INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

RÉVISIONS 6

par David Blottière, le 28 août 2023 à 21h02

« Les mathématiques ne révèlent leurs secrets qu'à ceux qui les abordent avec pur amour, pour leur propre beauté. »

Archimède

SOMMAIRE

§ 1. PRÉAMBULE

En MP2I, une construction de l'intégrale de Riemann vous a été exposée.

On définit tout d'abord la notion d'intégrale pour des fonctions en escalier comme « aire sous la courbe », puis on étend cette définition aux fonctions continues par morceaux grâce à un résultat d'approximation, reposant sur le :

THÉORÈME DE HEINE — Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

L'intégrale ainsi construite possède des propriétés agréables :

- linéarité,
- croissance,
- relation de Chasles,
- majoration de la valeur absolue d'une intégrale ou inégalité triangulaire.

En outre, on dispose du THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE : si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur I et a est un point de I, alors la fonction :

$$\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est l'unique primitive de f sur I, qui s'annulle en a.

Donnons deux conséquences de ce théorème.

(1) Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive, ce qui a un grand intérêt notamment pour l'étude des équations différentielles.

(2) Le théorème fondamental de l'analyse permet un calcul d'une intégrale, connaissant une primitive de l'intégrande. En effet, si F est une primitive d'une fonction continue par morceaux f sur un segment $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

§ 2. COURS

Les documents supports sont :

- le polycopié de cours sur l'intégration [PDF] ;
- le polycopié de cours sur le calcul de primitives [PDF] ;
- la fiche sur les méthode de primitivation [PDF].

On fixe deux nombres réels a et b tels que $a < b$. On considère trois ensembles de fonctions :

- $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) := \left\{f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}) \;:\; f \text{ est une fonction en escalier sur } [a,b]\right\}$;
- $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}) := \left\{f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}) \;:\; f \text{ est une fonction continue sur } [a,b]\right\}$;
- $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R}) := \left\{f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}) \;:\; f \text{ est une fonction continue par morceaux sur } [a,b]\right\}$.

Il faut commencer par revoir les définitions précises de « fonction en escalier sur $[a,b]$ » et de « fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ ». Ces trois ensembles $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$, $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$, $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. En outre, on a les inclusions suivantes :

$$\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \subset \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R}) \supset \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})\,.$$

L'objectif premier est de construire une théorie de l'intégration (due à Riemann), modelée sur l'interprétation (géométrique) d'aire sous une courbe que l'on peut approcher par des rectangles.

(A) Construction d'une intégrale sur $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$, à l'aide d'une somme d'aires de rectangles. Cette intégrale :

$$(\star) \qquad \int_a^b : \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

possède les propriétés suivantes.

- Linéarité.
$$\forall\,(f_1,f_2)\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})^2,\quad \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2,\quad \int_a^b \lambda_1.f_1+\lambda_2.f_2 = \lambda_1\int_a^b f_1+\lambda_2\int_a^b f_2$$
- Croissance.
$$\forall\,(f_1,f_2)\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})^2,\quad f_1\leqslant f_2 \Longrightarrow \int_a^b f_1\leqslant\int_a^b f_2$$
- Inégalité triangulaire.
$$\forall\,f\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}),\quad \left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b |f|$$
- Relation de Chasles.
$$\forall\,(f,c)\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})\times[a,b],\quad \int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

(B) Construction d'une intégrale sur $\mathscr{C}_{\text{PM}}([a,b],\mathbf{R})$

On commence par établir un théorème d'approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier, qui résulte du théorème de Heine. Celui-ci est la pierre angulaire du chapitre et permet d'étendre l'intégrale de $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ à $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R})$.

On dispose alors d'une application :

$$(\star\star) \qquad \int_a^b : \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

qui prolonge $(\star)$ et qui possède des propriétés analogues.

- Linéarité.
$$\forall\,(f_1,f_2)\in\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R})^2,\quad \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2,\quad \int_a^b \lambda_1.f_1+\lambda_2.f_2 = \lambda_1\int_a^b f_1+\lambda_2\int_a^b f_2$$
- Croissance.
$$\forall\,(f_1,f_2)\in\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R})^2,\quad f_1\leqslant f_2 \Longrightarrow \int_a^b f_1\leqslant\int_a^b f_2$$
- Inégalité triangulaire.
$$\forall\,f\in\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R}),\quad \left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b |f|$$
- Relation de Chasles.
$$\forall\,(f,c)\in\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R})\times[a,b],\quad \int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

Le théorème sur les sommes de Riemann découle quasi immédiatement de la définition de l'intégrale $(\star\star)$.

