Espaces vectoriels de dimension finie

Révisions 5

par David Blottière, le 27 août 2023 à 20h51

« Ô mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon coeur, comme une onde rafraîchissante. »
Les Chants de Maldoror, Lautréamont (Isidore Ducasse)

Sommaire

§ 1. Préambule

La théorie des espaces vectoriels de dimension finie présente certaines analogies avec celles des ensembles finis. Citons deux propriétés issues de chacune des théorie pour illustrer le propos.

(1) Si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal tels que $A \subset B$, alors $A = B$.

(2) Le pendant de cette propriété en algèbre linéaire peut s'énoncer comme suit : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

La formule de Grassmann est un outil précieux pour étudier l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie, e.g. l'intersection de deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ est de dimension $n-2$.

La formule du rang livre un critère d'isomorphie d'un grand intérêt : si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est injective si et seulement si elle est surjective.

Plus concrètement peut-être, la théorie de la dimension nous aide à lister les différents types de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$:

- $\{(0,0,0)\}$;
- une droite passant par $(0,0,0)$;
- un plan passant par $(0,0,0)$;
- $\mathbf{R}^3$.

Si l'on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$, alors l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n \end{array}\right.$$

est un isomorphisme (cf. coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathscr{B}$). Ainsi un problème posé dans E peut être transporté dans $\mathbf{K}^n$, avec parfois/souvent une nouvelle formulation mettant en jeu un système linéaire.

Notation — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ 2. Cours

Les documents supports sont :

- la partie 5 du polycopié de cours sur les espaces vectoriels [PDF] ;
- le polycopié de cours sur les espaces vectoriels de dimension finie [PDF] ;
- les parties 3, 5, 6 et 7 du polycopié de cours sur les applications linéaires [PDF].

On commencera par étudier les familles (finies) remarquables dans un espace vectoriel :

- familles libres ;
- familles liées ;

- familles génératrices.

On étudiera notamment une démonstration de la caractérisation des familles liées (C18.75) qui constitue un bon exercice, mêlant des concepts précédemment cités et la logique.

On sera alors en mesure d'introduire une définition centrale de ce chapitre :

DÉFINITION — Un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.

Viendra alors le temps de revoir deux autres notions :
- celle de base d'un espace vectoriel ;
- celle de coordonnées d'un vecteur d'un espace vectoriel relativement à une base.

Ainsi, l'étude d'un espace vectoriel de dimension finie pourra être ramenée à l'étude d'un des espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$, où $n \in \mathbf{N}^*$. Les systèmes linéaires joueront alors un grand rôle. Ils seront tous résolus en suivant l'algorithme du pivot de Gauß (aucune autre méthode n'est acceptée).

On reverra rapidement les bases, dites canoniques, de quelques espaces vectoriels usuels.

Étant donné un espace vectoriel de dimension finie, on dispose de deux résultats importants :
- le théorème de la base incomplète ;
- le théorème de la base extraite ;

qui renferment chacun en leur sein un algorithme.

De ces deux théorèmes, nous en déduisons deux conséquences importantes :
- tout espace vectoriel de dimension finie possède une base ;
- l'existence d'un supplémentaire pour un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel de dimension finie.

Après ce travail préparatoire, nous pouvons définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Il s'agit du cardinal commun d'une de ses bases. Le fait que toutes les bases aient même cardinal est la pierre angulaire du chapitre. L'interaction avec les systèmes linéaires culmine en ce point.

On saura caractériser les bases parmi les familles libres (resp. génératrices) d'un espace vectoriel de dimension finie et on commencera à dresser le formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie, avec la dimension du produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels de dimension finie.

On s'intéressera ensuite aux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie, en étudiant C19.38. En particulier, on verra qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie, ce qui n'est pas immédiat à démontrer.

On enrichira le formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie de la formule de Grassmann et on saura caractériser des sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel de dimension finie (critère fort commode).

Après avoir défini et étudié le rang d'une famille finie de vecteurs, on se penchera sur l'apport de la théorie de la dimension pour l'analyse des applications linéaires. Il est absolument colossal !

On devra connaître absolument le théorème/la formule du rang (enoncé et, bien sûr, démonstration), ainsi que ses corollaires (critères d'isomorphie) dont la puissance est considérable.

Enfin, dans une dernière partie, on abordera les espaces d'applications linéaires, en ajoutant au formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie la dimension de $\mathscr{L}(E, F)$, qui est de dimension finie, lorsque E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Les applications à la dualité (e.g. liens entre formes linéaires non nulles et hyperplans) constituent un joli champ d'applications de la théorie développée, que l'on prospectera avec intensité. On peut construire d'innombrables sujets sur ce thème.

Ce travail sur le cours est fondamental.

§ 3. VRAI-FAUX

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1 **UN CORRIGÉ**

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que la famille (u, v) est liée. L'assertion :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad v = \lambda \cdot u$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2 **UN CORRIGÉ**

Les sous-espaces vectoriels

$$F = \mathrm{Vect}\,((1,1,1),(0,1,0)) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\,((1,2,1),(1,0,1))$$

de $\mathbf{R}^3$ sont-ils nécessairement égaux ? Justifier la réponse.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3 **UN CORRIGÉ**

Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que :

(a) u et v ne sont pas colinéaires ;

(b) u et w ne sont pas colinéaires ;

(c) v et w ne sont pas colinéaires.

La famille (u, v, w) est-elle nécessairement libre ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4 **UN CORRIGÉ**

L'assertion :

Il existe une application linéaire injective de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$.

est-elle vraie ? Justifier le résultat.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5 **UN CORRIGÉ**

L'application linéaire

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z) \end{array} \right.$$

est-elle injective ? Justifier le résultat.

