une matrice P de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.
Comme le déterminant est multiplicatif et que la multiplication dans $\mathbf{R}$ est commutative :
$$\det(A) = \det\left(P^{-1}BP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(B)\det(P) = \det\left(P^{-1}\right)\det(P)\det(B) = \det\left(\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}\right)\det(B) = \det(B)\,.$$

■

Q3. — Soit $y \in \mathrm{Im}\,(w)$. Alors il existe $x \in \mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)$ tel que $y = w(x)$. On calcule
$$u^i(y) = u^i(w(x)) = u^i\left(u^j(x)\right) = u^i \circ u^j(x) = u^{i+j}(x)$$
pour trouver 0, car $x \in \mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)$. Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}\left(u^i\right)$.

■

Q4. — Comme l'espace vectoriel E est de dimension finie, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)$ de E est de dimension finie. Nous pouvons donc appliquer le théorème du rang à l'application linéaire $w\colon \mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right) \longrightarrow E$ pour obtenir :
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(w)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(w)\right)\,. \tag{3}$$
L'application w est la restriction à $\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)$ de l'endorphisme u^j de E. Ainsi :
$$\mathrm{Ker}\,(w) = \mathrm{Ker}\left(u^j\right) \cap \mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right) = \mathrm{Ker}\left(u^j\right)$$
car $\mathrm{Ker}\left(u^j\right) \subset \mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)$. Donc :
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(w)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^j\right)\right)\,. \tag{4}$$
Du résultat établi à la question 3, on déduit :
$$\dim\left(\mathrm{Im}\,(w)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^i\right)\right)\,. \tag{5}$$
En sommant membre à membre (4) et (5) et en utilisant l'identité (3), il vient :
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^i\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^j\right)\right)\,.$$

■

Q5. — D'après la question 4 :
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^3\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^2\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right)\,.$$

D'après les hypothèses faites sur u et le théorème du rang : $\operatorname{Ker}(u^3) = E$ et $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 1$. On en déduit :

$$2 \leqslant \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right). \tag{6}$$

Toujours d'après la question 4 :

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) \leqslant 2\,\dim(\operatorname{Ker}(u)).$$

Or nous avons déjà observé : $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 1$. Donc :

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) \leqslant 2. \tag{7}$$

De (6) et (7), nous déduisons : $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) = 2$.

■

Q6. —

- Comme $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) = 2$ et $\dim(E) = 3$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ de E est strictement inclus dans E. Donc il existe un vecteur a de E, qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)$. Ainsi a-t-on $u^2(a) \neq 0$.
- La famille $\left(u^2(a), u(a), a\right)$ est formée de 3 vecteurs de E, qui est de dimension 3. Pour prouver que la famille $\left(u^2(a), u(a), a\right)$ est une base de E, il suffit donc de démontrer que la famille est libre.
- Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\lambda_0\, a + \lambda_1\, u(a) + \lambda_2\, u^2(a) = 0. \tag{8}$$

En appliquant u^2 à chacun des membres de (8) et en utilisant le fait que u^3 est nul, il vient :

$$\lambda_0\, u^2(a) = 0.$$

Comme $u^2(a) \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$. L'identité (8) s'écrit alors :

$$\lambda_1\, u(a) + \lambda_2\, u^2(a) = 0. \tag{9}$$

En appliquant u à chacun des membres de (9) et en utilisant le fait que u^3 est nul, il vient :

$$\lambda_1\, u^2(a) = 0.$$

Comme $u^2(a) \neq 0$, nécessairement $\lambda_1 = 0$. L'identité (9) s'écrit alors :

$$\lambda_2\, u^2(a) = 0.$$

Comme $u^2(a) \neq 0$, nécessairement $\lambda_2 = 0$. La famille $\left(u^2(a), u(a), a\right)$ est donc libre.

■

Q7. —

- Comme :

$$\begin{aligned} &u\left(u^2(a)\right) = u^3(a) = 0 = 0.u^2(a) + 0.u(a) + 0.a \\ &u(u(a)) = u^2(a) = 1.u^2(a) + 0.u(a) + 0.a \\ &u(a) = 0.u^2(a) + 1.u(a) + 0.a \end{aligned}$$

la matrice U de u dans la base $\left(u^2(a), u(a), a\right)$ est :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice V est égale à $U^2 - U$. Après calcul :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Q8. — Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme u de E livre :

$$3 = \dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(u)) + \operatorname{Rg}(u).$$

Donc $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 2 < 3 = \dim(E)$. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(u)$ de E est donc strictement inclus dans E. Donc il existe un vecteur b de E, qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker}(u)$. Ainsi a-t-on $u(b) \neq 0$.