(C) Théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions continues et méthodes de calculs

En restreignant $(\star\star)$ à $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ on obtient une application :

$$(\star\star\star) \qquad \int_a^b : \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

qui possède des propriétés analogues

- Linéarité.
$$\forall\,(f_1,f_2)\in\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})^2,\quad \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2,\quad \int_a^b \lambda_1.f_1+\lambda_2.f_2 = \lambda_1\int_a^b f_1+\lambda_2\int_a^b f_2$$
- Croissance.
$$\forall\,(f_1,f_2)\in\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})^2,\quad f_1\leqslant f_2 \Longrightarrow \int_a^b f_1\leqslant\int_a^b f_2$$
- Inégalité triangulaire.
$$\forall\,f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}),\quad \left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b |f|$$
- Relation de Chasles.
$$\forall\,(f,c)\in\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})\times[a,b],\quad \int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

mais aussi une une propriété additionnelle importante.

- Séparation.

$$\forall\, f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}),\quad \left(f \geqslant 0 \text{ et } \int_a^b f = 0\right) \Longrightarrow f = 0$$

La théorie de l'intégrale de Riemann ainsi construite est intimement liée au calcul différentiel. Le résultat qui encode ce lien est le théorème fondamental de l'analyse Il a deux conséquences fondamentales :

- il assure que toute fonction continue sur $[a,b]$ possède une primitive sur $[a,b]$;
- il permet de calculer effectivement des intégrales.

Pour atteindre ce dernier but, on travaillera intensément la fiche sur les méthode de primitivation [PDF].

Deux outils plus sophistiqués et fort pratiques sont également à retravailler (énoncés et, bien sûr, démonstration) :

- la formule d'intégration par parties ;
- la formule de changement de variable.

On étudiera enfin la notion d'intégrale pour une fonction continue par morceaux à valeurs complexes.

Ce travail sur le cours est fondamental.

§ 3. Vrai-Faux

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1 UN CORRIGÉ

La fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ est-elle une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2 UN CORRIGÉ

L'identité :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^{2021}(\ln(7)\cdot x)\cdot \sin^{1977}\left(\sqrt{2}\cdot x\right)}{\cos^{2022}(e^3\cdot x)+\arctan\left(\cosh(x)+\pi^5\right)}\ \mathrm{d}x = 0$$

est-elle vraie ? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3 UN CORRIGÉ

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, continue par morceaux sur $[0,1]$, positive ou nulle sur $[0,1]$ et vérifie $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. La fonction f est-elle nécessairement nulle sur $[0,1]$? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4 UN CORRIGÉ

Soient $n \in \mathbf{N}$, $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et soit $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \in \mathbf{R}[X]$. L'assertion :

$$\int_0^1 P^2(t)\ \mathrm{d}t = 0 \quad\Longrightarrow\quad \left(\forall\, k \in [\![0,n]\!],\quad a_k = 0\right)$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5 UN CORRIGÉ

L'identité :

$$\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\ln^3(2)}{3}$$

est-elle vraie ? Justifier la réponse.

☐

§ 4. Neuf calculs d'intégrales

Énoncé de l'exercice 6 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 7 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{1/e}^{1/e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

□

Énoncé de l'exercice 8 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 9 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^x+3e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 10 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

□

Énoncé de l'exercice 11 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 12 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\cdot\mathrm{Arctan}^2(x)\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 13 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 14 — **Un corrigé**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

□

§ 5. DOUZE CALCULS DE PRIMITIVES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15 UN CORRIGÉ

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}^2(x)$$

en précisant un intervalle de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16 UN CORRIGÉ

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x^7}{(1+x^4)^2}$$

en précisant un intervalle de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17 UN CORRIGÉ

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{8}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)^2}$$

en précisant un intervalle de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18 UN CORRIGÉ

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}$$

en précisant un intervalle de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19 UN CORRIGÉ

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

en précisant un intervalle de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20 UN CORRIGÉ

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \sin^4(x)\cdot\cos^3(x)$$

en précisant un intervalle de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21 UN CORRIGÉ

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \cos^3(x)$$

en précisant un intervalle de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22 **UN CORRIGÉ**

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \sin^4(x)$$

en précisant un intervalle de définition. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23 **UN CORRIGÉ**

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{\cos^4(x) - \sin^4(x)}$$

en précisant un intervalle de définition. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24 **UN CORRIGÉ**