□

§ 4. UN SUPPLÉMENTAIRE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE $\mathbf{R}^4$

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6 **UN CORRIGÉ**

Soient les vecteurs v_1, v_2, w_1, w_2 de $\mathbf{R}^4$ définis par :

$$v_1 := (1,-1,0,1) \qquad v_2 := (0,2,1,0) \qquad w_1 := (0,6,-1,4) \qquad w_2 := (3,3,1,5).$$

et les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$:

$$E_1 := \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2) \qquad E_2 := \mathrm{Vect}\,(w_1, w_2)\,.$$

Q1. — Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.

Q2. — Donner une base de $E_1 + E_2$.

Q3. — Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

□

§ 5. Un critère pour qu'un endomorphisme soit une homothétie

Énoncé de l'exercice 7 | Un corrigé

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ est liée. Démontrer que f est une homothétie, i.e. :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall u \in E \quad f(u) = \lambda \cdot u.$$

□

§ 6. Inclusion de noyaux et factorisation

Énoncé de l'exercice 8 | Un corrigé

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g) \iff \left(\exists h \in \mathscr{L}(E), \quad g = h \circ f\right).$$

□

§ 7. Polynômes interpolateurs de Hermite

L'exercice suivant est une version remaniée d'une partie de l'épreuve de Mathématiques 2 du CCINP 2016.

Énoncé de l'exercice 9 | Un corrigé

Soit un entier $p \geqslant 2$ et $x_1, \ldots, x_p$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts.

Q1. — Soient $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Démontrer que les polynômes $X - x_i$ et $X - x_j$ sont premiers entre eux.

Q2. — Soient A et B des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ premiers entre eux et $(n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Démontrer que les polynômes A^n et B^m sont premiers entre eux.

Q3. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A, B_1, \ldots, B_n$ des polynômes de $\mathbf{K}[X]$. On suppose que :

$$A \wedge B_1 = \ldots = A \wedge B_n = 1.$$

Démontrer que les polynômes A et $\prod_{i=1}^{n} B_i$ sont premiers entre eux.

Q4. — Soient $n \geqslant 2$ un entier et $A, B_1, \ldots, B_n$ des polynômes de $\mathbf{K}[X]$. On suppose que :

(a) chacun des polynômes $B_1, \ldots, B_n$ divise A ;

(b) les polynômes $B_1, \ldots, B_n$ sont deux à deux premiers entre eux.

Démontrer que le polynôme $\prod_{i=1}^{n} B_i$ divise A.

Q5. — Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{2p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{2p} \\ P & \longmapsto & \left(P(x_1), \ldots, P(x_p), P'(x_1), \ldots, P'(x_p)\right) \end{array} \right.$$

est bijective.

Pour toute la suite du sujet, on fixe $(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_p) \in \mathbf{K}^{2p}$.

Q6. — Justifier qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_{2p-1}[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad P(x_j) = y_j \text{ et } P'(x_j) = z_j.$$

L'objectif de cette fin de sujet est d'expliciter ce polynôme P, appelé polynôme interpolateur de Hermite.

Q7. — Soit $i \in [\![1, p]\!]$ fixé. Déterminer l'unique polynôme $A_i \in \mathbf{K}_{2p-1}[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad A_i(x_j) = \delta_{i,j} \text{ et } A_i'(x_j) = 0.$$

Q8. — Soit $i \in [\![1, p]\!]$ fixé. Déterminer l'unique polynôme $B_i \in \mathbf{K}_{2p-1}[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad B_i(x_j) = 0 \text{ et } B_i'(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Q9. — Expliciter le polynôme $P \in \mathbf{K}_{2p-1}[X]$ introduit à la question 6.

□

§ 8. Existence d'un supplémentaire commun $*$

On rappelle que la lettre **K** désigne le corps **R** ou **C**. En particulier, le corps **K** est infini.

Énoncé de l'exercice 10 | Un corrigé

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $r \in \mathbf{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.

Q1. — On suppose que tous les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E sont stricts, i.e. distincts de E. Démontrer que $\bigcup_{i=1}^{r} F_i \neq E$.

Q2. — On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 1$ et que tous les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E ont même dimension. Démontrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E, qui est un supplémentaire commun de chacun des $F_1, \ldots, F_r$.

□

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 ÉNONCÉ

Faux.

Prenons $u = (0,0,0)$ et $v = \left(\dfrac{2024}{2023}, \pi^{1977}, \dfrac{\sqrt{2011}}{e}\right)$ par exemple. Puisque :

$$1 \cdot u + 0 \cdot v = (0,0,0)$$

la famille (u, v) n'est pas libre. D'autre part, s'il existait $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda \cdot u$, alors v serait le vecteur nul, ce qui n'est pas.

■

Remarque — Dire que la famille (u, v) est libre signifie que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \quad \alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_{\mathbf{R}^3} \Longrightarrow (\alpha, \beta) = (0,0)\,.$$

D'après la négation d'une implication, dire que la famille est liée signifie :

$$(\star) \qquad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \quad \alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_{\mathbf{R}^3} \text{ et } (\alpha, \beta) \neq (0,0)\,.$$

La propriété $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ se traduit par $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, non par $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

Cependant, grâce à $(\star)$, on peut démontrer, en scindant l'étude en deux parties suivant $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, que :

$$(\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad u = \lambda \cdot v) \quad \text{ou} \quad (\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad v = \lambda \cdot u)\,.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 ÉNONCÉ

Vrai.

• Dimension de F. Les vecteurs $(1,1,1)$ et $(0,1,0)$ ne sont pas colinéaires. La famille

$$\mathscr{B}_F := ((1,1,1),(0,1,0))$$

est donc libre. Comme la famille $\mathscr{B}_F$ est de plus génératrice de F par définition, elle forme une base de F. Ainsi $\dim(F) = 2$.

