

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

par David Blottière, le 24 août 2023 à 16h45

RÉVISIONS

4

« En mathématiques, *évident* est le mot le plus dangereux. »

Eric Temple Bell

SOMMAIRE

§ 1. PRÉAMBULE	1
§ 2. COURS	1
§ 3. VRAI-FAUX	2
§ 4. DE LA RÉUNION DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS	4
§ 5. UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE DE L'IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE	4
§ 6. INTERSECTION DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE \mathbf{R}^4	4
§ 7. SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES	4
§ 8. ÉTUDE D'UNE PROJECTION DE \mathbf{R}^3	5
§ 9. ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME D'ESPACE FONCTIONNEL	5
§ 10. LEMME DES CINQ *	5

§ 1. PRÉAMBULE

Un espace vectoriel sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire, ces opérations vérifiant certaines propriétés.

Les ensembles :

$$\mathbf{K}^n \quad \mathcal{F}(A, \mathbf{K}) \quad \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \quad \mathbf{K}[X] \quad \mathbf{K}_n[X] \quad \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$$

sont munis de structures naturelles de \mathbf{K} -espaces vectoriels.

Certains sous-ensembles remarquables d'un \mathbf{K} -espace vectoriel, les sous-espaces vectoriels, sont eux-mêmes munis de structures de \mathbf{K} -espaces vectoriels.

Les exemples de \mathbf{K} -espaces vectoriels sont donc fort nombreux et se rencontrent aussi bien en algèbre (e.g. espaces de polynômes) qu'en analyse (e.g. espaces de fonctions).

Les applications entre \mathbf{K} -espaces vectoriels qui respectent les opérations sont appelées applications linéaires. On associe, à une application linéaire, deux sous-espaces vectoriels naturels : son noyau et son image. Le noyau (resp. l'image) d'une application linéaire permet de trancher sur son injectivité (resp. sa surjectivité).

Si le thème revêt un caractère quelque peu abstrait, un résultat établi en algèbre linéaire trouve des incarnations frappantes :

- en algèbre, e.g. caractérisation du fait que deux polynômes à coefficients complexes aient une racine commune dans \mathbf{C} , sans calculer explicitement aucune de leurs racines, via leur résultant (cf. DM de Spé) ;
- en analyse, e.g. description en extension de l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène, à partir de suffisamment de solutions linéairement indépendantes (cf. cours de MP2I sur les EDLCCH2).

NOTATION — Dans tout ce document, la lettre \mathbf{K} désigne l'un des deux corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

§ 2. COURS

Dans un premier temps, on reverra la notion d'application entre deux ensembles et les concepts fondamentaux qui y sont attachés :

- composition ;
- injectivité ;
- surjectivité ;
- bijectivité ;
- la notion d'image directe d'une partie de la source (i.e. de l'ensemble de départ) d'une application ;
- la notion d'image réciproque d'une partie du but (i.e. de l'ensemble d'arrivée) d'une application ;

grâce au polycopié de cours sur les ensembles et les applications [PDF].

Ces notions ne sont pas spécifiques à l'algèbre linéaire. Elles jouent également un grand rôle en analyse (e.g. théorème de la bijection) et en probabilités (e.g. image d'une variable aléatoire par une application). Cependant, dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, nous disposons de caractérisations très agréables de la bijectivité par exemple (via le théorème du rang). Nous les reverrons plus tard.

Viendra ensuite le temps de débiter l'étude de la structure centrale en algèbre linéaire, celle d'espace vectoriel, en étudiant les axiomes qui la définissent et les premières conséquences qui en découlent. On s'appuiera sur le polycopié de cours sur les espaces vectoriels [PDF].

Pour comprendre l'intérêt de cette structure, on devra connaître les exemples d'espaces vectoriels « usuels » : \mathbf{K}^n , $\mathcal{F}(A, \mathbf{K})$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Ainsi un résultat établi dans la théorie générale des espaces vectoriels possède des applications dans les mondes de la géométrie, des fonctions, des suites numériques, des polynômes, des matrices et de bien d'autres encore.

La notion de sous-espace vectoriel sera la suivante au menu. On reverra sa définition et on sera en mesure d'énoncer et de démontrer sa caractérisation classique. On étudiera alors plusieurs notions importantes attenantes.

- intersection de sous-espaces vectoriels;
- somme de sous-espaces vectoriels;
- sous-espace vectoriel engendré par une partie, en particulier par une partie finie;
- somme directe de deux sous-espaces vectoriels;
- supplémentaires d'un sous-espace vectoriel.

Toutes les définitions seront sues et on connaîtra les énoncés et démonstrations de tous les résultats. Ces dernières ne revêtent pas de difficulté particulière et constituent un excellent entraînement. Comme un sous-espace vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel, notre collection d'exemples d'espaces vectoriels se trouve considérablement enrichie.