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1 + \tan(x)}{1 + \sin(2x)}$$

en précisant un intervalle de définition. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25 **UN CORRIGÉ**

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\cos^6(x)}{\sin^5(x)}$$

en précisant un intervalle de définition. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26 **UN CORRIGÉ**

Calculer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \sqrt{e^x - 1}$$

en précisant un intervalle de définition. □

§ 6. AUTOUR DE LA SÉPARATION DE L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27 **UN CORRIGÉ**

Q1. — Soient des nombres réels a, b tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Démontrer que f s'annule une fois sur $[a, b]$, i.e. qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Q2. — Soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Démontrer que g possède un point fixe, i.e. qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = c$. □

§ 7. Un lemme de Cesàro pour les intégrales ∗

Énoncé de l'exercice 28 | Un corrigé

Q1. — Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Démontrer que :

$$\frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

□

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1

ÉNONCÉ

Faux.

En effet, la fonction arctan est dérivable sur $]-1,1[$ (en fait arctan est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$) et a pour dérivée la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

qui ne coïncide pas avec la fonction f sur $]-1,1[$ puisque leurs valeurs en $1/2$ diffèrent.

■

Remarque — En décomposant la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-X^2}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-X} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+X}$$

on démontre qu'une primitive de f sur $]-1,1[$ est la fonction :

$$F\colon x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Cette fonction F se trouve être la bijection réciproque (nommée « argument tangente hyperbolique ») de la fonction bijective :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{array}\right. .$$

Un corrigé de l'exercice 2 **Énoncé**

Vrai.

La fonction :

$$f: x \longmapsto \frac{\cos^{2021}(\ln(7)\cdot x)\cdot \sin^{1977}\left(\sqrt{2}\cdot x\right)}{\cos^{2022}(e^3\cdot x)+\arctan\left(\cosh(x)+\pi^5\right)}$$

est (continue et) impaire sur $[-\pi,\pi]$. Comme l'intervalle $[-\pi,\pi]$ est symétrique par rapport à 0, il vient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Rappelons que ce résultat peut être démontré grâce au changement de variable $u=-x$.

■

Remarque — Si nous tracions la représentation graphique de l'intégrande (i.e. de la fonction qu'on intègre) sur $[-\pi,\pi]$, nous observerions un phénomène de compensation d'aires algébriques.

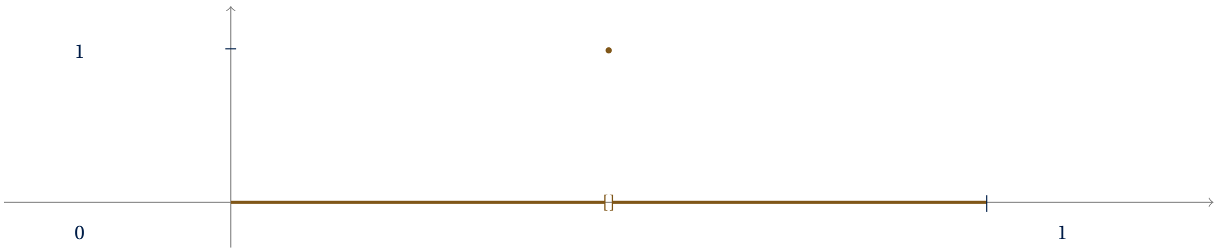
UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 ÉNONCÉ

Faux.

La fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

dont le graphe est représenté ci-dessous, livre un contre-exemple.



■

Remarque — Si l'on demande à f d'avoir une régularité plus forte, à savoir d'être continue (et pas seulement continue par morceaux) sur $[0,1]$, alors la conclusion est valide. Il s'agit d'un cas particulier de la propriété de séparation de l'intégrale pour les fonctions continues sur un segment.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 ÉNONCÉ

Vrai.

Supposons $\int_0^1 P^2(t)\, \mathrm{d}t = 0$.
La fonction $t \longmapsto P^2(t)$ est continue et positive ou nulle sur $[0,1]$.
D'après la propriété de séparation de l'intégrale pour des fonctions continues sur un segment :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad P^2(t) = 0\,.$$

Par intégrité de $\mathbf{R}$:

$$\forall\, t \in [0,1], \quad P(t) = 0\,.$$

Comme le polynôme P possède une infinité de racines, P est le polynôme nul.
Par définition, tous les coefficients de P sont donc nuls, i.e. $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 ÉNONCÉ

Vrai.

