1.2 Mathématiques 1 - filières MP et MPI

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le thème du problème était un théorème de stabilité de Liapounov. Il s'agissait d'un sujet commun aux filières MP et MPI.
Il permettait d'aborder un nombre significatif de parties du programme, topologie, algèbre linéaire et calcul différentiel.
Le problème était de longueur raisonnable, peut-être un peu long pour une épreuve de trois heures, mais un candidat l'a traité quasiment en totalité.
Le sujet était progressif, il a permis de classer correctement les candidats, pour le CCMP comme pour le CMT. La dernière partie, assez difficile et qui portait sur le calcul différentiel, a été très peu abordée, donc le barème valorisait les seize premières questions.
Les correcteurs ont observé une dégradation de la présentation des copies. L'interdiction des effaceurs et autres ne justifie pas les torchons, rappelons que le brouillon est fourni par le concours, par ailleurs les encres pâles passent mal à la numérisation. Que cela soit bien clair : si le correcteur n'arrive pas à lire, parce que l'encre est trop pâle, parce que l'écriture est indéchiffrable ou parce que les fragments de la démonstration sont noyés dans des ratures, il mettra zéro à la question. On ne met pas des points au bénéfice du doute. Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe A.

1.2.2 Conclusion

En résumé, on peut conseiller aux futurs candidats de rédiger soigneusement les questions de début du problème, d'écrire en noir et d'éviter l'excès de ratures. Une bonne méthode pour ce dernier point est de commencer les questions au brouillon, jusqu'à ce que l'on soit raisonnablement convaincu d'avoir compris la démarche à appliquer. On peut alors rédiger directement pour ne pas perdre de temps.

1.3 Mathématiques 2 - filière MP et MPI

1.3.1 Présentation du sujet

On se proposait, dans cette épreuve de quatre heures, d'étudier « la fonction de Wallis », notée f, sous différents aspects. Le but était, successivement, d'en préciser le domaine de définition, d'étudier sa régularité, ses variations, sa convexité, sa « «développabilité en série entière »... puis de la caractériser par une relation fonctionnelle. Elle concernait la presque totalité du programme d'analyse de première et seconde années de CPGE, dans les filières MPSI, MP et MPI. La difficulté et la longueur étaient raisonnables et sa résolution ne nécessitait que des techniques et savoirs conformes aux programmes officiels et à l'esprit de ces filières.
La première partie incluait l'étude d'une série entière (utile ultérieurement) et permettait, grâce à une méthode très classique, d'évaluer $\zeta(2)$.

La deuxième permettait d'établir des résultats asymptotiques relatifs à f et d'en obtenir une représentation graphique. Elle utilisait les corollaires du théorème de la convergence dominée figurant au programme.

L'objectif de la troisième partie était de déterminer un équivalent simple de $f(n)(0)$ lorsque n tend vers l'infini puis de prouver qu'elle était développable en série entière au voisinage de 0.

Celui de la quatrième, plus technique, était d'évaluer précisément $f''(0)$ en utilisant sans la nommer la formule de Parseval et le théorème de la convergence dominée.

La dernière partie, enfin, permettait de montrer que f est la seule fonction numérique vérifiant certaines propriétés (convexité logarithmique et relation fonctionnelle) puis d'étudier rapidement une généralisation de ce problème. Elle exploitait opportunément l'inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz.

1.3.2 Remarques sur la présentation des copies

Il convient de mentionner, dans ce rapport, qu'une partie non négligeable des copies présente des insuffisances criantes en terme de présentation, de lisibilité et de syntaxe (exemple : « c'est du Riemann avec 2>1 »).

L'usage d'un brouillon semble être désormais abandonné, à tort, par de nombreux candidats. Les correcteurs ont parfois l'impression de parcourir le résultat d'un premier jet, illisible, truffé d'abréviations incompréhensibles ou de flèches, contenant aussi des parties entières raturées. A titre d'exemple, un grand nombre de candidats écrivent de la même façon e et ρ, x et n,. . . Il faut absolument écrire lisiblement, pour éviter d'être légitimement sanctionné par le correcteur. Une copie doit être claire, bien rédigée, agréable à parcourir et dépourvue de ratures, de taches, de symboles abscons, d'abréviations cabalistiques, etc... Elle doit contenir des phrases structurées, précises et sans équivoque. Dans leurs appréciations par le jury, les copies de cette épreuve n'ayant pas été l'objet d'un minimum de soins ont été l'objet de pénalisations dommageables.

Enfin, trop d'étudiants tentent de berner le correcteur qui n'est jamais dupe : une affirmation ne constitue pas une démonstration. Un résultat correct, simplement tiré de l'énoncé et obtenu à l'issue de calculs manifestement erronés ou incomplets, n'apporte rien si ce n'est de mettre en doute l'honnêteté de ce qui suit et de mettre le correcteur de mauvaise humeur.