Les applications entre deux espaces vectoriels qui respectent les deux opérations \cdot et $+$ sont qualifiées de linéaires. On commencera par revoir la définition formelle d'une application linéaire, avant de travailler les notions suivantes :

- homothéties;
- image directe d'un sous-espace vectoriel de la source d'une application linéaire (énoncé et démonstration);
- image réciproque d'un sous-espace vectoriel du but d'une application linéaire (énoncé et démonstration);
- noyau et image d'une application linéaire;
- caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire via son noyau (énoncé et démonstration);
- caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire via son image (énoncé, la démonstration étant triviale);

grâce aux parties 1 à 4 du polycopié de cours sur les applications linéaires [PDF]. On laissera de côté tout ce qui a trait à la dimension, pour le moment (la fiche de révisions n°5 y sera dédiée).

Si E et F sont des espaces vectoriel alors l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel, que l'on reverra.

Dans le cas particulier où $E = F$, $\mathcal{L}(E, E)$ est simplement noté $\mathcal{L}(E)$ et il possède une structure d'algèbre, que l'on devra connaître.

Enfin l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E , noté $GL(E)$, est un groupe pour la loi de composition. Il conviendra de savoir énoncé ce résultat avec précision et de savoir le redémontrer (C20.54). Il s'agit d'un très bon exercice mêlant bijectivité et linéarité.

Les projecteurs et les symétries sont des exemples importants d'applications linéaires, que l'on ne négligera pas. Ils joueront un grand rôle dans le programme de Spé (ce seront nos premiers exemples d'applications diagonalisables) et il faudra faire l'effort de tout connaître sur ces thèmes (définitions, énoncés et démonstrations).

Ce travail sur le cours est fondamental.

§ 3. VRAI-FAUX

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

UN CORRIGÉ

L'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$

est-elle injective? Justifier la réponse.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

UN CORRIGÉ

L'application g définie par :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^2 - 1 \end{array} \right.$$

est-elle injective? Justifier la réponse.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

UN CORRIGÉ

L'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^2 - 1 \end{array} \right.$$

est-elle surjective? Justifier la réponse.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

UN CORRIGÉ

L'application h définie par :

$$h \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow [-1; +\infty[\\ x \longmapsto x^2 - 1 \end{array} \right.$$

est-elle surjective? Justifier la réponse.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

UN CORRIGÉ

Soit l'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^2 - 1. \end{array} \right.$$

L'assertion :

$$f((-2, 3)) = [f(-2), f(3)] = [3, 8]$$

est-elle vraie? Justifier la réponse.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

UN CORRIGÉ

Soit l'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^2 - 1. \end{array} \right.$$

L'assertion :

$$f^{-1}([15, 24]) = [-5, -4] \cup [4, 5]$$

est-elle vraie? Justifier la réponse.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

UN CORRIGÉ

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel. Soient e_1, e_2, f_1, f_2 des vecteurs de E . L'assertion :

$$\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(f_1, f_2) \implies \{e_1, e_2\} = \{f_1, f_2\}$$

est-elle nécessairement vraie? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

UN CORRIGÉ

Les sous-espaces vectoriels F et G de \mathbf{K}^3 définis par :

$$F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((6, 2, 5), (5, 1, 4))$$

sont-ils en somme directe? Justifier la réponse.

§ 4. DE LA RÉUNION DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

UN CORRIGÉ

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Démontrer l'équivalence suivante.

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

□

§ 5. UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE DE L'IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

UN CORRIGÉ

Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et des vecteurs e_1, \dots, e_n de E tels que $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, i.e. on suppose que E est de dimension finie. Démontrer

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

□

§ 6. INTERSECTION DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE \mathbf{R}^4

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

UN CORRIGÉ

On considère les deux sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^4 , $E_1 = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(w_1, w_2)$ avec :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4) \quad v_2 = (2, -1, 4, -1) \quad w_1 = (0, 7, -1, 17) \quad w_2 = (-2, 9, 3, 11).$$

Démontrer que $E_1 \cap E_2 = \text{Vect}((-1, 8, 1, 14))$.

□

§ 7. SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

UN CORRIGÉ

Soient

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\} \subset \mathbf{R}^3 \quad \text{et} \quad G := \text{Vect}((1, 1, 1)) \subset \mathbf{R}^3.$$

Q1. — Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^3 .

Q2. — Démontrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbf{R}^3 .

On désigne par E le \mathbf{R} -espace vectoriel des fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbf{R} , qui sont continues sur $[0, 1]$. Soient :

$$F := \left\{ f \in E : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\} \subset E \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{array}{c} [0, 1] \\ x \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ a \end{array} : a \in \mathbf{R} \right\} \subset E.$$

L'ensemble G est donc l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} , qui sont constantes.