On rappelle que, si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, si $u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I et si $n \in \mathbf{N}$, alors une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto u'(x) \cdot u^n(x)$$

est donnée par la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1}(x).$$

Grâce à ce résultat de cours (qui admet des généralisations à connaître) :

$$\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln^2(x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^3(x)}{3}\right]_1^2 = \frac{\ln^3(2)}{3}.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 **ÉNONCÉ**

Pour tout $x \in \mathbf{R}_{>0}$:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{8}} = \exp\left(\frac{1}{8}\ln(x)\right).$$

Notons que l'identité n'est pas valide pour $x = 0$ car le membre de droite n'est pas défini.

Donc une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ est :

$$x \longmapsto \frac{8}{9} \cdot x^{\frac{9}{8}}$$

sur $\mathbf{R}_{>0}$. Cette dernière fonction admet un prolongement par continuité en 0 défini par :

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{8}{9} x^{\frac{9}{8}} & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

On vérifie que :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{8}{9} \cdot x^{\frac{1}{8}} \xrightarrow[x \longrightarrow 0^+]{} 0 = f(0).$$

Donc F est dérivable en 0 à droite avec comme nombre dérivée en 0 à droite $f(0)$.

Par suite la fonction F est une primitive de f sur $\mathbf{R}_{\geq 0}$. Nous pouvons remarquer :

$$F(x) = \frac{8}{9} x \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Ainsi :

$$\int_0^1 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\, \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{8}{9}.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 **ÉNONCÉ**

Pour tout $t \in \mathbf{R}_{>0}$:

$$\frac{1}{t\ln(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}.$$

On reconnaît ainsi une « forme » $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, où $u\colon\ t \longmapsto \ln(t)$. Ainsi :

$$\int_{1/e}^{1/e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = [\ln(|\ln(t)|)]_{1/e}^{1/e^3} = \ln(3).$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8

ÉNONCÉ

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}$, mais pour ce faire le point 0 pose problème. En effet $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (mais cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$).

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\int_\varepsilon^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int_\varepsilon^1 2 \cdot u \cdot e^u \, \mathrm{d}u = 2\int_\varepsilon^1 u \cdot e^u \, \mathrm{d}u. \tag{1}$$

Par intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^1 u \cdot e^u \, \mathrm{d}u = \left[u \cdot e^u\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 e^u \, \mathrm{d}u = e - \varepsilon \cdot e^\varepsilon - \left(e - e^\varepsilon\right) = -\varepsilon \cdot e^\varepsilon + e^\varepsilon. \tag{2}$$

D'après (1) et (2) :

$$\int_\varepsilon^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\left(-\varepsilon e^\varepsilon + e^\varepsilon\right). \tag{3}$$

La fonction $x \longmapsto e^{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,1]$, donc :

$$\int_\varepsilon^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \qquad \text{[conséquence du théorème fondamental de l'analyse.]} \tag{4}$$

De $-\varepsilon e^\varepsilon + e^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} 1$, (3) et (4), nous déduisons :

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9 **ÉNONCÉ**

On effectue le changement de variable $u = e^x$.

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^x + 3e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{u^2+3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u. \tag{5}$$

On calcule l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u$ à l'aide du changement de variable $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$:

$$\int_1^3 \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}ud = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{v^2+1}\sqrt{3}\,\mathrm{d}\,v = \sqrt{3}\,[\mathrm{Arctan}(v)]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

d'où :

$$\int_1^3 \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u = \sqrt{3}\left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] \tag{6}$$

De (5), (6), $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ nous déduisons :

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^x + 3e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10 ÉNONCÉ

Nous effectuons le changement de variable $t = \cos(x)$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-(\cos(x)^2}\,(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} |\sin(x)|\,\sin(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$. Donc :

$$\int_0^{\pi/2} |\sin(x)|\,\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x$$

d'où :

$$\int_0^{\pi/2} |\sin(x)|\,\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

De (7) et (8), nous déduisons :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

■

Remarque — Nous pourrions aussi donner une preuve géométrique du résultat, car nous calculons en fait l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

Un corrigé de l'exercice 11

Énoncé

Nous effectuons deux intégrations par parties successives, en abaissant à chaque fois le degré du monôme $x^?$ qui apparaît.

$$\int_0^1 x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \tag{9}$$

$$\int_0^1 x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1 \tag{10}$$

De (9) et (10) nous déduisons :

$$\int_0^1 x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2 - \frac{5}{e}.$$

■

Remarque — Nous aurions pu procéder différemment en déterminant des réels a, b, c tels que la fonction :