■

Q9. —

- Comme $u^2 = 0$, le vecteur $u(b)$ appartient à $\operatorname{Ker}(u)$. Le vecteur $u(b)$ est non nul, donc la famille $(u(b))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(u)$. Comme $\operatorname{Ker}(u)$ est de dimension 2, le théorème de la base incomplète assure l'existence d'un vecteur c de $\operatorname{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ est une base de $\operatorname{Ker}(u)$. En particulier, la famille $(u(b), c)$ ainsi construite est libre.
- La famille $(b, u(b), c)$ est formée de 3 vecteurs de E, qui est de dimension 3. Pour prouver que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E, il suffit donc de démontrer que la famille est libre.
Soient $\lambda_0, \lambda_1, \mu$ des nombres réels tels que :

$$\lambda_0\, b + \lambda_1\, u(b) + \mu\, c = 0. \tag{10}$$

En appliquant u à chacun des membres de (10) et en utilisant le fait que $u(b)$ et c appartiennent à $\operatorname{Ker}(u)$, il vient :

$$\lambda_0\, u(b) = 0.$$

Comme $u(b) \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$. L'identité (10) s'écrit alors :

$$\lambda_1\, u(b) + \mu\, c = 0.$$

La famille $(u(b), c)$ étant libre, on en déduit : $\lambda_1 = \mu = 0$. La famille $(b, u(b), c)$ est donc libre.

■

Q10. —

- Comme :
$$u(b) = 0.b + 1.u(b) + 0.c$$
$$u(u(b)) = u^2(b) = 0 = 0.b + 0.u(b) + 0.c$$
$$u(c) = 0 = 0.b + 0.u(b) + 0.c$$
la matrice U' de u dans la base $(b, u(b), c)$ est :
$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- La matrice V' est égale à $\left(U'\right)^2 - U'$. Comme $u^2 = 0$, la matrice $\left(U'\right)^2$ est nulle. Donc :
$$V' = -U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Q11. — Dans notre réponse à la question 2, nous avons établi que deux matrices semblables ont même déterminant. Donc $\det(A) = \det(T)$. Or $\det(T) = 1$. Ainsi $\det(A) = 1 \neq 0$. La matrice A est donc inversible.

■

Q12. —

- On calcule les matrices N^2 et N^3.
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0\,.$$
- On calcule :
$$T\left(I_3 - N + N^2\right) = (I_3 + N)\left(I_3 - N + N^2\right) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 - N^3 = I_3 - N^3 = I_3\,.$$
En en déduit :
$$T^{-1} = I_3 - N + N^2\,. \tag{11}$$
De $P^{-1}AP = T$, on déduit :
$$P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1} = T^{-1}$$
et donc :
$$P^{-1}A^{-1}P = T^{-1}\,. \tag{12}$$
D'après (11) et (12) : $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

■

Q13. — Comme $N = 0$, la matrice T est la matrice I_3. Donc $A = PTP^{-1} = I_3$. Ainsi a-t-on $A^{-1} = A$. La relation $\sim$ étant réflexive (cf. question 1), $A \sim A^{-1}$.

■

Q14. —

- Fixons une base $\mathscr{B}_1$ de E et considérons l'endomorphisme u de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_1$ est N.
Comme $\mathrm{Rg}(N) = \mathrm{Rg}(u)$, le rang de u est 2. Nous avons calculé $N^3 = 0$. Ainsi : $u^3 = 0$.
L'endomorphisme u de E satisfait donc les hypothèses faites à la question 4. Les résultats établis lors du traitement de cette question s'appliquent donc. Ainsi existe-t-il une base $\mathscr{B}_2$ de E tel que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
D'après le théorème de changement de bases :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u) \times P_{\mathscr{B}_2 \to \mathscr{B}_1}\,. \tag{13}$$
La matrice de passage $P := P_{\mathscr{B}_2 \to \mathscr{B}_1}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2}$. Ainsi (13) peut se ré-écrire :
$$N = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P\,.$$
Les matrices N et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont donc semblables.

- On calcule :

$$\begin{aligned} M &= N^2 - N \\ &= \left(P^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}P\right)^2 - P^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}P \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P - P^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}P \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}P\,. \end{aligned}$$

  Les matrices M et $\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ sont donc semblables.

■

Q15. —

- Si on spécifie $\alpha=-1$, $\beta=1$ et $\gamma=-1$, la matrice N coïncide avec la matrice $\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Donc, d'après le calcul de N^3 fait à la question 12 :

$$\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^3 = 0$$

  On calcule :

$$M^3 = \left(P^{-1}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}P\right)^3 = P^{-1}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^3 P = 0\,.$$

- Le rang de la matrice $\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ est 2. Comme M est semblable à cette matrice et que deux matrices semblables ont même rang, le rang de M est également 2.

■

Q16. —

- Nous avons établi : $M^3=0$ et $\mathrm{Rg}(M)=2$. De la même manière qu'en 14, nous en déduisons que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
- En 14, nous avons démontré que N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
- Les matrices M et N sont toutes deux semblables à la matrice $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence, nous en déduisons que M et N sont semblables.

