FONCTIONS RÉELLES DE LA VARIABLE RÉELLE

RÉVISIONS 3

par David Blottière, le 25 août 2023 à 21h15

« Le sage a la tangente et le fou la sécante. Jamais sur cette terre et dans notre horizon, on a tout à fait tort ni tout à fait raison. »

Océan, Victor Hugo

SOMMAIRE

§ 1. COURS

On commencera par une étude minutieuse :

- du polycopié de cours [PDF] sur les fonctions de la variables réelles à valeurs dans **R** ou **C** ;
- du formulaire [PDF] sur la dérivation ;
- du polycopié de cours [PDF] sur les limites, la continuité et la dérivabilité ;
- du polycopié de cours [PDF] sur les fonctions convexes.

On reverra les constructions et définitions des fonctions usuelles (e.g. $\exp, \ln, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}, \mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arctan}$, les fonctions puissances). On s'efforcera de maîtriser leurs principales propriétés et les démonstrations d'icelles.

On vérifiera ensuite que le formulaire de dérivation est su, en prêtant bien sûr attention aux ensembles de dérivabilité.

Viendra le temps d'appréhender les définitions formelles des concepts premiers. On apprendra toutes les définitions formelles de la notion de limite d'une fonction de la variable réelle, en essayant de les illustrer par des graphiques, pour en avoir une image mentale. Une bonne maîtrise de ces définitions formelles (avec des quantificateurs) est essentielle.

On étudiera de nouveau la définition de la continuité, plus spécifiquement les quatre résultats cruciaux sur les fonctions continues indiqués ci-dessous :

- le théorème des valeurs intermédiaires ;
- le théorème sur l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone ;
- le théorème des bornes atteintes ;
- le théorème sur l'image continue d'un segment.

On devra être en mesure d'énoncer précisément ces théorèmes et de savoir les démontrer, en mettant en lumière le rôle joué par la continuité.

Viendra alors le temps d'étudier la notion de dérivabilité, en s'attachant à bien comprendre le rôle joué par les taux d'accroissement. On travaillera alors intensément les théorèmes suivants (énoncés et démonstrations) :

- le théorème de Rolle ;
- le théorème des accroissements finis ;
- le théorème sur la limite de la dérivée ;
- les caractérisations données par la dérivée (e.g. le caractère constant, la croissance, la stricte croissance).

On terminera par l'étude des fonctions convexes. On portera plus spécifiquement notre attention sur :

- la définition de fonction convexes ;
- l'inégalité de Jensen ;
- l'inégalité des trois pentes ;
- l'inégalité donnée par une tangente pour une fonction convexe dérivable ;
- les caractérisations données par la dérivée (première ou seconde).

La convexité est par essence géométrique. On veillera à croquer bon nombre de graphiques pour ancrer les notions dans notre esprit (e.g. esquisser une courbe de fonction convexe et prendre appui dessus pour retrouver l'inégalité des trois pentes).

Ce travail sur le cours est fondamental.

§ 2. VRAI-FAUX

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1 UN CORRIGÉ

L'assertion :

$$\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

est-elle vraie ? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2 UN CORRIGÉ

La fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3 UN CORRIGÉ

Soit $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}^*$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^*, \quad f'(x) < 0.$$

La fonction f est-elle strictement décroissante sur $\mathbf{R}^*$? Justifier la réponse.

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4 UN CORRIGÉ

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction qui admet une limite $\ell \in \mathbf{R}_{>0}$ en 0. Existe-t-il un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) > 0$, i.e. f est-elle strictement positive sur un voisinage de 0 .

☐

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5 UN CORRIGÉ

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soient f une fonction dérivable sur le segment $[a, b]$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un maximum qu'elle atteint en un point x_M de $[a, b]$. L'assertion :

$$f'(x_M) = 0$$

est-elle vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

☐

§ 3. UNE IDENTITÉ METTANT EN JEU LA FONCTION Arccos

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6 UN CORRIGÉ

Démontrer que :

$$\forall\, t \in [-1, 1] \quad 2 \cdot \mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+t}{2}}\right) = \mathrm{Arccos}(t).$$

☐

§ 4. FONCTION CONTINUE SUR $\mathbf{R}$ DE LIMITE $+\infty$ EN $-\infty$ ET EN $+\infty$

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7 UN CORRIGÉ

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Démontrer que f possède un minimum sur $\mathbf{R}$.