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(ax^2 + bx + c\right) \cdot e^{-x} \end{array} \right.$$

est une primitive de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \cdot e^{-x}. \end{array} \right.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 12 **ÉNONCÉ**

Par intégration par parties

$$\int_0^1 x\cdot \mathrm{Arctan}^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{Arctan}^2(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où :

$$\int_0^1 x\cdot \mathrm{Arctan}^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\cdot \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Nous observons :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\cdot \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\cdot \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Par intégration par parties :

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\times \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

d'où :

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2). \tag{13}$$

Nous calculons :

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\mathrm{Arctan}(x)}_{u(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}^2(x)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}. \tag{14}$$

De (11), (12), (13) et (14), nous déduisons :

$$\int_0^1 x\cdot \mathrm{Arctan}^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 13 **ÉNONCÉ**

Nous observons :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Nous effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{0} -\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \tag{16}$$

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-X^2}$ est :

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{(1-X)(1+X)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-X} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+X}.$$

Par suite :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

d'où :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\left[-\ln(|1-u|)\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\,\left[\ln(|1+u|)\right]_0^{1/2} = \ln\left(\sqrt{3}\right). \tag{17}$$

De (15), (16) et (17), on déduit :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\sqrt{3}\right).$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 14 ÉNONCÉ

La forme canonique de X^2+X+1 est :

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Nous observons :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$ nous effectuons le changement de variable :

$$u=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot x+\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{3}}{2}\,[\mathrm{Arctan}(u)]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{12} \tag{19}$$

De (18) et (19) nous déduisons :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{9}.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 15 **ÉNONCÉ**

On se place sur $I =]-1,1[$.

En , nous allons utiliser l'intégration par parties, pour lesquelles la régularité $\mathscr{C}^1$ compte.

La fonction $f : x \longmapsto \text{Arcsin}^2(x)$ est continue sur I, et donc la fonction

$$F : x \longmapsto \int_0^x \text{Arcsin}^2(t)\ \mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. Précisément, il s'agit de l'unique primitive de f sur I qui s'annule en 0.

Soit $x \in I$.
Nous intégrons par parties pour obtenir :

$$F(x) = \int_0^x 1 \cdot \text{Arcsin}^2(t)\ \mathrm{d}t = \Big[t \cdot \text{Arcsin}^2(t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t$$

et donc :

$$F(x) = x \cdot \text{Arcsin}^2(x) + 2\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{20}$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t$, nous effectuons une nouvelle intégration par parties :

$$\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t = \Big[\sqrt{1-t^2} \cdot \text{Arcsin}(t)\Big]_0^x - \int_0^x 1\ \mathrm{d}t$$

d'où :

$$\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t = \sqrt{1-x^2} \cdot \text{Arcsin}(x) - x \tag{21}$$

De (20) et (21) nous déduisons que

$$F(x) = x \cdot \text{Arcsin}^2(x) + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \text{Arcsin}(x) - 2x.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 16 **ÉNONCÉ**

On se place sur $I = \mathbf{R}$.

La fonction $g\colon x \longmapsto \dfrac{x^7}{(1+x^4)^2}$ est continue sur I, et donc la fonction :

$$G\colon x \longmapsto \int_0^x \frac{t^7}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de g sur I.

Soit $x \in I$.
On effectue le changement de variable $u = t^4$:

$$G(x) = \int_0^{x^4} \frac{1}{4}\frac{u}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^{x^4} \frac{(1+u)-1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$$

d'où :

$$G(x) = \frac{1}{4}\left(\int_0^{x^4} \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - \int_0^{x^4} \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\right) \tag{22}$$

Or :

$$\int_0^{x^4} \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = [\ln(|1+u|)]_0^{x^4} = \ln(1+x^4) \tag{23}$$

et :

$$\int_0^{x^4} \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^{x^4} = 1 - \frac{1}{1+x^4}. \tag{24}$$

De (22), (23) et (24), nous déduisons :

$$G(x) = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{4}.$$

Par suite la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x^4}$$

est une primitive de g sur $\mathbf{R}$.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 17 **ÉNONCÉ**

On se place sur $I =]-1,1[$.

- La décomposition en éléments simples de $\dfrac{8}{(X^2-1)\,(X^2+1)^2}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{8}{(X^2-1)\,(X^2+1)^2} &= \frac{8}{(X-1)\,(X+1)\,(X^2+1)^2}\\ &= \frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}-2\,\frac{1}{1+X^2}-4\,\frac{1}{\left(X^2+1\right)^2}.\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in I$:

$$\frac{8}{(x^2-1)\,(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-2\,\frac{1}{1+x^2}-4\,\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \tag{25}$$

- Pour répondre à la question, il nous reste essentiellement à primitiver la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ sur I.