Q3. — Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

Q4. — Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E .

□

§ 8. ÉTUDE D'UNE PROJECTION DE \mathbf{R}^3

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

UN CORRIGÉ

Nous définissons :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = x - y\} \quad \text{et} \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = -y = z\}.$$

Q1. — Démontrer que P et D sont deux sous-espaces supplémentaires de \mathbf{R}^3 .

Q2. — Soit p la projection de \mathbf{R}^3 sur P , parallèlement à D . Calculer $p(x, y, z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

□

§ 9. ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME D'ESPACE FONCTIONNEL

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

UN CORRIGÉ

Soit E le \mathbf{R} -espace vectoriel des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , qui sont de classe \mathcal{C}^∞ . On considère l'application T définie par :

$$T \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \\ f \longmapsto \end{array} \right. T(f) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto f'(t) + \frac{t \cdot f(t)}{1+t^2} \end{array} \right. .$$

Q1. — Démontrer que l'application T est bien définie.

Q2. — Démontrer que l'application T est linéaire.

Q3. — Déterminer le noyau de T . Qu'en déduire?

Q4. — Démontrer que l'application T est surjective.

□

§ 10. LEMME DES CINQ *

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

UN CORRIGÉ

On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_3} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5 \end{array}$$

formé de \mathbf{K} -espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e. :

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2 \quad ; \quad h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3 \quad ; \quad h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$$

et que les deux lignes sont exactes, i.e. :

$$\text{Ker}(f_2) = \text{Im}(f_1) \quad ; \quad \text{Ker}(f_3) = \text{Im}(f_2) \quad ; \quad \text{Ker}(f_4) = \text{Im}(f_3)$$

$$\text{Ker}(g_2) = \text{Im}(g_1) \quad ; \quad \text{Ker}(g_3) = \text{Im}(g_2) \quad ; \quad \text{Ker}(g_4) = \text{Im}(g_3).$$

On suppose enfin que les applications linéaires h_1, h_2, h_4, h_5 sont des isomorphismes. Démontrer que h_3 est un isomorphisme.

□

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1

ÉNONCÉ

Faux.

Elle n'est pas injective car $f(-1) = 0 = f(1)$.

Remarque — On rappelle que, si P et Q sont deux proposition logique, alors :

- $P \implies Q$ est par définition la proposition : $\text{non}(P)$ ou Q ;
- la contraposée de l'implication $P \implies Q$, qui a même valeur de vérité qu'elle, est par définition l'implication : $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$;
- la négation de l'implication $P \implies Q$ « est » la proposition : P et $\text{non}(Q)$.

L'application f est injective si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$$

qui se reformule en :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y) \quad [\text{contraposée de l'implication}]$$

Ainsi, l'application f n'est pas injective si et seulement si :

$$(\star) \quad \exists (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \neq y \text{ et } f(x) = f(y) \quad [\text{négation de l'implication}]$$

La formulation (\star) explique pourquoi le contre-exemple donné ($x = -1$ et $y = 1$) permet de nier l'injectivité de f .

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2**ÉNONCÉ**

Vrai.

Soient $x \in \mathbf{R}_+$ et $y \in \mathbf{R}_+$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 = y^2$ puis, comme x et y sont positifs, $x = y$.



UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3**ÉNONCÉ**

Faux.

Le nombre -2 qui appartient au but de f ne possède aucun antécédent par f . En effet, si tel était le cas, il existerait $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^2 - 1 = -2$ et alors x^2 serait strictement négatif, ce qui n'est pas. ■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4**ÉNONCÉ**

Vrai.

Soit $y \in [-1, +\infty[$. Alors $x := \sqrt{y+1}$ est un nombre réel bien défini, qui vérifie $h(x) = y$. ■

Remarque — Les exercices 1 à 4 mettent en lumière un fait essentiel. L'ensemble de départ (source) et l'ensemble d'arrivée (but) d'une application sont cruciaux. On les précisera toujours et on se refusera à écrire « l'application $f(x) = x^2 - 1$ » qui est vide de sens.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5**ÉNONCÉ**

Faux.

En effet, $0 \in [-2, 3]$ donc $-1 = f(0) \in f([-2, 3])$. Or $-1 \notin [3, 8]$. Les ensembles $f([-2, 3])$ et $[3, 8]$ ne sont donc pas égaux. ■

Remarque — Le théorème de la bijection ne peut pas être appliqué ici car l'application f n'est pas strictement monotone sur $[-2, 3]$. Cependant, on peut démontrer, en raisonnant par double inclusion, que $f([-2, 3]) = [-1, 8]$. Sauriez-vous en rédiger une solution soignée ?

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6

ÉNONCÉ

Vrai.

Démontrons l'assertion par double inclusion.