□

§ 5. FONCTIONS CONVEXES ET ÉQUIVALENT DE SOMMES PARTIELLES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8 UN CORRIGÉ

On considère une fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles. On suppose que f est convexe et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$.

Q1. — Démontrer :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \forall t \in [0, x], \quad f(t) \leqslant \left(1 - \frac{t}{x}\right) \cdot f(0) + \frac{t}{x} \cdot f(x).$$

Q2. — En déduire que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad x \cdot \left(\frac{f(0) + f(x)}{2}\right) \geqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère une fonction h définie sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, qui est convexe et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$. On suppose de plus que $h(0) = h'(0) = 0$.

Q3. — Démontrer que la fonction h est positive sur $\mathbf{R}_+$.

Soit H la fonction définie par :

$$H \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2 \cdot h'(x) \cdot \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t - (h(x))^2. \end{array} \right.$$

Q4. — Démontrer que la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et étudier ses variations sur $\mathbf{R}_+$.

Q5. — En déduire que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \frac{x \cdot h'(x) \cdot h(x)}{2} - h'(x) \cdot \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h(x)}{2} \cdot \big(x \cdot h'(x) - h(x)\big).$$

Q6. — Démontrer que $h'(1) = 0$ implique que h est nulle sur $[0, 1]$.

Q7. — En déduire :

$$\frac{h(1)}{2} - \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h'(1)}{8}.$$

Soit g une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, qui est convexe et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$.

Q8. — Démontrer que :

$$\frac{g(1) + g(0)}{2} - \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{g'(1) - g'(0)}{8}.$$

Indication : On pourra considérer la fonction $h : x \longmapsto g(x) - g(0) - x \cdot g'(0)$.

Q9. — En considérant, pour tout $k \in \mathbf{N}$, les fonctions g_k définies par :

$$g_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x+k) \end{array} \right.$$

démontrer :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(n) - f'(0)}{8}.$$

Q10. — Déduire de ce qui précède un équivalent simple de :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (1 + 3k)^{\frac{3}{2}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

□

§ 6. UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE ET FONCTIONS EXPONENTIELLES *

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9 UN CORRIGÉ

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continues sur $\mathbf{R}$ et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

□

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 **ÉNONCÉ**

Faux. Par essence, la fonction Arccos est la bijection réciproque de la fonction bijective :

$$\cos_{\mid [0,\pi]}^{\mid [-1,1]} \left| \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x). \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\text{Arccos} \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos(x) = y. \end{array} \right.$$

Ainsi $\text{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ appartient-il à $[0,\pi]$ et ne peut donc pas valoir $-\frac{\pi}{4}$.

■

Remarque — D'après la définition de la fonction Arccos rappelée ci-dessus :

$$(\star) \quad \forall x \in [0,\pi], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x.$$

Nous calculons alors :

$$\begin{aligned} \text{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) &= \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) && [\text{parité de la fonction cos}] \\ &= \frac{\pi}{4} && \left[\frac{\pi}{4} \in [0,\pi] \text{ et propriété } (\star)\right]. \end{aligned}$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 ÉNONCÉ

Vrai.

D'après les résultats de dérivabilité des fonctions usuelles et les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Il reste à établir la dérivabilité de f en 0.

Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$0 \leqslant \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$$

Par théorème d'encadrement :

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} 0$$

et donc :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} 0\,.$$

La fonction f est donc dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$).

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 **ÉNONCÉ**

Faux. Un contre-exemple est donnée par la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. .$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Or la fonction f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbf{R}^*$. En effet, $-1 < 2$, mais $f(-1) < f(2)$.