• Dimension de G. De manière analogue, on établit $\dim(G) = 2$.

• Inclusion de G dans F. On remarque :

$$(1,2,1) = (1,1,1) + (0,1,0) \in F \quad \text{et} \quad (1,0,1) = (1,1,1) - (0,1,0) \in F$$

Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, nous en déduisons :

$$(\star) \qquad G = \operatorname{Vect}((1,2,1),(1,0,1)) \subset F.$$

• Conclusion. D'après l'inclusion $(\star)$ et de l'égalité des dimensions finies de F et G, $F = G$.

■

Remarque — L'égalité des dimensions finies nous permet de ne montrer qu'une seule des deux inclusions $F \subset G$ et $G \subset F$ pour conclure à l'égalité.

Un corrigé de l'exercice 3

Énoncé

Faux.

Considérons les vecteurs :

$$u := (1,0,0) \qquad v := (0,1,0) \qquad w := u + v = (1,1,0).$$

Ces trois vecteurs ne sont pas deux-à-deux colinéaires, mais la famille (u, v, w) est liée, puisque :

$$1 \cdot u + 1 \cdot v + (-1) \cdot w = (0,0,0).$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 **ÉNONCÉ**

Faux.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une application linéaire injective $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Alors, d'après la formule du rang :

$$(\star) \qquad \dim\left(\mathbf{R}^3\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right).$$

- Comme f est injective, $\mathrm{Ker}\left(f\right) = \left\{0_{\mathbf{R}^3}\right\}$.
- Comme $\mathrm{Im}\left(f\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$, $\dim\left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right) \leqslant 2$.

Ainsi $(\star)$ livre $3 \leqslant 2$, ce qui n'est pas.

Remarque — On peut généraliser le résultat précédent, en raisonnant de la même manière (i.e. à l'aide de la formule du rang) : si E et F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(()\, E) > \dim(()\, F)$, alors il n'existe pas d'application linéaire injective de E dans F.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 **ÉNONCÉ**

Faux.

Pour le démontrer, calculons $\operatorname{Ker}(f)$ et démontrons que $\operatorname{Ker}(f) \neq \{(0,0,0)\}$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 & \\ & & -3y & - & 6z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ & & -6y & - & 12z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array}\right.$$

Après cet échelonnement partiel de ce système linéaire à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauß, nous observons que le vecteur $(-1, 2, -1)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f)$. L'application f n'est donc pas injective.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 **ÉNONCÉ**

Soient les vecteurs v_1, v_2, w_1, w_2 de $\mathbf{R}^4$ définis par :

$$v_1 := (1,-1,0,1) \qquad v_2 := (0,2,1,0) \qquad w_1 := (0,6,-1,4) \qquad w_2 := (3,3,1,5).$$

et les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$:

$$E_1 := \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \qquad E_2 := \mathrm{Vect}(w_1, w_2).$$

Q1. — Nous commençons par déterminer une famille génératrice de $E_1 \cap E_2$.

• Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Comme $u \in E_1$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$u = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = (\lambda_1, -\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1).$$

Comme $u \in E_2$, il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$u = \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot v_2 = (3\mu_2, 6\mu_1 + 3\mu_2, -\mu_1 + \mu_2, 4\mu_1 + 5\mu_2).$$

D'où :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \lambda_1 & & & = & & & 3\mu_2 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 6\mu_1 & + & 3\mu_2 \\ & & \lambda_2 & = & -\mu_1 & + & \mu_2 \\ \lambda_1 & & & = & 4\mu_1 & + & 5\mu_2. \end{array}\right.$$

On applique l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & & & = & & & 3\mu_2 \\ & & 2\lambda_2 & = & 6\mu_1 & + & 6\mu_2 \\ & & \lambda_2 & = & -\mu_1 & + & \mu_2 \\ \lambda_1 & & & = & 4\mu_1 & + & 5\mu_2 \end{array}\right.$$

De L_1 et L_4, nous déduisons $3\mu_2 = 4\mu_1 + 5\mu_2$, soit $\mu_2 = -2\mu_1$, puis

$$u = (-6\mu_1, 0, -3\mu_1, -6\mu_1) = \mu_1(-6, 0, -3, -6).$$

Donc $u \in \mathrm{Vect}(-6,0,-3,-6) = \mathrm{Vect}(2,0,1,2)$. Nous avons donc établi :

$$E_1 \cap E_2 \subset \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}((2,0,1,2)).$$

• Nous observons :

$$(2,0,1,2) = 2 \cdot v_1 + v_2 \in E_1 \qquad \text{et} \qquad (2,0,1,2) = \frac{2}{3} \cdot w_1 - \frac{1}{3} \cdot w_2 \in E_2.$$

Donc $(2,0,1,2) \in E_1 \cap E_2$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré :

$$\mathrm{Vect}((2,0,1,2)) \subset E_1 \cap E_2.$$

• Des deux points précédents, nous déduisons que $((2,0,1,2))$ est une famille génératrice de $E_1 \cap E_2$. Comme $(2,0,1,2)$ est non nul, cette famille est libre. Ainsi la famille $((2,0,1,2))$ est-elle une base de $E_1 \cap E_2$.

■

Q2. — Nous allons extraire une base d'une famille génératrice de $E_1 + E_2$.

• D'après le cours, la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est génératrice de $E_1 + E_2$.

• D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc (v_1, v_2) est une base de E_1. Ainsi $\dim(E_1) = 2$.
Les vecteurs w_1 et w_2 ne sont pas colinéaires, donc (w_1, w_2) est une base de E_2. Ainsi $\dim(E_2) = 2$.
D'après la question 1, $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$.
Par suite, $\dim(E_1 + E_2) = 3$.