Cette fonction étant continue sur I, une de ses primitives sur I est $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in I$.
On effectue le changement de variable $t = \tan(u)$ pour obtenir :

$$\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{Arctan}(x)} \frac{1}{1+\tan^2(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\mathrm{Arctan}(x)} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

En linéarisant $\cos^2$ à l'aide d'une formule de trigonométrie :

$$\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{Arctan}(x)} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}\sin(2u)+\frac{1}{2}u\right]_0^{\mathrm{Arctan}(x)}.$$

Donc :

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\sin\left(2\,\mathrm{Arctan}(x)\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x)$$

est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ sur I.

Nous remarquons :

$$\begin{aligned}\sin\left(2\,\mathrm{Arctan}(x)\right) &= 2\sin\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\cos\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\\ &= 2\tan\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\cos^2\left(\mathrm{Arctan}(x)\right) \qquad \left[\mathrm{Arctan}(x) \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi\right]\\ &= \frac{2x}{1+\tan^2\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)}\\ &= \frac{2x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x)$$

est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ sur I.

- De l'étude précédente et de (25), nous déduisons qu'une primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{8}{(x^2-1)\,(x^2+1)^2}$$

sur I est :

$$x \longmapsto \ln(|x-1|)-\ln(|x+1|)-4\,\mathrm{Arctan(x)}-2\,\frac{x}{1+x^2} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-4\,\mathrm{Arctan(x)}-2\,\frac{x}{1+x^2}.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 18

ÉNONCÉ

On se place sur $I = \mathbf{R}$.

La fonction :

$$h\colon x \longmapsto \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{2}{2+e^x+e^{-x}}$$

est continue sur I. Donc la fonction :

$$H\colon x \longmapsto \int_0^x \frac{2}{2+e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de h sur I.

Soit $x \in I$.
On effectue le changement de variable $u = e^x$.

$$H(x) = \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^{e^x} \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = 2\left[-\frac{1}{(1+u)}\right]_1^{e^x} = 2 - \frac{2}{1+e^x}$$

Nous en déduisons que la fonction :

$$x \longmapsto -\frac{2}{1+e^x}$$

est une primitive de la fonction h.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 19 | ÉNONCÉ

On se place sur $\mathbf{R}_{>0}$.

On ne considère pas le point 0, car nous souhaitons que la fonction racine cubique soit $\mathscr{C}^1$ sur notre intervalle d'étude.
La fonction $k\colon x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right)$ est continue sur I. Donc la fonction :

$$K\colon x \longmapsto \int_1^x \operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de k sur I.

Soit $x \in I$.
On effectue le changement de variable $u = \sqrt[3]{t} = t^{\frac{1}{3}}$.

$$K(x) = \int_1^{\sqrt[3]{x}} 3u^2 \operatorname{Arctan}(u)\,\mathrm{d}u = 3\int_1^{\sqrt[3]{x}} u^2 \operatorname{Arctan}(u)\,\mathrm{d}u. \tag{26}$$

Par intégration par parties :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} u^2 \operatorname{Arctan}(u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\operatorname{Arctan}(u)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} - \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{u^3}{3}\,\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

et donc :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} u^2 \operatorname{Arctan}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{x}{3}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{u^3}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \tag{27}$$

Nous calculons :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{\overbrace{u^3}^{(u+u^3)-u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} u - \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)\right]_1^{\sqrt[3]{x}}$$

et donc :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{u^3}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2). \tag{28}$$

De (26), (27), (28), nous déduisons

$$K(x) = x\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Donc la fonction

$$x \longmapsto x\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)$$

est une primitive de k sur I.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 20 **ÉNONCÉ**

On se place sur $I = \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\sin^4(x)\cos^3(x) &= \sin^4(x)\cos^2(x)\cos(x)\\ &= \sin^4(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)\\ &= \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^4(x)}_{u^4(x)} - \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^6(x)}_{u^6(x)}\end{aligned}$$

Donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^4(x)\cos^3(x)$ sur I est la fonction

$$x \longmapsto \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7}.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 21 **ÉNONCÉ**

On se place sur $I = \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x) = (1-\sin^2(x))\cos(x) = \cos(x) - \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^2(x)}_{u^2(x)}$$

Donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^3(x)$ sur I est la fonction :

$$x \longmapsto \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}.$$

■

Un corrigé de l'exercice 22 | **Énoncé**

On se place sur $I = \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Nous linéarisons $\sin^4(x)$, qui égale :

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 && \text{[Formule d'Euler]}\\
&= \frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4\\
&= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(e^{ix}\right)^k\left(-e^{ix}\right)^{4-k} && \text{[Formule du binôme de Newton]}\\
&= \frac{1}{16}\left(\binom{4}{0}\left(e^{ix}\right)^0\left(-e^{ix}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(e^{ix}\right)^1\left(-e^{ix}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(e^{ix}\right)^2\left(-e^{ix}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(e^{ix}\right)^3\left(-e^{ix}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(e^{ix}\right)^4\left(-e^{ix}\right)^0\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(e^{-i4x} - 4e^{-i2x} + 6 - 4e^{i2x} + e^{i4x}\right) && \text{[Formule de Moivre et relation fonctionnelle]}\\
&= \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{-i4x} + e^{i4x}}_{2\cos(4x)} - 4\left(\underbrace{e^{-i2x} + e^{i2x}}_{2\cos(2x)}\right) + 6\right) && \text{[Formule d'Euler]}\\
&= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^4(x)$ sur I est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 23 ÉNONCÉ

Nous nous plaçons sur $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

Nous observons que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\frac{1}{\cos^4(x)-\sin^4(x)} = \frac{1}{\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)} = \frac{1}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = \frac{1}{\cos(2x)}.$$

La fonction :

$$\ell\colon x \longmapsto \frac{1}{\cos^4(x)-\sin^4(x)} = \frac{1}{\cos(2x)}$$

est continue sur I. Donc une de ses primitives sur I est donnée par :

$$L\colon x \longmapsto \int_0^x \frac{1}{\cos(2t)}\, \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$.

Nous observons :

$$L(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(2t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cos(2t)}{\cos^2(2t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cos(2t)}{1-\sin^2(2t)}\, \mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $u = \sin(2t)$ pour trouver :

$$L(x) = \int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{1-u^2}\, \mathrm{d}u. \tag{29}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-U^2}$ est donnée par :

$$\frac{1}{1-U^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{U+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{U-1}. \tag{30}$$

De (29) et (30), nous déduisons :

$$L(x) = \frac{1}{4}\int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{u+1}\, \mathrm{d}u - \frac{1}{4}\int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{u-1}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sin(2x)+1}{\sin(2x)-1}\right).$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 24 ÉNONCÉ

On se place sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Soit $x \in I$. Nous observons :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)} &= \frac{1+\tan(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)} \\
&= \frac{1+\tan(x)}{(\cos(x)+\sin(x))^2} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}\,\frac{1+\tan(x)}{(1+\tan(x))^2} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}\,\frac{1}{1+\tan(x)}.
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons une « forme » du type $u'(x)\cdot\dfrac{1}{u(x)}$, avec $u(x) = 1+\tan(x)$.

Donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)}$ sur I est donnée par :

$$x \longmapsto \ln(|1+\tan(x)|) = \ln(1+\tan(x)).$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 25 ÉNONCÉ

Nous nous plaçons sur $I =]0, \pi[$.

La fonction $m\colon x \longmapsto \dfrac{\cos^6(x)}{\sin^5(x)}$ est continue sur I.
Donc une de ses primitives sur I est donnée par :

$$M\colon x \longmapsto \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos^6(t)}{\sin^5(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos^6(t)}{\sin^6(t)} \cdot \sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos^6(t)}{(1-\cos^2(t))^3} \cdot \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in I$.

Nous effectuons le changement de variable $u = \cos(t)$.

$$M(x) = -\int_0^{\cos(x)} \frac{u^6}{(1-u^2)^3}\,\mathrm{d}u. \tag{31}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{U^6}{(1-U^2)^3}$ est donnée par :

$$\frac{U^6}{(1-U^2)^3} = -1 + \frac{15}{16}\frac{1}{U+1} - \frac{9}{16}\frac{1}{(U+1)^2} + \frac{1}{8}\frac{1}{(U+1)^3} - \frac{15}{16}\frac{1}{U-1} - \frac{9}{16}\frac{1}{(U-1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(U-1)^3}. \tag{32}$$

De (31) et (32), nous déduisons que $M(x)$ égale :

$$\int_0^{\cos(x)} 1 - \frac{15}{16}\frac{1}{u+1} + \frac{9}{16}\frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(u+1)^3} + \frac{15}{16}\frac{1}{u-1} + \frac{9}{16}\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{8}\frac{1}{(u-1)^3}\,\mathrm{d}u.$$