■

Q17. —

- D'après la question 16, il existe une matrice $Q\in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que :

$$M = N^2 - N = Q^{-1}NQ\,.$$

  On en déduit :

$$I_3 - N + N^2 = I_3 + Q^{-1}NQ = Q^{-1}I_3Q + Q^{-1}NQ = Q^{-1}(I_3+N)Q = Q^{-1}TQ\,.$$

  Donc $T\sim I_3 - N + N^2$.
- Nous savons : $A\sim T$ (cf. hypothèse initiale sur A), $T\sim I_3-N+N^2$ et $A^{-1}\sim I_3-N+N^2$ (cf. question 12). La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence, nous en déduisons que A et A^{-1} sont semblables.

■

Q18. —

- On rappelle que $N=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\0&0&\gamma\\0&0&0\end{pmatrix}$. Le rang de N étant égal à 1, nécessairement $\alpha=0$ ou $\beta=0$. Alors le calcul de N^2 effectué à la question 12 livre $N^2=0$.
- Fixons une base $\mathscr{B}_3$ de E et considérons l'endomorphisme v de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_3$ est N.
  Comme $\mathrm{Rg}(N)=\mathrm{Rg}(v)$, le rang de v est 1. Nous avons établit $N^2=0$. Ainsi : $v^2=0$.
  L'endomorphisme v de E satisfait donc les hypothèses faites à la question 8. Les résultats établis lors du traitement de cette question s'appliquent donc. Ainsi existe-t-il une base $\mathscr{B}_4$ de E tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4}(v) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de changement de bases :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(v) = P_{\mathscr{B}_3\to\mathscr{B}_4} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4}(v) \times P_{\mathscr{B}_4\to\mathscr{B}_3}\,. \tag{14}$$

La matrice de passage $Q := P_{\mathscr{B}_4\to\mathscr{B}_3}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathscr{B}_3\to\mathscr{B}_4}$. Ainsi (14) peut se ré-écrire :

$$N = Q^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} Q\,. \tag{15}$$

Les matrices N et $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ sont donc semblables.

- On observe :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Comme la matrice $\mathrm{Diag}(1,-1,1)$ est inversible, égale à son inverse, les matrices $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ sont semblables.

- De (15), on déduit :

$$-N = Q^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} Q\,.$$

Les matrices $-N$ et $\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ sont donc semblables.

- Nous avons établi : $N \sim \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $-N\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence (cf. question 1), nous en déduisons que N et $-N$ sont semblables.
- Puisque $-N\sim N$, il existe une matrice $R\in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que :

$$-N = R^{-1}NR\,.$$

On en déduit :

$$I_3 - N = I_3 + R^{-1}NR = R^{-1}I_3R + R^{-1}NR = R^{-1}(I_3+N)R = R^{-1}TR\,.$$

Donc $T\sim I_3-N$.

- Nous savons : $A\sim T$ (cf. hypothèse initiale sur A), $T\sim I_3-N$ et $A^{-1}\sim I_3-N$ (cf. question 12 et $N^2=0$). La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence, nous en déduisons que A et A^{-1} sont semblables.

■

Q19. —

- L'application $u-\mathrm{id}_E$ est un endomorphisme de E, comme combinaison linéaire d'endomorphismes de E. Son noyau, $\mathrm{Ker}\left(u-\mathrm{id}_E\right)$, est donc un sous-espace vectoriel de E.
- Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c\in \mathrm{Ker}\left(u-\mathrm{id}_E\right) &\Leftrightarrow u(\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c)=\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c\\
&\Leftrightarrow \lambda_1 u(a)+\lambda_2 u(b)+\lambda_3 u(c)=\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c\\
&\Leftrightarrow \lambda_1 a+\lambda_2 c+\lambda_3(-b+c)=\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c\\
&\Leftrightarrow (\lambda_2+\lambda_3)\,b-(\lambda_2+\lambda_3)\,c=0\\
&\Leftrightarrow \lambda_2+\lambda_3=0 \qquad \text{[la famille } (b,c) \text{ est libre]}
\end{aligned}$$

De cette étude, on déduit :

$$\mathrm{Ker}\left(u-\mathrm{id}_E\right)=\left\{\lambda_1 a+\lambda_2 b-\lambda_3 c\;:\;(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}(a,b-c)$$

La famille $(a,b-c)$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}\left(u-\mathrm{id}_E\right)$. Vérifions qu'elle est libre.