1.4 Remarques générales sur le contenu mathématique des copies

D'une façon générale, le vocabulaire et les notions utilisées ne sont pas maitrisés par les candidats. On observe des confusions sur les concepts un peu partout. A titre d'exemples, que signifient « un réel converge », « un réel est continu », « un réel est majoré », « $f(t)$ est intégrable », « $f(x,t)$ est dérivable ». . . Un rayon de convergence est-il un intervalle ? Que dire de cette affirmation « une série entière est continue sur son rayon de convergence » ?

On observe un refus quasi-systématique d'utiliser les quantificateurs (ce qui rend bon nombre d'affirmations erronées ou incompréhensibles).

On remarque également un manque flagrant de rigueur. On confond très souvent inégalités strictes et larges, intervalles ouverts et fermés, etc... La gestion conjointe de l'ordre et de la fonction « valeur absolue » est désastreuse.

Même si le programme tolère l'absence de vérifications des hypothèses de régularité, dans l'emploi d'un changement de variable usuel dans une intégrale sur un segment, il est impératif que celui-ci apparaisse explicitement (une phrase de commentaire étant même vivement appréciée).

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe B.

1.4.1 Conclusion

Si de nombreuses copies trahissent une méconnaissance du cours, témoignent de la difficulté à élaborer ou rédiger des raisonnements structurés, de mener à bien des calculs classiques, un nombre certain de candidats parviennent toutefois à tirer leur épingle du jeu, en exploitant habilement les différentes questions du problème et leur variété.
En résumé, pour les prochaines années, le jury attend surtout des efforts de la part des candidats pour que leurs copies soient lisibles et agréables à parcourir, pour améliorer la justesse des propos et la rigueur de leurs argumentations. Cela nécessitera inévitablement une bonne connaissance du cours, des techniques et compétences exigibles, dans le cadre des programmes.

1.5 Mathématiques 1 - filière PC

1.5.1 Présentation du sujet

Le sujet a pour thème des inégalités portant sur des fonctions réelles définies sur $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Certaines de ces inégalités sont bien connues : concavité logarithmique du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, inégalité de Minkovski.

La partie **I**, proche du cours, est consacrée aux points suivants :

- équivalence entre les deux définitions de la positivité d'une matrice symétrique réelle (point de vue forme quadratique et point de vue spectral) ;
- convexité des ensembles $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$;
- racine carrée d'un élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$;
- inégalité de convexité de Jensen.

B Mathématiques 2 MP/MPI

Q1 - Certains candidats ont déjà éprouvé des difficultés dans la résolution de cette question, abordée par tous, qui méritait un peu d'organisation. La convergence normale sur [- 1,1] de la série entière se montrait aisément, sa divergence grossière en dehors de ce segment également, grâce aux résultats classiques sur les suites. On peut donc répondre donc très vite à cette question, ce que certain ont fait. Le critère de d'Alembert peut aussi être exploité, moins efficacement. Figure même au programme un résultat très adapté à la situation (rayon de convergence de la série entière). Enfin, remarquons que l'emploi du « critère spécial des séries alternées » n'était pas judicieux ici, et que la connaissance du rayon de convergence ne permet pas d'en déduire le domaine de convergence.

Q2 - Pour rédiger la réponse de cette question, le mieux comme l'invite l'énoncé, est de se contenter de vérifier que le couple satisfait la condition voulue. La confusion entre analyse et synthèse est fréquente. Il était bien sûr possible de raisonner par équivalences logiques ce qui n'est presque jamais fait correctement. A noter qu'on constate déjà des erreurs dans les deux intégrations par parties successives à effectuer, ou même sur la valeur de $\cos(n.\pi)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$! Il y a moyen de résoudre le second item de cette question par différents méthodes (dont l'une, très efficace, exploitant un « télescopage » judicieux basé sur une simple relation trigonométrique). La majorité des candidats utilisant la somme partielle d'une série géométrique complexe oublient de mentionner que sa raison n'est pas 1. Certains étudiants invoquent même le fait que < 1 !

Q3 - Cette question a été largement abordée. En devinant la démarche à suivre, le candidat se contente parfois de conclure cette question sans justifications. Pour constater qu'un prolongement par continuité est de classe C_1, il y nécessairement un travail substantiel à fournir. On ne peut pas se contenter de prolonger la dérivée de la fonction pour décréter qu'elle est de classe C_1 !

Q4 - Pour déterminer le domaine de définition de f (notion qui semble même poser problème), la continuité de l'intégrande sur l'intervalle ouvert est à mentionner brièvement. De même, sa positivité est utile pour ceux qui utilisent la notion d'équivalent. Relevons une nouvelle fois que l'intégrabilité de l'intégrande n'est pas équivalente à la convergence de son intégrale, a priori. Les phrases sibyllines « on étudie en $\pi/2$ et en 0 » ne sont pas acceptables. Remarquons enfin que la fonction $\sin(x)$ n'est pas définie a priori sur $[0, \pi/2]$, si $x \in \mathbb{R}$. Une grande partie des étudiants pressent la nécessité d'une intégration par partie. Mais une intégration par partie portant sur des intégrales impropres exige certaines précautions, très largement négligées ici. On ne peut se satisfaire d'un énigmatique "après calculs faits au brouillon" !