■

Remarque — Dans la caractérisation de la stricte croissance, le domaine de la définition est un intervalle. Ici, $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle et donc ces théorèmes ne s'appliquent pas. En revanche, on peut l'appliquer sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0,+\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 ÉNONCÉ

Par définition de la notion de limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad |x - 0| \leqslant \alpha, \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon \, .$$

En spécialisant à $\varepsilon \leftarrow \dfrac{\ell}{2} > 0$, nous obtenons l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| < \frac{\ell}{2} \, .$$

Soit $x \in]-\alpha, \alpha[$. Alors $|x| \leqslant \alpha$ et donc :

$$-\frac{\ell}{2} < f(x) - \ell < \frac{\ell}{2}.$$

Nous en déduisons que $f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0$.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 ÉNONCÉ

Faux. Un contre-exemple est donné par la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2-x \end{array} \right.$$

qui est affine, donc dérivable sur $[0,1]$. Son maximum est 2 et il est atteint au seul point $x_M = 0$. Or $f'(x_M) = -1 \neq 0$. ■

Remarque — Dans la condition nécessaire d'extremum du cours/programme, le point où l'extremum est atteint est intérieur à l'intervalle, i.e. il ne s'agit pas de l'une de ses bornes. Dans la cas où la fonction atteint un extremum en un point du bord, on ne peut pas affirmer que la dérivée s'annule en ce point, comme le montre le contre-exemple ci-dessus.

Un corrigé de l'exercice 6 **Énoncé**

On introduit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+t}{2}}\right). \end{array}\right.$$

Étudions la régularité de cette fonction. La fonction f s'écrit $w \circ v \circ u$ où

$$u \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \dfrac{1+t}{2} \end{array}\right. \qquad v \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}\right. \qquad w \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & 2\cdot \operatorname{Arccos}(t) \end{array}\right.$$

et est donc continue sur $[-1,1]$, comme composée de fonctions continues. De plus, comme pour tout $t \in]-1,1[$

$$u(t) \in]0,1[\qquad v(u(t)) \in]0,1[$$

et comme u est dérivable sur $]-1,1[$, v est dérivable sur $]0,1[$ et w est dérivable sur $]0,1[$, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, comme composée de fonctions dérivables.

On calcule :

$$\forall\, t \in]-1,1[\quad f'(t) = (w\circ v\circ u)'(t) = u'(t)\, v'(u(t))\, w'(v(u(t)) = 2\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+t}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+t}{2}\right)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arccos}'(t)\,.$$

Comme $]-1,1[$ est un intervalle, il existe une constante réelle k telle que :

$$(\star) \qquad \forall\, t \in]-1,1[\quad f(t) = \operatorname{Arccos}(t) + k\,.$$

Comme $\operatorname{Arccos}(0)$ est l'unique élément $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos(x) = 0$:

$$\operatorname{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$$

et comme $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est l'unique élément $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

l'identité $f(0) = \operatorname{Arccos}(0)$, déduite de $(\star)$ par spécialisation à $t \leftarrow 0 \in]-1,1[$, livre $k = 0$. Ainsi

$$(\star\star) \qquad \forall\, t \in]-1;1[\quad f(t) = \operatorname{Arccos}(t)\,.$$

Nous allons « prolonger par continuité l'identité $(\star\star)$ en -1 et 1. Comme les fonctions f et Arccos sont continues sur $[-1;1]$:

$$f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) \underset{\text{cf. }(\star\star)}{=} \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arccos}(-1)$$

et

$$f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) \underset{\text{cf. }(\star\star)}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arccos}(1)\,.$$

■

Remarque — Nous avons résolu cet exercice en adoptant la même stratégie que celle qui nous a permis d'établir les identités :

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arccos}(x) + \sin(x) = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^*, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Nous pouvons ici envisager une autre approche, plus élémentaire, ne reposant pas sur le calcul différentiel.

Fixons $t \in [-1,1]$ et posons $\theta = \operatorname{Arccos}(t) \in [0,\pi]$. Par formule de duplication :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}.$$

En appliquant la fonction racine carrée à ces deux quantités positives ou nulles, il vient :

$$\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}\,.$$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$ et donc :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}.$$

En appliquant la fonction Arccos à ces deux nombres appartenant à $[-1,1]$, il vient :

$$(\star) \qquad \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}\right).$$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in [0,\pi]$:

$$\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{\theta}{2}.$$

L'identité $(\star)$ se réécrit donc :

$$\frac{\operatorname{Arccos}(t)}{2} = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+\cos(\operatorname{Arccos}(t))}{2}}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+t}{2}}\right)$$

la dernière identité résultant de

$$\cos(\operatorname{Arccos}(t)) = t \qquad [t \in [-1,1]]$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 | ÉNONCÉ

Cf. vidéo [YouTube] (19 minutes).