• De la résolution de la question 1, nous déduisons :

$$2 \cdot v_1 + v_2 = \frac{2}{3} \cdot w_1 - \frac{1}{3} \cdot w_2$$

et donc :

$$v_2 = -2 \cdot v_1 + \frac{2}{3} \cdot w_1 - \frac{1}{3} \cdot w_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, w_1, w_2).$$

D'après le cours, la famille (v_1, w_1, w_2) reste génératrice de $E_1 + E_2$. Or elle possède $3 = \dim(E_1 + E_2)$ éléments. C'est donc une base de $E_1 + E_2$.

■

Q3. — Nous allons prendre appui sur le théorème de la base incomplète.

• La famille (v_1, w_1, w_2) est une famille libre de 3 éléments de $\mathbf{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de $\mathbf{R}^4$ en lui adjoignant un des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbf{R}^4$.

• Vérifions si le vecteur e_1 convient. On résout l'équation :

$$(\star) \qquad a \cdot e_1 + b \cdot v_1 + c \cdot w_1 + d \cdot w_2 = 0$$

d'inconnue $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. Comme :

$$(\star) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & & & + & 3d & = & 0 \\ & & 2b & + & 6c & + & 3d & = & 0 \\ & & b & - & c & + & d & = & 0 \\ & & & & 4c & + & 5d & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & & & + & 3d & = & 0 \\ & & 2b & + & 6c & + & 3d & = & 0 \\ & & & - & 8c & - & d & = & 0 \\ & & & & 4c & + & 5d & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & & & + & 3d & = & 0 \\ & & 2b & + & 6c & + & 3d & = & 0 \\ & & & - & 8c & - & d & = & 0 \\ & & & & & & 9d & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_4 \leftarrow 2L_4 + L_3.$$

D'après ce dernier système échelonné, nous déduisons que la seule solution de $(\star)$ est $(0,0,0,0)$. La famille (e_1, v_1, w_1, w_2) est donc libre. Comme elle contient $4 = \dim\left(\mathbf{R}^4\right)$ éléments, c'est une base de $\mathbf{R}^4$.

- D'après ce qui précède :

$$\mathrm{Vect}\,(e_1) + (E_1 + E_2) = \mathrm{Vect}\,(e_1) + \mathrm{Vect}(v_1, w_1, w_2) = \mathrm{Vect}\,(e_1, v_1, w_1, w_2) = \mathbf{R}^4.$$

Il reste à voir que $\mathrm{Vect}\,(e_1) \cap (E_1 + E_2) = \{0\}$ pour savoir que $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\,(e_1)$ est un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

- La propriété $\mathrm{Vect}\,(e_1) \cap (E_1 + E_2) = \{0\}$ découle de la liberté de la famille (e_1, v_1, w_1, w_2), établie ci-dessous.

En effet, soit $u \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\,(e_1) \cap (E_1 + E_2)$. Alors il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que :

$$u = a \cdot e_1$$

et $(b, c, d) \in \mathbf{R}^3$ tel que :

$$u = b \cdot v_1 + c \cdot w_1 + d \cdot w_2.$$

Donc :

$$a \cdot e_1 - bv \cdot_1 - c \cdot w_1 - d \cdot w_2 = 0$$

ce qui entraîne, par liberté de (e_1, v_1, w_1, w_2), $a = 0$ et donc $u = 0$.

- D'après notre étude, nous pouvons conclure que $\mathrm{Vect}\,(e_1)$ est donc un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 ÉNONCÉ

Nous commençons par expliciter l'hypothèse, pour établir que, pour tout $u \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un unique $\lambda_u \in \mathbf{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u \cdot u$. On prouve ensuite que, pour tout $(u, v) \in \left(E \setminus \{0_E\}\right)^2$, $\lambda_u = \lambda_v$, en distinguant deux cas, suivant que la famille (u, v) est libre ou liée.

Explicitation de l'hypothèse. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. La famille $(u, f(u))$ étant liée, il existe $(\alpha_u, \beta_u) \in \mathbf{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que :

$$\alpha_u \cdot u + \beta_u \cdot f(u) = 0.$$

Si $\beta_u = 0$, alors $\alpha_u \neq 0$ et $\alpha_u \cdot u = 0_E$, d'où $u = 0_E$, ce qui est exclu. D'où $\beta_u \neq 0$ et :

$$f(u) = \lambda_u \cdot u \text{ avec } \lambda_u := -\frac{\alpha_u}{\beta_u}.$$

Notons que comme la famille (u) est libre, le scalaire λ_u vérifiant $f(u) = \lambda_u \cdot u$ est unique.

Démonstration de $\lambda_v = \lambda_u$ lorsque (u, v) est liée. Soit $(u, v) \in \left(E \setminus \{0_E\}\right)^2$ tel que la famille (u, v) est liée.
Alors, comme précédemment, puisque $u \neq 0_E$, on démontre l'existence d'un scalaire μ tel que $v = \mu \cdot u$. De :

$$\lambda_v \cdot v = f(v) = f(\mu \cdot u) = \mu \cdot f(u) = \mu \cdot \lambda_u \cdot u = \lambda_u \cdot v$$

et de la liberté de la famille (v), on déduit $\lambda_v = \lambda_u$.

Démonstration de $\lambda_v = \lambda_u$ lorsque (u, v) est libre. Soit $(u, v) \in \left(E \setminus \{0_E\}\right)^2$ tel que la famille (u, v) est libre. Alors, $u + v \neq 0_E$. De :

$$\lambda_{u+v} \cdot u + \lambda_{u+v} \cdot v = \lambda_{u+v} \cdot (u + v) = f(u + v) = f(u) + f(v) = \lambda_u \cdot u + \lambda_v \cdot v$$

et de la liberté de la famille (u, v), on déduit $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$.