Cette intégrale vaut :

$$\left[u - \frac{15}{16}\ln(u+1) - \frac{9}{16}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(u+1)^2} + \frac{15}{16}\ln(u-1) - \frac{9}{16}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{16}\frac{1}{(u-1)^2}\right]_0^{\cos(x)}.$$

En évaluant ce crochet, il vient :

$$M(x) = \cos(x) - \frac{15}{16}\ln(\cos(x)+1) - \frac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)+1)^2} + \frac{15}{16}\ln(\cos(x)-1) - \frac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)-1} - \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)-1)^2} + \text{« constante réelle »}.$$

Ainsi la fonction :

$$x \longmapsto \cos(x) - \frac{15}{16}\ln(\cos(x)+1) - \frac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)+1)^2} + \frac{15}{16}\ln(\cos(x)-1) - \frac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)-1} - \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)-1)^2}$$

est une primitive de la fonction m sur I.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 26 **ÉNONCÉ**

Nous nous plaçons sur $I =]0, +\infty[$.

La fonction $n\colon x \longmapsto \sqrt{e^x - 1}$ est continue sur I, donc une de ses primitives sur I est donnée par :

$$N\colon x \longmapsto \int_1^x \sqrt{e^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$.
Nous effectuons le changement de variable $u = e^t$.

$$N(x) = \int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{\left(\sqrt{u-1}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u \tag{33}$$

Nous effectuons le changement de variable $v = \sqrt{u-1}$:

$$\int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{\left(\sqrt{u-1}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2v^2}{v^2+1}\,\mathrm{d}v = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{(v^2+1)-1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v$$

d'où :

$$\int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{\left(\sqrt{u-1}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} 1 - \frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v \tag{34}$$

De (33) et (34) nous déduisons :

$$N(x) = 2\,\left[v - \mathrm{Arctan}(v)\right]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{e^x-1}\right) + \text{« constante réelle ».}$$

Ainsi la fonction :

$$x \longmapsto 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{e^x-1}\right)$$

est une primitive de n sur I.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 27 **ÉNONCÉ**

On pourra visionner un corrigé vidéo en cliquant sur le lien suivant [YouTube] (12 minutes).

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 28 **ÉNONCÉ**

Q1. — Quitte à remplacer la fonction f par la fonction $f-\ell$, nous pouvons supposer que $\ell = 0$.

Il nous faut établir que

$$\frac{1}{x}\cdot\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

i.e. :

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,A\in\mathbf{R}_+,\quad \forall\,x\geqslant A,\quad \left|\frac{1}{x}\cdot\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon>0$.

- Comme :

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

il existe $A_1\in\mathbf{R}_+^*$ (que nous fixons) tel que :

$$\forall\,t\geqslant A_1,\quad |f(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x\geqslant A_1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x}\cdot\int_{A_1}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{x}\cdot\int_{A_1}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t && [\text{inégalité triangulaire}]\\
&\leqslant \frac{1}{x}\cdot\int_{A_1}^x \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t && [\text{pour tout } t\in[A_1,x],\ t\geqslant A_1, \text{ et croissance de l'intégrale}]\\
&= \frac{x-A_1}{x}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(\star)\quad \forall\,x\geqslant A_1,\quad \left|\frac{1}{x}\cdot\int_{A_1}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

- Comme $\displaystyle\int_0^{A_1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une constante :

$$\frac{1}{x}\cdot\int_0^{A_1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc, il existe $A_2\in\mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$(\star\star)\quad \forall\,x\geqslant A_2,\quad \left|\frac{1}{x}\cdot\int_0^{A_1} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

- Soit $x\geqslant A:=\max\{A_1,A_2\}$, de sorte que $x\geqslant A_1$ et $x\geqslant A_2$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x}\cdot\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{1}{x}\cdot\int_0^{A_1} f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\cdot\int_{A_1}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| && [\text{relation de Chasles}]\\
&\leqslant \left|\frac{1}{x}\cdot\int_0^{A_1} f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\frac{1}{x}\cdot\int_{A_1}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| && [\text{inégalité triangulaire}]\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} && [\,x\geqslant A_1,\ x\geqslant A_2,\ (\star) \text{ et } (\star\star)\,].
\end{aligned}$$

■

Remarque — Il s'agit d'une variante de la démonstration donnée du lemme de Cesàro pour les suites, qui s'énonce comme suit. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite possédant une limite ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$. Alors :

$$\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$