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8 ÉNONCÉ

Q1. — Comme la fonction f est convexe sur $\mathbf{R}_+$:

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda \cdot a + (1-\lambda)\cdot b) \leqslant \lambda \cdot f(a) + (1-\lambda)\cdot f(b).$$

Soient $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $t \in [0,x]$. En spécialisant l'assertion ci-dessus à :

$$a \leftarrow x \in \mathbf{R}_+ \qquad b \leftarrow 0 \in \mathbf{R}_+ \qquad \lambda \leftarrow \frac{t}{x} \in [0,1]$$

il vient :

$$f\left(\frac{t}{x}\cdot x + \left(1-\frac{t}{x}\right)\cdot 0\right) \leqslant \frac{t}{x}\cdot f(x) + \left(1-\frac{t}{x}\right)\cdot f(0)$$

qui se réécrit :

$$f(t) \leqslant \left(1-\frac{t}{x}\right)\cdot f(0) + \frac{t}{x}\cdot f(x).$$

■

Q2. — L'identité à établir est claire si $x = 0$.
Supposons donc $x > 0$. D'après la question 1 et la croissance de l'intégrale sur le segment $[0,x]$ $(0 < x)$, il vient :

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)\cdot f(0) + \frac{t}{x}\cdot f(x)\ \mathrm{d}t = x\cdot\left(\frac{f(0)+f(x)}{2}\right).$$

■

Q3. — Le graphe d'une fonction convexe dérivable est situé au-dessus de ses tangentes. En particulier, la courbe représentative de h, d'équation $y = h(x)$, est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'équation :

$$y = h'(0)\cdot(x-0) + h(0).$$

Ainsi :

$$\forall x \in I, \quad h(x) \geqslant h'(0)\cdot(x-0) + h(0) = 0.$$

■

Q4. — La fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$, donc h' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbf{R}_+$, d'après le théorème fondamental de l'analyse. Par théorème d'opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, nous en déduisons que la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.

Un calcul de dérivée nous livre :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad H'(x) = 2\cdot h''(x)\cdot\int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t.$$

La convexité de la fonction h livre la positivité de la fonction h''. D'après la question 3 et la croissance de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Nous en déduisons que la fonction H' est positive ou nulle sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$. D'après le critère différentiel de monotonie, la fonction H est croissante sur $\mathbf{R}$.

■

Q5. — Soit $x \in \mathbf{R}_+$. D'après la question 4 :

$$H(x) = 2\cdot h'(x)\cdot\int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t - (h(x))^2 \geqslant 0 = H(0).$$

Cette inégalité entraîne :

$$\frac{x\cdot h'(x)\cdot h(x)}{2} - h'(x)\cdot\int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{h(x)}{2}\cdot\big(x\cdot h'(x) - h(x)\big).$$

■

Q6. — Supposons que $h'(1) = 0$. La fonction f est convexe dérivable sur $[0,1]$ et donc sa fonction dérivée est croissante sur $[0,1]$. Nous en déduisons que :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 = h'(0) \leqslant h'(x) \leqslant h'(1) = 0.$$

Nous en déduisons que la fonction h' est nulle sur l'intervalle $[0,1]$. La fonction h est donc constante sur ce même intervalle. Comme $h(0) = 0$, il vient :

$$\forall x \in [0,1], \quad h(x) = 0.$$

■

Q7. — D'après la question 6, l'inégalité est claire si $h'(1) = 0$.

Supposons donc $h'(1) \neq 0$. Comme h est convexe sur $\mathbf{R}_+$, la fonction h' est croissante sur $\mathbf{R}_+$ et donc $h'(1) \geqslant h'(0) = 0$. Ainsi $h'(1) > 0$.

D'après le résultat de la question 5, spécialisé à $x \leftarrow 1 \in \mathbf{R}_+$:

$$\frac{h'(1)\cdot h(1)}{2} - h'(1)\cdot\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h(1)}{2}\cdot(h'(1)-h(1)).$$

Comme $h'(1)>0$, nous en déduisons :

$$\frac{h(1)}{2} - \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h(1)}{2\cdot h'(1)}\cdot(h'(1)-h(1)).$$

L'inégalité demandée est donc conséquence de :

$$(\star)\qquad \frac{h(1)}{2\cdot h'(1)}\cdot(h'(1)-h(1)) \leqslant \frac{h'(1)}{8}\qquad\text{[transitivité de la relation d'ordre usuelle sur }\mathbf{R}.]$$

Comme $(\star)$ équivaut à :

$$\left(h'(1)-2\cdot h(1)\right)^2 \geqslant 0$$

elle est vraie et la démonstration est achevée.