Conclusion. Nous venons de démontrer que tous les λ_u, pour $u \in E \setminus \{0_E\}$, sont égaux. Notons λ leur valeur commune, de sorte que :

$$\forall u \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(u) = \lambda \cdot u.$$

La relation $f(u) = \lambda \cdot u$ vaut aussi pour $u = 0_E$, puisque f étant linéaire, $f(0_E) = 0_E = \lambda \cdot 0_E$. Donc :

$$\forall u \in E, \quad f(u) = \lambda \cdot u.$$

■

Remarque — Cet exercice ne met pas en jeu la théorie de la dimension, bien que notre preuve réduise plus ou moins l'étude au cas où E est un plan.

Ce résultat possède beaucoup d'applications, dont certaines ont trait à la dimension finie, e.g. : si f est un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que :

$$\text{pour toute base } \mathscr{B} \text{ de } E, \text{ la matrice } \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonale}$$

alors f est une homothétie.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8 ÉNONCÉ

Nous raisonnons par double implication, en débutant par l'implication facile.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose qu'il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g = h \circ f$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors :

$$g(x) = h \circ f(x) = h(f(x)) = h(0) = 0$$

où la dernière identité vient de la linéarité de h. Donc $x \in \operatorname{Ker}(g)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.

- Soit A un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E. Comme E est de dimension finie, A peut être construit avec le théorème de la base incomplète du programme.
- Considérons l'application φ définie par :
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f(A) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$
Cette application est linéaire, comme restriction et corestriction d'une application linéaire, et surjective par construction.
- Vérifions que l'application φ est injective. Soit $x \in A$ tel que $\varphi(x) = 0$. Alors $f(x) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi $x \in A \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ car A et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E. Donc $x = 0$.
- L'application φ étant un isomorphisme, nous pouvons considérer sa bijection réciproque φ^{-1}, qui est également linéaire.
- Soit B un supplémentaire de $f(A)$ dans E. Comme E est de dimension finie, B peut être construit avec le théorème de la base incomplète du programme. Posons :
$$p \left| \begin{array}{ccc} E = f(A) \oplus B & \longrightarrow & f(A) \\ y + z & \longmapsto & y \end{array} \right.$$
la projection de E sur $f(A)$ parallèlement à B.
- Nous vérifions que l'application h définie par :
$$h = g \circ i \circ \varphi^{-1} \circ p$$
convient, où :
$$i \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$
est l'injection canonique, qui est clairement linéaire.
- L'application h est linéaire, comme composée d'applications linéaires.
- Soit $x \in E = \operatorname{Ker}(f) \oplus A$. Alors x s'écrit $x = x_0 + a$, avec $x_0 \in \operatorname{Ker}(f)$ et $a \in A$. Nous calculons
$$h \circ f(x_0) = h(0) = 0$$
$$h \circ f(a) = g(i(\varphi^{-1}(p(f(a))))) = g(i(\varphi^{-1}(f(a)))) = g(i(a)) = g(a).$$
pour obtenir :
$$(\star) \qquad h \circ f(x) = h \circ f(x_0) + h \circ f(a) = g(a).$$
D'autre par comme $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$, $g(x_0) = 0$ et donc :
$$(\star\star) \qquad g(x) = g(x_0) + g(a) = g(a).$$
De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons que $g(x) = h \circ f(x)$.

■

Remarque — L'application φ n'est pas inconnue. C'est précisément elle qui nous a permis de démontrer le théorème du rang.

On ne pourra qu'être convaincu alors de la nécessité de connaître non seulement les énoncés du cours, mais encore leurs démonstrations, pour pouvoir y puiser des idées dans la résolution d'exercices/problèmes, voire augmenter la maîtrise conceptuelle.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9 **ÉNONCÉ**

Q1. — Nous observons que :

$$X - x_i - (X - x_j) = x_j - x_i.$$

Comme $x_i \neq x_j$, nous en déduisons :

$$\frac{1}{x_j - x_i} \cdot (X - x_i) + \frac{1}{x_i - x_j} \cdot (X - x_j) = 1.$$

D'après le théorème de Bézout, $(X - x_i) \wedge (X - x_j) = 1$.

■

Q2. — Considérons une relation de Bézout pour les polynômes A et B :

$$A \cdot U + B \cdot V = 1$$

où U, V sont des polynômes de $\mathbf{K}[X]$.
Comme $\mathbf{K}[X]$ est un anneau commutatif, la formule du binôme de Newtow peut être appliquée pour livrer :

$$\begin{aligned}
1 &= 1^{n+m} \\
&= (A \cdot U + B \cdot V)^{n+m} \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} \cdot A^k \cdot U^k \cdot B^{n+m-k} \cdot V^{n+m-k} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m}{k} \cdot A^k \cdot U^k \cdot B^{\overbrace{n-k}^{\geqslant 0}} \cdot V^{n+m-k} \right)}_{\in \mathbf{K}[X]} \cdot B^m + \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{n+m} \binom{n+m}{k} \cdot A^{\overbrace{k-n}^{\geqslant 0}} \cdot U^k \cdot B^{n+m-k} \cdot V^{n+m-k} \right)}_{\in \mathbf{K}[X]} \cdot A^n
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Bézout, $A^n \wedge B^m = 1$.

■

Q3. — Nous raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.

Prédicat. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ le prédicat suivant :

$$\forall\, (A, B_1, \ldots, B_n) \in \mathbf{K}[X]^{n+1}, \quad A \wedge B_1 = \ldots = A \wedge B_n = 1 \Longrightarrow A \wedge \prod_{i=1}^{n} B_i = 1.$$

Initialisation au rang 1. L'assertion est $\mathscr{P}(1)$ est claire.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Considérons $(A, B_1, \ldots, B_n, B_{n+1}) \in \mathbf{K}[X]^{n+2}$ tel que :

$$A \wedge B_1 = \ldots = A \wedge B_n = A \wedge B_{n+1} = 1.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $A \wedge \prod_{i=1}^{n} B_i = 1$.