⊂ Soit $x \in f^{-1}([15, 24])$. Alors $15 \leq f(x) = x^2 - 1 \leq 24$ et donc $16 \leq x^2 \leq 25$. Par croissance de la fonction racine carrée sur \mathbf{R}_+ , il vient $4 \leq |x| \leq 5$.

- Si $x \geq 0$, alors $4 \leq x \leq 5$ et donc $x \in [4, 5] \subset [-5, -4] \cup [4, 5]$.
- Si $x < 0$, alors $4 \leq -x \leq 5$ et donc $-5 \leq x \leq -4$. On en déduit $x \in [-5, -4] \subset [-5, -4] \cup [4, 5]$.

Dans tous les cas $x \in [-5, -4] \cup [4, 5]$.

⊃ Soit $x \in [-5, -4] \cup [4, 5]$.

- Si $x \in [-5, -4]$ alors par décroissance de la fonction carrée sur \mathbf{R}_- , $16 \leq x^2 \leq 25$ et donc $15 \leq f(x) = x^2 - 1 \leq 24$. Ainsi $x \in f^{-1}([15, 24])$.
- Si $x \in [4, 5]$ alors par croissance de la fonction carrée sur \mathbf{R}_+ , $16 \leq x^2 \leq 25$ et donc $15 \leq f(x) = x^2 - 1 \leq 24$. Ainsi $x \in f^{-1}([15, 24])$.

Dans tous les cas $x \in f^{-1}([15, 24])$. ■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7

ÉNONCÉ

Faux.

Un contre-exemple est donné par $E = \mathbf{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$.

• Comme :

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot f_1 + \frac{1}{2} \cdot f_2 \in \text{Vect}(f_1, f_2) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{2} \cdot f_1 - \frac{1}{2} \cdot f_2 \in \text{Vect}(f_1, f_2)$$

il vient :

$$\text{Vect}(e_1, e_2) \subset \text{Vect}(f_1, f_2) \quad [\text{propriété de minimalité d'un sous-espace engendré}].$$

• Comme :

$$f_1 = e_1 + e_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2) \quad \text{et} \quad f_2 = e_1 - e_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$$

il vient :

$$\text{Vect}(f_1, f_2) \subset \text{Vect}(e_1, e_2) \quad [\text{propriété de minimalité d'un sous-espace engendré}].$$

Des deux points précédents, nous déduisons $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(f_1, f_2)$, mais bien sûr $\{e_1, e_2\} \neq \{f_1, f_2\}$. ■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8

ÉNONCÉ

Faux.

On observe

$$(1, 1, 1) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0) \in F \quad \text{et} \quad (1, 1, 1) = (6, 2, 5) - (5, 1, 4) \in G$$

et donc $F \cap G \neq \{(0, 0, 0)\}$.



Remarque — Nous aurions pu aussi raisonner à l'aide des dimensions.

- Les vecteurs $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ étant linéairement indépendants, $\dim(F) = 2$.
- Les vecteurs $(6, 2, 5)$, $(5, 1, 4)$ étant linéairement indépendants, $\dim(G) = 2$.
- Si F et G étaient en somme directe, alors $F \oplus G$ serait un sous-espace vectoriel de dimension 4 (formule de Grassmann) de \mathbb{K}^3 , qui est de dimension 3. Impossible.

[UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9](#)[ÉNONCÉ](#)

On pourra visionner un corrigé vidéo en cliquant sur le lien suivant [\[YouTube\]](#) (12 minutes). ■

Remarque — De la même manière on démontre que la réunion $H_1 \cup H_2$ de deux sous-groupes H_1, H_2 d'un groupe G est un sous-groupe de G si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10

ÉNONCÉ

On raisonne par double inclusion.

⊂ Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k$. D'après la linéarité de f :

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f(e_k) \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

⊃ Il est clair que les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ appartiennent à $\text{Im}(f)$. D'après le cours, nous savons que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F . Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, il vient $\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \text{Im}(f)$. ■

Remarque — Ce résultat est fort commode pour déterminer l'ensemble image d'une application linéaire :

Slogan — « À l'aide d'une famille génératrice de sa source, on obtient une famille génératrice de son ensemble image. »

On pourra l'appliquer sans le redémontrer.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11

ÉNONCÉ

On raisonne par double inclusion.