■

Q8. — Soit la fonction h définie par :

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g(x)-g(0)-x\cdot g'(0). \end{array}\right.$$

La fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$, puisque la fonction g l'est. En outre :

$$\forall\, x\in\mathbf{R}_+,\quad h''(x)=g''(x)\geqslant 0\qquad\left[\text{la fonction } g \text{ est convexe et } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbf{R}_+\right].$$

Nous en déduisons que la fonction h est convexe sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$. De plus $h(0)=h'(0)=0$.

Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question 7 à la fonction h ici définie :

$$\frac{h(1)}{2} - \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h'(1)}{8}$$

qui se réécrit :

$$(\star)\qquad \frac{g(1)-g(0)-g'(0)}{2} - \int_0^1 g(t)-g(0)-t\cdot g'(0)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{g'(1)-g'(0)}{8}.$$

En calculant :

$$\int_0^1 g(t)-g(0)-t\cdot g'(0)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - g(0) - \frac{g'(0)}{2}$$

l'inégalité $(\star)$ livre :

$$\frac{g(1)+g(0)}{2} - \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{g'(1)-g'(0)}{8}.$$

■

Q9. — Soit $k\in\mathbf{N}$. La fonction g_k est convexe sur $\mathbf{R}_+$. En effet, grâce à la convexité de f sur $\mathbf{R}_+$, il vient pour tout $(a,b)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$, pour tout $\lambda\in[0,1]$:

$$g_k(\lambda\cdot a+(1-\lambda)\cdot b) = f(\lambda\cdot a+(1-\lambda)\cdot b+k) = f(\lambda\cdot(a+k)+(1-\lambda)\cdot(b+k)) \leqslant \lambda\cdot f(a+k)+(1-\lambda)\cdot f(b+k) = \lambda\cdot g_k(a)+(1-\lambda)\cdot g_k(b).$$

Elle est en outre de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$ comme composée de fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

Le résultat de la question 7 appliqué à la fonction g_k, qui est bien convexe et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$, livre :

$$\frac{g_k(1)+g_k(0)}{2} - \int_0^1 g_k(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{g_k'(1)-g_k'(0)}{8}.$$

qui se réécrit :

$$(\star)\qquad \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8}.$$

En appliquant le résultat de la question 2 à la fonction g_k, spécialisé à $x\leftarrow 1\in\mathbf{R}_+$, il vient :

$$\frac{g_k(0)+g_k(1)}{2} \geqslant \int_0^1 g_k(t)\,\mathrm{d}t$$

qui livre :

$$(\star\star)\qquad 0 \leqslant \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons :

$$0 \leqslant \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8}.$$

En sommant ces inégalités membre à membre, pour k allant de 0 à $n-1$, nous obtenons, à l'aide de télescopages et de la relation de Chasles :

$$0 \leqslant \frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(n)-f'(0)}{8}.$$

■

Q10. — La fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (1+3x)^{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$ et :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}_+, \quad f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+3x)^{-\frac{1}{2}} \geqslant 0.$$

Elle est donc convexe sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après la question 9 :

$$0 \leqslant S_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1+3n)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} \cdot \left((1+3n)^{\frac{5}{2}} - 1\right) \leqslant \frac{9}{16} \cdot \left((1+3n)^{\frac{1}{2}} - 1\right).$$

En isolant S_n, en divisant membre-à-membre par :

$$\frac{2}{15} \cdot (1+3n)^{\frac{5}{2}} > 0 \qquad [\text{terme prépondérant}]$$

et en appliquant le théorème d'encadrement, nous obtenons :

$$\frac{S_n}{\frac{2}{15} \cdot (1+3n)^{\frac{5}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Ainsi :

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{15} \cdot (1+3n)^{\frac{5}{2}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{5} \cdot n^{\frac{5}{2}}.$$

■

Remarque — Dans tout cet exercice, la régularité « de classe $\mathscr{C}^2$ » peut être affaiblie en « deux fois dérivable ».

La dernière question nous apprend que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Nous aurions pu le déduire :

- du théorème sur les équivalents pour les séries à termes positifs ;
- du théorème sur les séries de Riemann.