Considérons des relations de Bézout pour les couples $\left(A, \prod_{i=1}^{n} B_i\right)$ et (A, B_{n+1}) :

$$A \cdot U + \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right) \cdot V = 1 \quad \text{et} \quad A \cdot S + B_{n+1} \cdot T = 1$$

où U, V, S, T sont des polynômes de $\mathbf{K}[X]$. En multipliant membre à membre des deux égalités, il vient :

$$A \cdot \underbrace{\left(U \cdot A \cdot S + U \cdot B_{n+1} \cdot T + \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right) \cdot V \cdot S \right)}_{\in \mathbf{K}[X]} + \left(\prod_{i=1}^{n+1} B_i\right) \cdot \underbrace{V \cdot T}_{\in \mathbf{K}[X]} = 1.$$

D'après le théorème de Bézout, $A \wedge \prod_{i=1}^{n+1} B_i = 1$.

■

Q4. — Nous raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$.

Prédicat. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, notons $\mathscr{P}(n)$ le prédicat suivant :

$$\forall\, (A, B_1, \ldots, B_n) \in \mathbf{K}[X]^{n+1}, \quad \left(\begin{array}{c} \forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad B_i \mid A \\ \text{et} \\ B_1, \ldots, B_n \text{ sont deux à deux premiers entre eux} \end{array} \right) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} B_i \mid A.$$

Initialisation au rang 2. Soient $(A, B_1, B_2) \in \mathbf{K}[X]^3$ tel que B_1, B_2 divisent A et $B_1 \wedge B_2 = 1$. Alors :

$$\exists\, Q_1 \in \mathbf{K}[X], \quad A = B_1 \cdot Q_1.$$

Comme B_2 divise $B_1 \cdot Q_1$ et $B_1 \wedge B_2 = 1$, le lemme de Gauß nous permet d'affirmer que B_2 divise Q_1. Ainsi :

$$\exists Q_2 \in \mathbf{K}[X], \quad Q_1 = B_2 \cdot Q_2.$$

Nous en déduisons :

$$A = B_1 \cdot B_2 \cdot Q_2$$

et donc $B_1 \cdot B_2$ divise A.

Hérédité. Soit $n \geqslant 2$ un entier tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Considérons $(A, B_1, \ldots, B_n) \in \mathbf{K}[X]^{n+1}$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, B_i divise A, et les polynômes $B_1, \ldots, B_n, B_{n+1}$ sont deux à deux premiers entre eux. Nous observons que :

- B_{n+1} divise A (hypothèse) ;
- $\prod_{k=1}^{n} B_k$ divise A (hypothèse de récurrence) ;
- $\left(\prod_{k=1}^{n} B_k\right) \wedge B_{n+1} = 1$ (question 3).

D'après l'initialisation au rang 2, le polynôme $\left(\prod_{k=1}^{n} B_k\right) \cdot B_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} B_k$ divise A.

Q5. — Nous allons démontrer que f est un isomorphisme. Puisque $\mathbf{K}_{2p-1}[X]$ et $\mathbf{K}^{2p}$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie ($2p$), il suffit de prouver que f est linéaire et injective.

Linéarité de f. Soient $(P, Q) \in \mathbf{K}_{2p-1}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) &= \big((\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(x_1), \ldots, (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(x_p), (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(x_1), \ldots, (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(x_p)\big) \\
&= \big((\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(x_1), \ldots, (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(x_p), \big(\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'\big)(x_1), \ldots, \big(\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'\big)(x_p)\big) && \text{[linéarité de la dérivation]} \\
&= \big(\lambda \cdot P(x_1) + \mu \cdot Q(x_1), \ldots, \lambda \cdot P(x_p) + \mu \cdot Q(x_p), \lambda \cdot P'(x_1) + \mu \cdot Q'(x_1), \ldots, \lambda \cdot P'(x_p) + \mu \cdot Q'(x_p)\big) && \text{[linéarité de l'évaluation en un scalaire]} \\
&= \lambda \cdot \big(P(x_1), \ldots, P(x_p), P'(x_1), \ldots, P'(x_p)\big) + \mu \cdot \big(Q(x_1), \ldots, Q(x_p), Q'(x_1), \ldots, Q'(x_p)\big) && [\text{opérations} + \text{et} \cdot \text{dans } \mathbf{K}^{2p}] \\
&= \lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q).
\end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire.

Injectivité de f. Soit $P \in \mathbf{K}_{2p-1}[X]$ tel que $f(P) = 0$. Les scalaires $x_1, \ldots, x_p$ sont alors racines de P de multiplicités supérieures ou égales à 2. Nous en déduisons que :

$$(\star) \qquad \text{les polynômes } (X - x_1)^2, \ldots, (X - x_p)^2 \text{ divisent } P.$$

D'après les questions 1 et 2, comme $x_1, \ldots, x_p$ sont deux à deux distincts :

$$(\star\star) \qquad \text{les polynômes } (X - x_1)^2, \ldots, (X - x_p)^2 \text{ sont deux à deux premiers entre eux.}$$

Grâce à $(\star)$, $(\star\star)$ et la question 4, il vient $\prod_{k=1}^{p} (X - x_i)^2$ divise P, i.e. :

$$\exists Q \in \mathbf{K}[X], \qquad P = Q \cdot \prod_{k=1}^{p} (X - x_i)^2.$$

En analysant les degrés, nous obtenons $\deg(Q) \leqslant -1$, donc Q est le polynôme nul. Le polynôme P est donc également nul.
L'application linéaire f a un noyau réduit à $\{0\}$, donc est injective.