⊂ Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Comme $u \in E_1$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 + 4\lambda_2, 4\lambda_1 - \lambda_2).$$

Comme $u \in E_2$, il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$u = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = (-2\mu_2, 7\mu_1 + 9\mu_2, -\mu_1 + 3\mu_2, 17\mu_1 + 11\mu_2).$$

D'où :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = & -2\mu_2 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = & 7\mu_1 + 9\mu_2 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = & -\mu_1 + 3\mu_2 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 = & 17\mu_1 + 11\mu_2 \end{cases}$$

On applique les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_4 \leftarrow L_2 - 4L_1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = & -2\mu_2 \\ & -5\lambda_2 = & 7\mu_1 + 13\mu_2 \\ & -2\lambda_2 = & -\mu_1 + 9\mu_2 \\ & -9\lambda_2 = & 17\mu_1 + 19\mu_2 \end{cases}$$

puis les opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3$, $L_4 \leftarrow L_2 + 17L_3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = & -2\mu_2 \\ & -19\lambda_2 = & 76\mu_2 \\ & -2\lambda_2 = & -\mu_1 + 9\mu_2 \\ & -43\lambda_2 = & + 172\mu_2 \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_4 livrent toutes deux $\lambda_2 = -4\mu_2$. Grâce à L_3 , nous en déduisons $\mu_1 = \mu_2$. Ainsi :

$$u = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = \mu_1 (w_1 + w_2) = \mu_1 (-2, 16, 2, 28).$$

Donc $u \in \text{Vect}((-2, 16, 2, 28)) = \text{Vect}((-1, 8, 1, 14))$. Nous avons donc établi :

$$E_1 \cap E_2 \subset \text{Vect}_{\mathbf{R}}((-1, 8, 1, 14)).$$

⊃ D'après ce qui précède :

$$(-1, 8, 1, 14) = \frac{1}{2}(-2, 16, 2, 28) = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \in E_2.$$

En reprenant le système étudié auparavant, spécialisé à $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$, nous trouvons $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -2$. Ainsi :

$$(-1, 8, 1, 14) = 3v_1 - 2v_2 \in E_1.$$

Donc $(-1, 8, 1, 14) \in E_1 \cap E_2$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré :

$$\text{Vect}((-1, 8, 1, 14)) \subset E_1 \cap E_2.$$



UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 12

ÉNONCÉ

Q1. — Clairement $(0, 0, 0) \in F$. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des vecteurs de F et soient λ_1 et λ_2 deux réels. Alors

$$\lambda_1 \cdot (x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 \cdot (x_2, y_2, z_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

et puisque $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 + z_2 = 0$,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2 (x_2 + y_2 + z_2) = 0.$$

Ainsi $\lambda_1 \cdot (x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 \cdot (x_2, y_2, z_2) \in F$.

Comme F est non vide et stable par combinaison linéaire, F est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 .

Quant à G , il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$. ■

Q2. — Nous devons démontrer que pour tout vecteur de \mathbf{R}^3 s'écrit d'une unique manière comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . Pour cela, nous raisonnons par analyse et synthèse.

Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

Analyse. Supposons qu'il existe $(x_1, y_1, z_1) \in F$ et $u \in G$ tels que $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + u$. Comme $u \in G$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Il vient alors :

$$(x_1, y_1, z_1) = (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda).$$

Comme $(x_1, y_1, z_1) \in F$:

$$0 = x_1 + y_1 + z_1 = x - \lambda + y - \lambda + z - \lambda$$

puis $\lambda = \frac{x + y + z}{3}$. Nous en déduisons

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right) \quad \text{et} \quad u = \frac{x + y + z}{3} \cdot (1, 1, 1).$$

À l'issue de cette analyse, nous observons que nous obtenons un unique candidat pour (x_1, y_1, z_1) et u . Ainsi, si la décomposition cherchée existe, elle est unique. L'unicité est donc établie.

Synthèse. Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse conviennent.

- Comme :

$$\frac{2x - y - z}{3} + \frac{-x + 2y - z}{3} + \frac{-x - y + 2z}{3} = 0$$

le vecteur $\left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$ appartient à F .

- Clairement $\frac{x + y + z}{3} \cdot (1, 1, 1) \in G$.

- On calcule :

$$\left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right) + \frac{x + y + z}{3} \cdot (1, 1, 1) = (x, y, z).$$

Conclusion. Il existe un unique vecteur de F , $\left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$ et un unique vecteur de G , $\frac{x + y + z}{3} \cdot (1, 1, 1)$ dont la somme vaut (x, y, z) . ■

Q3. — Nous introduisons l'application φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx. \end{array} \right.$$

D'après la linéarité de l'intégrale, pour tout $(f, g) \in E^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$

$$\varphi(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \int_0^1 \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x) dx + \mu \int_0^1 g(x) dx = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g).$$

L'application φ est donc linéaire. D'après le cours, son noyau :

$$\text{Ker}(\varphi) := \{f \in E : \varphi(f) = 0\} = F$$

est un sous-espace vectoriel de E .

On observe que

$$G = \left\{ \left| \begin{array}{l} [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow a : a \in \mathbf{R} \end{array} \right. \right\} = \text{Vect} \left(\left| \begin{array}{l} [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow 1 \end{array} \right. \right).$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de E , comme sous-espace vectoriel engendré par un vecteur de E , l'application constante de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui envoie tout réel sur 1. ■

Q4. — Nous devons démontrer que pour tout vecteur de E s'écrit d'une unique manière comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . Pour cela, nous raisonnons par analyse et synthèse.