Les compléments sur les séries numériques du programme de Spé nous permettront de retrouver l'équivalent obtenu à la question 10, sans faire usage de convexité.

Un corrigé de l'exercice 9 — Énoncé

Nous raisonnons par analyse et synthèse.

Analyse. — Considérons une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}$ et telle que :

$$(\star) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)\cdot f(y).$$

- D'après $(\star)$, $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$. Le réel $f(0)$ est racine du polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ et donc égale 0 ou 1.
- Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle sur $\mathbf{R}$. Dans la suite, nous supposons $f(0) = 1$.
- Alors, au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que :

$$(\star\star) \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad f(nx) = f(x)^n.$$

- Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Nous allons démontrer que $f(x) > 0$. D'après $(\star)$:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi $f(x) \geqslant 0$. Démontrons que $f(x) \neq 0$, en raisonnant par l'absurde. Si $f(x) = 0$, alors d'après $(\star\star)$:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 = f(x) = f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

et donc $f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en appliquant la continuité de f, il vient $f(0) = 0$, ce qui n'est pas. Ainsi :

$$f(x) > 0.$$

Dans la suite, nous posons :

$$a := f(1) > 0.$$

- D'après $(\star\star)$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(n) = f(n\cdot 1) = f(1)^n = a^n = \exp(n\cdot\ln(a)) \qquad [\text{bien défini d'après ce qui précède}].$$

- Soit n un entier strictement négatif. Alors :

$$1 = f(0) = f(n+(-n)) = f(n)\cdot f(-n) = f(n)\cdot\exp(-n\cdot\ln(a)) \qquad [-n \in \mathbf{N}].$$

Nous en déduisons que :

$$f(n) = \exp(n\cdot\ln(a)).$$

Ainsi savons-nous que :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad f(n) = \exp(n\cdot\ln(a)).$$

- Soit $(p,q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$. D'après $(\star\star)$:

$$f(p) = f\left(q\cdot\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)^q \qquad [q \text{ est un entier naturel}].$$

Comme $f\left(\frac{p}{q}\right) > 0$ et $p \in \mathbf{Z}$, nous en déduisons : et donc :

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)^{\frac{1}{q}} = \left(\exp(p\cdot\ln(a))\right)^{\frac{1}{q}} = \exp\left(\frac{p}{q}\cdot\ln(a)\right).$$

Nous pouvons donc affirmer que :

$$\forall x \in \mathbf{Q}, \quad f(x) = \exp(x\cdot\ln(a)).$$

- Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Comme $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, il existe $(x_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in \mathbf{Q}$:

$$f(x_n) = \exp(x_n\cdot\ln(a)).$$

Par continuité de la fonction exponentielle, il vient :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(x\cdot\ln(a)).$$

Comme f est continue en x, on a également :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Par unicité de la limite :

$$f(x) = \exp(x\cdot\ln(a)).$$

- Il ressort de notre étude qu'une fonction solution est la fonction identiquement nulle sur $\mathbf{R}$ ou une fonction exponentielle de base a, où $a > 0$.

Synthèse. — La fonction identiquement nulle sur $\mathbf{R}$ et les fonctions exponentielles de base a, où $a > 0$:

$$\exp_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x\cdot\ln(a)) \end{array}\right.$$

sont toutes des fonctions définies et continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qui vérifient $(\star)$.

■

Remarque — Dans l'analyse, la stratégie de résolution :

1. obtention d'une formule pour $f(n)$ où $n \in \mathbf{N}$;
2. obtention d'une formule pour $f(n)$ où $n \in \mathbf{Z}$;
3. obtention d'une formule pour $f(q)$ où $q \in \mathbf{Q}$;
4. prolongement de cette formule de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{R}$, grâce à la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ et à la continuité de f ;

est classique pour de telles équations fonctionnelles.

La difficulté ici repose sur l'apparition de l'exponentielle de base a, où $a > 0$. En effet, nous obtenons aisément :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f(n) = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ fois}}$$

où $a := f(1)$, mais la formule du membre de droite ne se généralise pas directement aux réels. L'introduction d'une forme exp – ln va permettre de donner une autre écriture, qui elle pourra être généralisée aux réels, mais pour cela il faut d'abord s'assurer que $a = f(1) > 0$ (étape cruciale).