- Soient $\mu_1,\mu_2\in\mathbf{R}$ tels que : $\mu_1 a+\mu_2(b-c)=0$. Alors $\mu_1 a+\mu_2 b-\mu_2 c=0$. La famille (a,b,c) étant libre, il vient $\mu_1=\mu_2=0$.
- Nous avons démontré que $(a,b-c)$ est une base de $\mathrm{Ker}\left(u-\mathrm{id}_E\right)$. Ainsi, la dimension de $\mathrm{Ker}\left(u-\mathrm{id}_E\right)$ vaut-elle 2.

■

Q20. —

- La famille $(a,b-c,c)$ est formée de 3 vecteurs de E, qui est de dimension 3. Pour prouver que la famille $(a,b-c,c)$ est une base de E, il suffit donc de démontrer que la famille est libre.
Soient $\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathbf{R}$ tels que : $\mu_1 a+\mu_2(b-c)+\mu_3 c=0$. Alors :

$$\mu_1 a+\mu_2 b+(\mu_3-\mu_2)\,c=0\,.$$

La famille (a,b,c) étant libre, il vient : $\mu_1=\mu_2=\mu_3-\mu_2=0$. Nous en déduisons : $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$.

- Comme :

$$\begin{aligned}
u(a)&=a=1.a+0.(b-c)+0.c\\
u(b-c)&=b-c=0.a+1.(b-c)+0.c\\
u(c)&=-b+2c=0.a+(-1).(b-c)+1.c
\end{aligned}$$

la matrice de u dans la base $(a,b-c,c)$ est :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

■

Q21. — Posons $\mathscr{B}_5 := (a, b, c)$ et $\mathscr{B}_6 := (a, b - c, c)$. D'après le théorème de changement de bases :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_5}(u) = P_{\mathscr{B}_5 \to \mathscr{B}_6} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_6}(u) \times P_{\mathscr{B}_6 \to \mathscr{B}_5}\,. \tag{16}$$

La matrice de passage $S := P_{\mathscr{B}_6 \to \mathscr{B}_5}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathscr{B}_5 \to \mathscr{B}_6}$. Ainsi (16) peut se ré-écrire :

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S\,.$$

Les matrices A et

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont donc semblables. Nous posons :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, T s'écrit $T = I_3 + N$ et la matrice N est de rang 1. Le résultat de la question 18 s'applique. Les matrices A et A^{-1} sont semblables.

■

Q22. — Non. Donnons un contre-exemple.

Considérons la matrice $\mathrm{Diag}(-1, 1, 1)$. Elle est inversible et égale à son inverse, donc semblable à son inverse. Son déterminant étant égal à -1, elle ne peut être semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car toutes ces matrices ont 1 pour déterminant (cf. question 2).

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9 — ÉNONCÉ

On observe que si A est la matrice nulle alors la condition $(\star)$ est satisfaite.
Nous allons démontrer la réciproque, i.e. qu'une matrice A vérifiant la condition $(\star)$ est la matrice nulle, en raisonnant par l'absurde.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$(\star) \qquad \forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \qquad \det(A+X) = \det(X).$$

Supposons que la matrice A est non nulle. Alors :

$$r := \operatorname{Rg}(A) \in [\![1, n]\!].$$

Le rang r de A ne peut valoir n, sinon A serait inversible et la spécialisation de $(\star)$ à $X \leftarrow -A$ donnerait 0 égale un nombre non nul. Donc :

$$r \in [\![1, n-1]\!].$$

D'après le cours, il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2$ tel que :

$$A = P^{-1} \times J_n(r) \times Q.$$

Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\det(X) &= \det\left(P^{-1} \times J_n(r) \times Q + X\right) \\
&= \det\left(P^{-1} \times J_n(r) \times Q + P^{-1} \times P \times X \times Q^{-1} \times Q\right) \\
&= \det\left(P^{-1}\right) \cdot \det\left(J_n(r) + P \times X \times Q^{-1}\right) \cdot \det(Q) \\
&= \det(P)^{-1} \cdot \det\left(J_n(r) + P \times X \times Q^{-1}\right) \cdot \det(Q)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\det(P) \cdot \det(X) \cdot \det(Q)^{-1} = \det\left(J_n(r) + P \times X \times Q^{-1}\right)$$

puis :

$$\det\left(P \times X \times Q^{-1}\right) = \det\left(J_n(r) + P \times X \times Q^{-1}\right).$$

De cette étude et de la bijectivité (la surjectivité suffirait) de l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & P \times X \times Q^{-1} \end{array} \right.$$

nous déduisons que :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \qquad \det(Y) = \det(J_n(r) + Y).$$

Cette propriété spécialisée à la matrice par blocs :

$$Y := \begin{pmatrix} 0_{\mathscr{M}_r(\mathbf{K})} & 0_{\mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbf{K})} \\ 0_{\mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbf{K})} & I_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \qquad \text{[matrice bien définie et non inversible car } 1 \leqslant r \leqslant n-1]$$

livre :

$$0 = \det(I_n) = 1$$

d'où une contradiction. ■