Soit $f \in E$.

Analyse. Supposons qu'il existe $g \in F$ et $h \in G$ tels que $f = g + h$. Comme $h \in G$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que :

$$h \left| \begin{array}{l} [0;1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ a. \end{array}$$

D'après la linéarité de l'intégrale et $g \in F$

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 g(x) + h(x) \, dx = \int_0^1 g(x) \, dx + \int_0^1 h(x) \, dx = a.$$

Ainsi

$$h \left| \begin{array}{l} [0;1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \int_0^1 f \end{array} \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{l} [0;1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ f(x) - \int_0^1 f. \end{array}$$

À l'issue de cette analyse, nous observons que nous obtenons un unique candidat pour g et h . Ainsi, si la décomposition cherchée existe, elle est unique. L'unicité est donc établie.

Synthèse. Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse conviennent.

- Comme

$$\int_0^1 f(x) - \int_0^1 f \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx - \int_0^1 \int_0^1 f \, dx = \int_0^1 f - \int_0^1 f = 0$$

la fonction

$$g \left| \begin{array}{l} [0;1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ f(x) - \int_0^1 f. \end{array}$$

appartient à G .

- La fonction

$$h \left| \begin{array}{l} [0;1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \int_0^1 f \end{array}$$

est constante, donc appartient à G

- Enfin, on a clairement $g + h = f$.

Conclusion. Il existe un unique vecteur de F :

$$g \left| \begin{array}{l} [0;1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ f(x) - \int_0^1 f \end{array}$$

et un unique vecteur de G :

$$h \left| \begin{array}{l} [0;1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \int_0^1 f \end{array}$$

dont la somme vaut f . ■

Remarque — Pour montrer que F et G sont en somme directe dans la question 2, nous aurions pu établir :

$$F \cap G = \{(0,0,0)\} \quad \text{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = 3$$

car \mathbf{R}^3 est de dimension finie 3.

Cette méthode ne peut pas être appliquée pour résoudre la question 4, car $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ n'est pas de dimension finie. Pour le justifier, on invite le lecteur à rédiger une démonstration de la liberté de la famille :

$$\left(f_k \left| \begin{array}{l} [0,1] \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ x^k \end{array} \right)_{k \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}.$$

La stratégie adoptée ici permet aisément d'écrire :

- la projection de l'espace sur F parallèlement à G ;
- la projection de l'espace sur G parallèlement à F ;
- la symétrie de l'espace par rapport à F , parallèlement à G ;
- la symétrie de l'espace par rapport à G , parallèlement à F .

dans les deux contextes de l'énoncé.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 13

ÉNONCÉ

Q1. — • Vérifions que P est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 . On observe que :

$$P = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

où $u_1 := (1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$. L'ensemble P est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1 et u_2 .

• Vérifions que D est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 . On observe que :

$$D = \{(-y, y, -y) : y \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(u_3)$$

où $u_3 := (-1, 1, -1)$. L'ensemble D est donc le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_3 .

• Soit $v = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Nous démontrons que v s'écrit d'une unique manière comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D , en raisonnant par analyse-synthèse.

Analyse. Soient $v_1 \in P$ et $v_2 \in D$ tels que $v = v_1 + v_2$. Comme $v_1 \in P$ et $v_2 \in D$, il existe des réels x_1, y_1, y_2 tels que :

$$v_1 = (x_1, y_1, x_1 - y_1) \quad \text{et} \quad v_2 = (-y_2, y_2, -y_2).$$

Nous en déduisons :

$$(x, y, z) = (x_1 - y_2, y_1 + y_2, x_1 - y_1 - y_2)$$

puis :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 & & - & y_2 & = & x \\ & y_1 & + & y_2 & = & y \\ x_1 & - & y_1 & - & y_2 & = & z. \end{cases}$$

On résout ce système d'inconnues x_1, y_1, y_2 en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & - & y_2 & = & x \\ & y_1 & + & y_2 & = & y \\ & - & y_1 & & 0 & = & z - x \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - & y_2 & & = & x \\ & & y_2 & + & y_1 & = & y \\ & & & & y_1 & = & x - z \end{cases}$$

Nous en déduisons que ce système possède une unique solution :

$$x_1 = y + z \quad ; \quad y_1 = x - z \quad ; \quad y_2 = -x + y + z.$$

Ainsi, si v_1 et v_2 existent, alors :

$$v_1 = (y + z, x - z, -x + y + 2z) \quad \text{et} \quad v_2 = (x - y - z, -x + y + z, x - y - z).$$

Il y a donc unicité de v_1 et v_2 . Donc si la décomposition existe, elle est unique.