Q5 - Cette question était la première question délicate et exigeait un minimum de rigueur. Pour les besoins de sa résolution, la fonction de deux variables Φ introduite est souvent confondue avec ses fonctions partielles et même avec $\Phi(x, t)$. Le raisonnement est donc abscons et manque singulièrement de rigueur. Quelques étudiants parviennent même à confondre les deux variables ! Les hypothèses de positivité, parfois nécessaires, sont éludées et des inégalités fausses sont assénées. La formule « par croissance comparée » est souvent bien trop laconique. On ne peut s'en contenter lorsqu'elle déborde du cadre restrictif du programme. Le critère de Bertrand (hors programme) est invoqué de manière plus ou moins explicite. On observe également des confusions entre majoration et domination. La décroissance de f se déduisait aisément de l'expression de f' obtenue : quelques candidats ne l'ont pas vu. La notion de décroissance d'une fonction numérique est même parfois confondue avec celle d'une suite réelle !

Q6 - La stricte positivité de f n'est malheureusement pas mentionnée. Elle est pourtant souvent indispensable pour la rigueur du raisonnement. Trop de candidat confondent n et x de façon abusive. En général, $\Phi(n)$ n'est pas équivalent à $\Phi(n+1)$ lorsque n tend vers $+\infty$!
Q7 - Le fait que f tende vers $+\infty$ en -1 et 0 en $+\infty$ n'est jamais évoqué mais utilisé correctement. C'est pourtant ce qui justifie la présence des asymptotes verticale et horizontale à sa courbe représentative.
Q8 - De nombreux candidats utilisent la notation $\binom{n}{\alpha}$ (α non entier) pourtant non stipulée dans le programme officiel.
Q9 - Bien évidemment, l'énoncé attendait une réponse dépourvue de la notion intégrale. La technique classique pour calculer $f'(0)$ était suggérée par l'énoncé et un nombre non négligeable de candidats parviennent à la conclusion. En revanche, le calcul de $f'(1)$, pourtant accessible par une simple intégration par partie, est largement délaissé.
Q10 - Cette question délicate n'a pas été fréquemment résolue en totalité. Si le changement de variable intégral est mentionné plus ou moins clairement, le second volet de la question n'est quasiment pas traité. Certains candidats mentionnent cependant la fonction gamma d'Euler (hors programme), sans pouvoir conclure.
Q11 - Cette dernière question de la partie 3 fut souvent délaissée ou malmenée. Sa résolution se traitait pourtant assez facile en utilisant, par exemple, un théorème « d'intégration terme à terme ». Signalons toutefois le fait que sa série de Taylor ait un rayon de convergence strictement positif n'implique pas a priori que f est développable en série entière. En outre, les quelques tentatives observées dans les copies basées sur la formule de Taylor avec reste intégral ne débouchent pas ou sont abusives.
Q12 - Le fait que < 1, bien que primordial, est rarement signalé (jamais démontré, il est même très fréquemment confondu avec > 1 !). Il s'agissait pourtant d'un argument important pour mener le calcul (analogue à celui de la question 2) et justifier une convergence simple. De nombreux candidats, bien que réalisant sans doute la démarche attendue, se perdent ici dans les calculs.
Q13 - Le théorème (fondamental de l'analyse) utilisé est peu évoqué et ses hypothèses sont souvent négligées. La conclusion est hâtivement présentée (« avec c une constante réelle »), même si des erreurs de calcul préalables paraissent rédhibitoires.
Q14 - Cette question est peu traitée de façon significative. Sa conclusion est pourtant évoquée sans réelles justifications détaillées.
Q15 - En guise de conclusion de la partie 4, cette question assez technique utilisait la question antérieure et la première partie. Elle n'a été abordée que de façon marginale.
Q16 - Le fait que f soit strictement positive est éludé ou mentionné sans démonstration, malgré son importance. Il est à remarquer que, dans le programme officiel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ne figure que le cas des intégrales « non généralisées ». A priori, un raisonnement par « passage à la limite » était donc indispensable (sauf aux quelques candidats qui ont adapté la démonstration classique à ce contexte plus général). Mentionnons néanmoins l'argument fallacieux rencontré ici : « intégrable car produit de deux fonctions intégrables ».
Q17 - Un nombre non négligeable de candidats a pu rédiger plus ou moins sérieusement un raisonnement par récurrence, pourtant facile à élaborer.
Q18 - Les justifications concernant les inégalités liées à la convexité sont souvent obscures. Les correcteurs ne peuvent se contenter ici d'une simple phrase comme « par convexité » ou « d'après l'inégalité des trois pentes » ; les intervalles d'application devaient être correctement mentionnés ; une figure explicative bien faite était également appréciée. Il en est de même pour ce qui concerne

raisonnement final de convergence.
Q19 - Question très peu abordée dont l'argumentaire est largement insuffisant (quid des réels compris entre -1 et 0, par exemple ?).
Q20 - Question très peu abordée, là aussi. Le raisonnement par analyse/synthèse est « survolé ».
Q21 - Cette dernière question, pourtant facile, n'est abordée que par un nombre très restreint de candidats.

↑RETOUR