■

Q6. — Soit $P \in \mathbf{K}_{2p-1}[X]$. Nous remarquons :

$$\Big(\forall j \in [\![1, p]\!], \quad P(x_j) = y_j \text{ et } P'(x_j) = z_j\Big) \iff f(P) = (y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_p).$$

L'existence (resp. l'unicité) de P découle de la surjectivité (resp. de l'injectivité) de f (question 5).

■

Q7. — L'existence et l'unicité de A_i sont assurées par la bijectivité de f.
Nous pouvons donc raisonner par conditions nécessaires, i.e. effectuer une analyse sans synthèse.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$, x_j est racine de A_i de multiplicité supérieur ou égale à 2. Donc :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}, \quad (X - x_j)^2 \text{ divise } A_i.$$

D'après les questions 1,2 et 4 :

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j)^2 \text{ divise } A_i.$$

Donc :

$$\exists Q_i \in \mathbf{K}[X], \quad A_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j)^2\right) \cdot Q_i.$$

Par analyse des degrés, $\deg\big(Q_i\big) \leqslant 1$ et donc :

$$Q_i = Q_i'(x_i) \cdot (X - x_i) + Q_i(x_i) \qquad \big[\text{formule de Taylor exacte}\big].$$

Nous en déduisons :

$$(\star) \qquad A_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j)^2\right) \cdot \big(Q_i'(x_i) \cdot (X - x_i) + Q_i(x_i)\big).$$

De $(\star)$ on déduit :

- $1 = A_i(x_i) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)^2 \right) \cdot Q_i(x_i)$;
- $0 = A_i'(x_i) = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} 2 \cdot (x_i - x_j) \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i,j}}^{n} (x_i - x_\ell)^2 \right) \cdot Q_i(x_i) + \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)^2 \right) \cdot Q_i'(x_i)$ [C16.99] ;

puis :

- $Q_i(x_i) = \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)^2}$;
- $Q_i'(x_i) = \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)^2} \cdot \left(-2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{1}{x_i - x_j} \right)$.

De ces deux derniers points et de ($\star$), on déduit :

$$A_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2} \right) \cdot \left(2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} + 1 \right).$$

■

Q8. — L'existence et l'unicité de B_i sont assurées par la bijectivité de f.
Nous pouvons donc raisonner par conditions nécessaires, i.e. effectuer une analyse sans synthèse.
Le nombre x_i est racine de B_i de multiplicité 1. Donc :

$$X - x_i \text{ divise } B_i.$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$, x_j est racine de B_i de multiplicité supérieur ou égale à 2. Donc :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}, \quad (X - x_j)^2 \text{ divise } B_i.$$

D'après les questions 1,2 et 4 :

$$(X - x_i) \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j)^2 \right) \text{ divise } B_i.$$

Donc :

$$(\star) \qquad \exists\, Q_i \in \mathbf{K}[X], \quad B_i = (X - x_i) \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j)^2 \right) \cdot Q_i.$$

Par analyse des degrés, $\deg(Q_i) \leqslant 0$ et donc Q_i est un polynôme constant.
De ($\star$), on déduit :

$$1 = B_i'(x_i) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)^2 \right) \cdot Q_i$$

puis :

$$Q_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)^2}.$$

De cette identité et de ($\star$), il vient :

$$B_i = (X - x_i) \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2} \right).$$

■

Q9. — De la linéarité de l'application f et des questions 7 et 8, nous déduisons que l'image du polynôme :

$$\sum_{i=1}^{p} y_i \cdot A_i + \sum_{i=1}^{p} z_i \cdot B_i$$

par l'application f est $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_p)$. D'après la définition du polynôme P :

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{i=1}^{p} y_i \cdot A_i + \sum_{i=1}^{p} z_i \cdot B_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} y_i \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2} \right) \cdot \left(2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} + 1 \right) + \sum_{i=1}^{p} z_i \cdot (X - x_i) \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(y_i \cdot \left(2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} + 1 \right) + z_i \cdot (X - x_i) \right) \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2} \right).
\end{aligned}$$

■

Remarque — On a démontré qu'étant donnés $x_1, \dots, x_p$, des réels deux à deux distincts, et deux p-uplets de réels $(y_1, \dots, y_p)$ et $(z_1, \dots, z_p)$, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à à $2p - 1$ dont la courbe représentative :

(a) passe par les points de coordonnées $(x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)$;

(b) a une tangente de coefficient directeur z_i au point de coordonnées (x_i, y_i), pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

La différence entre les polynômes interpolateurs de Lagrange et les polynômes interpolateurs de Hermite est que dans le second cas des conditions additionnelles sont imposées sur les tangentes aux points d'interpolation, ce ajoute une précision mais également peut augmenter le degré ($\leqslant p - 1$ dans le cas de Lagrange et $\leqslant 2p - 1$ dans le cas de Hermite).

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10

ÉNONCÉ

Q1. — On raisonne par récurrence sur $r \in \mathbf{N}^*$.

Définition du prédicat. Pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathscr{P}(r)$ le prédicat suivant :

$$\text{pour tout } F_1, \ldots, F_r \text{ sous-espaces vectoriels stricts de } E, \bigcup_{i=1}^{r} F_i \neq E.$$

Initialisation au rang 1. L'assertion $\mathscr{P}(1)$ est claire.

Hérédité. Soit $r \in \mathbf{N}^*$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(r)$ est vraie.

Considérons $F_1, \ldots, F_r, F_{r+1}$ des sous-espaces vectoriels stricts de E et démontrons que $\bigcup_{i=1}^{r+1} F_i \neq E$, en raisonnant par l'absurde.