Synthèse. Vérifions si v_1 et v_2 , obtenus en fin d'analyse, conviennent.

- $v_1 = (y + z, x - z, -x + y + 2z) \in P$ car :

$$-x + y + 2z = y + z - (x - z).$$

- $v_2 = (x - y - z, -x + y + z, x - y - z) \in D$ car :

$$x - y - z = -(-x + y + z) = x - y - z$$

- Calculons enfin $v_1 + v_2$.

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (y + z, x - z, -x + y + 2z) + (x - y - z, -x + y + z, x - y - z) \\ &= (x, y, z) \\ &= v. \end{aligned}$$

Conclusion. Il existe un unique

$$v_1 = (y + z, x - z, -x + y + 2z) \in P$$

et un unique

$$v_2 = (x - y - z, -x + y + z, x - y - z) \in D$$

tels que $v = (x, y, z) = v_1 + v_2$. ■

Q2. — L'application p est définie par :

$$p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ v = v_1 + v_2, \text{ où } v_1 \in P \text{ et } v_2 \in D & \longmapsto & v_1 \end{array} \right.$$

et donc, d'après la question 1 :

$$p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y + z, x - z, -x + y + 2z). \end{array} \right. \quad \text{■}$$

Remarque — Nous aurions pu aussi démontrer $P \oplus D = \mathbf{R}^3$ en démontrant :

$$P \cap D = \{0_{\mathbf{R}^3}\} \quad \text{et} \quad \dim(P) + \dim(D) = \dim(\mathbf{R}^3).$$

Notre choix de stratégie est motivé par la question 2, i.e. l'explicitation de la projection de \mathbf{R}^3 sur P parallèlement à D .

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 14

ÉNONCÉ

Q1. — Il s'agit de démontrer que pour tout $f \in E$, $T(f) \in E$. Soit $f \in E$. Comme f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , i.e. indéfiniment dérivable sur \mathbf{R} , la fonction f' est également de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} . La fonction a définie par :

$$a \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \right. \frac{\mathbf{R}}{1+t^2}$$

est une fonction rationnelle définie sur \mathbf{R} , donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} . Par théorème d'opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction :

$$T(f) = f' + a \times f$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , i.e. $T(f) \in E$. ■

Q2. — Soient $(f_1, f_2) \in E^2$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$. Comme la dérivation est linéaire :

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) &= (\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)' + a \times (\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) \\ &= \lambda_1 \cdot f_1' + \lambda_2 \cdot f_2' + \lambda_1 \cdot a \times f_1 + \lambda_2 \cdot a \times f_2 \\ &= \lambda_1 \cdot (f_1' + a \times f_1) + \lambda_2 \cdot (f_2' + a \times f_2) \\ &= \lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2). \end{aligned}$$

Q3. — • Le noyau de T est par définition l'ensemble solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad y' + \frac{t}{1+t^2} \cdot y = 0$$

d'inconnue $y \in E$. Comme une primitive de la fonction $a: t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ sur \mathbf{R} est :

$$A \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \right. \frac{\mathbf{R}}{\frac{1}{2} \cdot \ln(1+t^2) = \ln(\sqrt{1+t^2})}$$

le cours sur les équations différentielles linéaires [PDF] nous livre :

$$\text{Ker}(T) = \text{Sol}_{(\mathcal{E}\mathcal{H})} = \text{Vect} \left(\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \right. e^{-\ln(\sqrt{1+t^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$

• Comme $\text{Ker}(T) \neq \{0_E\}$, l'application T n'est pas injective. ■

Q4. — Soit $g \in E$. Nous cherchons une fonction $f \in E$ telle que $T(f) = g$, i.e. telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) + \frac{t \cdot f(t)}{1+t^2} = g(t).$$

• Nous sommes ainsi conduit à chercher une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(\mathcal{E}) \quad y' + \frac{t}{1+t^2} \cdot y = g(t)$$

d'inconnue $y \in E$. Grâce à la résolution de $(\mathcal{E}\mathcal{H})$ effectuée à la question 3 et à méthode de la variation de la constante (cf. cours sur les équations différentielles linéaires [PDF]), nous construisons la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \right. \frac{\mathbf{R}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \int_0^t \sqrt{1+u^2} \cdot g(u) \, du}$$

que nous savons être de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} et vérifier :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) + \frac{t \cdot f(t)}{1+t^2} = g(t).$$

• Pour conclure à la surjectivité de T , il reste à vérifier que la fonction f , précédemment introduite, est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

• La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

• Les fonctions $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ et g sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} . Par théorème d'opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction :

$$u \mapsto \sqrt{1+u^2} \cdot g(u)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

• La fonction :

$$t \mapsto \int_0^t \sqrt{1+u^2} \cdot g(u) \, du$$

qui est l'unique primitive de la fonction $u \mapsto \sqrt{1+u^2} \cdot g(u)$ sur \mathbf{R} qui s'annule en 0 (théorème fondamental de l'analyse) est donc également de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

• Alors, de nouveau par théorème d'opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \right. \frac{\mathbf{R}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \int_0^t \sqrt{1+u^2} \cdot g(u) \, du}$$

est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} . ■

Remarque — Si la formulation des questions 3 et 4 met en jeu des termes d'algèbre linéaire, il s'avère en fait que l'énoncé porte sur des équations différentielles linéaires.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 15

ÉNONCÉ

- Démontrons que l'application linéaire h_3 est injective.

Soit $x_3 \in \text{Ker}(h_3)$.

- Promenade à droite de la flèche h_3 du diagramme.

Alors :

$$h_3(x_3) = 0_{F_3} \quad (1)$$

et, comme g_3 est linéaire, $g_3 \circ h_3(x_3) = 0_{F_4}$.

Comme $g_3 \circ h_3 = h_4 \circ f_3$, $h_4 \circ f_3(x_3) = 0_{F_4}$.

L'application h_4 est injective, donc $f_3(x_3) = 0_{E_4}$, i.e. $x_3 \in \text{Ker}(f_3)$.

- Promenade à gauche de la flèche h_3 du diagramme.

Comme $\text{Ker}(f_3) = \text{Im}(f_2)$, il existe $x_2 \in E_2$ tel que :

$$x_3 = f_2(x_2). \quad (2)$$

D'après (1), $0_{F_3} = h_3(x_3) = h_3 \circ f_2(x_2)$.

Puisque $h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$, $g_2(h_2(x_2)) = 0_{F_3}$, i.e. $h_2(x_2) \in \text{Ker}(g_2)$.

Comme $\text{Ker}(g_2) = \text{Im}(g_1)$, il existe $y_1 \in F_1$ tel que $h_2(x_2) = g_1(y_1)$.

L'application h_1 est surjective, donc il existe $x_1 \in E_1$ tel que $y_1 = h_1(x_1)$. Ainsi :

$$h_2(x_2) = g_1(y_1) = g_1(h_1(x_1)).$$

Comme $g_1 \circ h_1 = h_2 \circ f_1$, il vient :

$$h_2(x_2) = h_2(f_1(x_1)).$$

Or l'application h_2 est injective. Donc $x_2 = f_1(x_1)$ et, grâce à (2) :

$$x_3 = f_2(x_2) = f_2(f_1(x_1)).$$

Comme $\text{Im}(f_1) \subset \text{Ker}(f_2)$, $x_3 = 0_{E_3}$.

- Démontrons que l'application linéaire h_3 est surjective.

Soit $y_3 \in F_3$.

- Promenade à droite de la flèche h_3 du diagramme.

L'application h_4 est surjective et $g_3(y_3) \in F_4$, donc il existe $x_4 \in E_4$ tel que :

$$g_3(y_3) = h_4(x_4). \quad (3)$$

Comme $\text{Im}(g_3) \subset \text{Ker}(g_4)$, $0_{F_5} = g_4(g_3(x_3)) = g_4(h_4(x_4))$.

Or $g_4 \circ h_4 = h_5 \circ f_4$. Donc $h_5(f_4(x_4)) = 0_{F_5}$.

Comme l'application h_5 est injective, $f_4(x_4) = 0_{E_5}$, i.e. $x_4 \in \text{Ker}(f_4)$.

Puisque $\text{Ker}(f_4) = \text{Im}(f_3)$, il existe $x_3 \in E_3$ tel que $f_4(x_4) = f_3(x_3)$.

Grâce à (3), $g_3(y_3) = h_4(f_3(x_3))$.

Comme $h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3$:

$$g_3(y_3) = g_3(h_3(x_3)).$$

Donc $y_3 - h_3(x_3) \in \text{Ker}(g_3)$.

- Promenade à gauche de la flèche h_3 du diagramme.

Comme $\text{Ker}(g_3) = \text{Im}(g_2)$, il existe $y_2 \in F_2$ tel que $y_3 - h_3(x_3) = g_2(y_2)$.

Comme l'application h_2 est surjective, il existe $x_2 \in E_2$ tel que $y_2 = h_2(x_2)$ et donc :

$$y_3 - h_3(x_3) = g_2(h_2(x_2)).$$

Comme $g_2 \circ h_2 = h_3 \circ f_3$:

$$y_3 - h_3(x_3) = h_3(f_3(x_2))$$

et ainsi :

$$y_3 = h_3(f_3(x_2) + x_3) \in \text{Im}(h_3)$$

■

Remarque — Le résultat vaut si on remplace « espace vectoriel » par « groupe abélien » et « application linéaire » par « morphisme de groupes ». Notre démonstration ne fait jamais appel à la multiplication par un scalaire.