Supposons donc $\bigcup_{i=1}^{r+1} F_i = E$.

Comme le sous-espace vectoriel F_{r+1} de E est strict :

$$\exists\, x_{r+1} \in E \setminus F_{r+1}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\bigcup_{i=1}^{r} F_i$ est une partie de E distincte de E. Donc :

$$\exists\, x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{r} F_i.$$

Considérons la partie $\mathscr{D}$ de E définie par :

$$\mathscr{D} := \{x_{r+1} + t \cdot x \,:\, t \in \mathbf{K}\} \qquad [\text{droite affine passant par } x_{r+1} \text{ et dirigée par } x].$$

La droite $\mathscr{D}$ est infinie puisque clairement équipotente au corps $\mathbf{K}$. Par ailleurs, comme $\bigcup_{i=1}^{r+1} F_i = E$:

$$\mathscr{D} = \bigcup_{i=1}^{r+1} (F_i \cap \mathscr{D}).$$

Par raison de cardinalité (principe des tiroirs), il existe $i_0 \in [\![1, r+1]\!]$ tel que $F_{i_0} \cap \mathscr{D}$ est infini. Ainsi existe-t-il deux scalaires distincts t_1, t_2 tels que :

$$x_{r+1} + t_1 \cdot x \in F_{i_0} \qquad \text{et} \qquad x_{r+1} + t_2 \cdot x \in F_{i_0}$$

d'où :

$$(t_1 - t_2) \cdot x = (x_{r+1} + t_1 \cdot x) - (x_{r+1} + t_2 \cdot x) \in F_{i_0} \qquad [F_{i_0} \text{ stable par combinaison linéaire}].$$

puis, comme $t_1 \neq t_2$:

$$x \in F_{i_0}.$$

Par construction de x, x n'appartient à aucun des $F_1, \ldots, F_r$. Ainsi :

$$i_0 = r + 1.$$

Nous en déduisons :

$$x \in F_{r+1} \qquad \text{et} \qquad x_{r+1} + t_1 \cdot x \in F_{r+1}.$$

puis :

$$x_{r+1} = x_{r+1} + t_1 \cdot x - t_1 \cdot x \in F_{r+1} \qquad [F_{r+1} \text{ stable par combinaison linéaire}].$$

ce qui n'est pas.

■

Q2. — On raisonne par récurrence finie descendante sur la dimension commune $d \in [\![0, n]\!]$ des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$.

Définition du prédicat. Pour tout $d \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathscr{P}(d)$ le prédicat suivant :

> pour tout $F_1, \ldots, F_d$ sous-espaces de E de dimension d, il existe un sous-espace G de E qui est un supplémentaire de chacun des $F_1, \ldots, F_r$.

Initialisation au rang n. Si tous les sous-espaces $F_1, \ldots, F_r$ sont de dimension n, alors :

$$F_1 = \ldots = F_r = E$$

et donc $\{0_E\}$ est un supplémentaire commun à chacun des $F_1, \ldots, F_r$.

Hérédité. Soit $d \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathscr{P}(d)$ est vraie. Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E, tous de dimension $d - 1$.
Nous devons construire un sous-espace vectoriel de E, qui est supplémentaire de tous les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E.

D'après la question 1, comme tous les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E sont stricts :

$$\exists\, y \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{r} F_i$$

Comme le vecteur y n'appartient à aucun des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E, on a, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$:

$$F_i \cap \operatorname{Vect}(y) = \{0_E\},$$

i.e. F_i et la droite $\operatorname{Vect}(y)$ sont en somme directe, d'où :

$$\dim(F_i \oplus \operatorname{Vect}(y)) = d.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que :

$$(F_1 \oplus \operatorname{Vect}(y)) \oplus G = \ldots = (F_r \oplus \operatorname{Vect}(y)) \oplus G = E.$$

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Démontrons que $\operatorname{Vect}(y) + G$ est un supplémentaire de F_i.

- Comme :
$$\{0_E\} \subset \operatorname{Vect}(y) \cap G \subset (F_i \oplus \operatorname{Vect}(y)) \cap G = \{0_E\} \qquad [\text{car } F_i \oplus \operatorname{Vect}(y) \text{ et } G \text{ sont en somme directe}]$$
  on a :
$$\operatorname{Vect}(y) \cap G = \{0_E\}$$
  et donc $\operatorname{Vect}(y)$ et G sont en somme directe.
- Nous calculons :
$$\dim(\operatorname{Vect}(y) \oplus G) + \dim(F_i) = \dim(\operatorname{Vect}(y)) + \dim(G) + \dim(F_i) = \dim(F_i \oplus \operatorname{Vect}(y)) + \dim(G) = \dim(E) \qquad [\text{car } (F_i \oplus \operatorname{Vect}(y)) \oplus G = E]$$
- Pour conclure que $\operatorname{Vect}(y) \oplus G$ est un supplémentaire de F_i, il reste à vérifier que $(\operatorname{Vect}(y) \oplus G) \cap F_i = \{0_E\}$.
  Soit $x \in (\operatorname{Vect}(y) \oplus G) \cap F_i$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ et $g \in G$ tel que :
$$x = \lambda \cdot y + g \in F_i.$$
  Ainsi :
$$x - \lambda \cdot y = g \in (F_i \oplus \operatorname{Vect}(y)) \cap G.$$
  Comme $F_i \oplus \operatorname{Vect}(y)$ et G sont en somme directe, il vient :
$$x - \lambda \cdot y = 0_E.$$
  Comme F_i et $\operatorname{Vect}(y)$ sont en somme directe, nous en déduisons :
$$x = 0_E.$$

D'après notre étude, $\operatorname{Vect}(y) \oplus G$ est un supplémentaire commun des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E. ■