SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

par David Blottière, le 24 décembre 2023 à 04h28

UN CORRIGÉ

DS N°5

Le corrigé du problème 1 est basé sur un document rédigé par Gilbert Roux. Celui du problème 2 est une variation sur un texte écrit par Laurent Carrot.

PROBLÈME 1 — MPI — COMPARAISON DE CONVERGENCES

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux questions suivantes on supposera que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

Q1. — Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum ||f_n||_\infty$ converge sur $\mathbf{R}_+$, où $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme. ■

Q2. — On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

Pour tout $x \in I$:

$$0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant ||f_n||_\infty$$

et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument. ■

Q3. — On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I. On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

Pour x dans I, notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad |R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k||_\infty .$$

Par passage au sup :

$$||R_n||_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k||_\infty .$$

La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k||_\infty\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 indépendamment de x, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I. ■

On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.

Q4. — Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

Soit $\in [0,1]$ fixé. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_{n+1}(x) f_n(x) \leqslant 0$. De plus, la suite $\left(\left|f_n(x)\right| = \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ décroît et converge vers 0. Le critère des séries alternées est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0,1]$.
Le critère des séries alternées nous dit que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\, x \in I, \quad |R_n(x)| \leqslant \left|f_{n+1}(x)\right| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n}.$$

Par passage au sup :

$$||R_n||_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par théorème de domination, la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$.
Enfin, pour x fixé, $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum \left|f_n(x)\right|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I. ■

Q5. — Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array} \right.$$

Pour x dans I, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1-x}$. Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0,1[$.
Nous calculons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \forall\, x \in I, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

La suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet :

$$R_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = ne^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})} = ne^{(n+1)(-\frac{1}{n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n}))} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0 et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0,1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I. ■

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite décroissante de réels positifs,* $I = [0;1[$ *et pour tout* $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n(1-x)$.

Q6. — Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I.

La suite (α_n) décroît et est positive, donc :

$$\forall n,\ 0\leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0.$$

La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.
Soit $x\in I$. La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0\leqslant x<1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$ converge (linéarité).
De plus :

$$\forall n\geqslant 1,\quad \forall x\in I,\quad 0\leqslant \alpha_n x^n(1-x)\leqslant \alpha_0(1-x)x^n.$$

Ainsi, par domination de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I. ■

Q7. — Calculer pour $n\geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I}|f_n(x)|$.

Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, pour tout $x\in I$:

$$f_n'(x)=\alpha_n(nx^{n-1}-(n+1)x^n)=\alpha_n x^{n-1}(n-x(n+1)).$$

En construisant le tableau de variations de f_n, on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\dfrac{n}{n+1}$ qui vaut :

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\alpha_n\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Donc $||f_n||_\infty=\alpha_n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. ■

Q8. — Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

D'après ce qui précède :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad ||f_n||_\infty=\frac{\alpha_n}{n}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$$

et

$$(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}(n+1)\left(-\frac{1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-1.$$

Donc $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-1}$. Ainsi :

$$||f_n||_\infty\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\alpha_n}{ne}.$$

Par comparaison de séries positives, la série $\sum ||f_n||_\infty$ converge si et seulement si la série $\sum\dfrac{\alpha_n}{n}$ converge. ■

Q9. — Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

> Pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. ■

Q10. — Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I. On pourra observer que pour $k \geqslant n+1, \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

On sait que la suite (α_n) décroît. Donc pour :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \forall\, k \geqslant n+1, \quad \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}.$$

Alors :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \forall\, k \geqslant n+1, \quad \forall\, x \in I, \quad \alpha_k x^k (1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$$

et donc par inégalités sur les séries convergentes, il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in I$:

$$0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.$$

Par passage au sup :

$$||R_n||_\infty \leqslant \alpha_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, la série $\sum f_n$ converge uniformément. ■

Q11. — Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

La suite (α_n) décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle, d'après le théorème de la limite monotone.
Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$.
Dans ces conditions :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \forall\, x \in I, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \geqslant \ell(1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}.$$

Mais alors :

$$R_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \geqslant \ell\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{e}$$

donc la suite $\left(R_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)$ ne converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.
Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I, si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. ■

Q12. — Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

(a) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

(b) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

(c) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

(a) Si l'on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, la question 8 montre que la série $\sum f_n$ converge normalement, car, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
(b) Il suffit de poser, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n = 1$. La suite est constante, donc elle décroît (au sens large) et elle ne converge pas vers 0. Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre celle définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.
(c) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.
La suite définie par, pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n = \frac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient. Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.
La fonction

$$g \colon x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$

décroît sur $[2, +\infty[$ et est positive (produit de deux fonctions positives décroissantes). La série $\sum_{n\geqslant 2} g(n)$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_2^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$. Or, pour tout $A \geqslant 2$:

$$\int_2^A g(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^A \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln x)]_2^A = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2)$$

qui a pour limite $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge, et donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I. ■

Q13. — Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue et CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple. Aucune des réciproques n'est vraie.
CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme et CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple. Aucune des réciproques n'est vraie.
De plus, CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme et de même CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue. ■

PROBLÈME 2 — MPI-MPI* — FONCTION ζ DE RIEMANN

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

Q14. — Déterminer D_ζ.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (série de Riemann), donc $D_\zeta =]1, +\infty[$. ■

Q15. — Étudier le sens de variation de ζ.

Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^x} = e^{-\ln(n)x}. \end{array} \right.$$

Soient x et y des réels tels que $1 < x < y$. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$f_k(y) \leqslant f_k(x) \qquad \big[\text{la fonction } f_k \text{ est décroissante sur }]1,+\infty[\big].$$

Alors, pour tout $n \in N^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\zeta(y) \leqslant \zeta(x)$. ■

Q16. — Démontrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_ζ et exprimer, pour tout $(x,k) \in D_\zeta \times \mathbf{N}^*$, $\zeta^{(k)}(x)$ comme une somme de série convergente.

Nous appliquons le critère $\mathscr{C}^\infty$ pour les séries de fonctions.
(H1) Toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$f_n^{(k)}(x) = (-\ln(n))^k e^{-\ln(n)x} = (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{n^x} = (-1)^k \ln^k(n)\, f_n(x).$$

(H2) Soient $a > 1$ et $k \in \mathbf{N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est décroissante donc :

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \ln^k(n) \left\| f_n \right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \ln^k(n)\, f_n(a) = \frac{\ln^k(n)}{n^a}.$$

Soit b un réel tel que $1 < \alpha < a$, par exemple $\alpha = (1+a)/2$. Alors :

$$\frac{\ln^k(n)}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad \big[\text{croissances comparées}\big].$$

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est absolument convergente. Par théorème de comparaison, la série $\sum \dfrac{\ln^k(n)}{n^a}$ converge. Ainsi la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur $[a,+\infty[$.
Le critère s'applique.
(C1) La fonction $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[= \bigcup_{a>1} [a,+\infty[$.
(C2) De plus :

$$\forall\, k \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\, x \in]1,+\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{n^x}.$$

■

Q17. — Justifier que ζ admet une limite finie en $+\infty$.

Pour tout $x \in]1,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(x) \geqslant 0$, donc $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geqslant 0$.

La fonction ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$ et minorée par 0, donc elle admet une limite finie (positive) en $+\infty$. ■

Q18. — Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

Soit $x \in]1,+\infty[$ et $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Soit :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^x} = e^{-x\ln(t)}. \end{array} \right.$$

La fonction g est décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.
• Pour tout $t \in [n, n+1]$, $g(t) \leqslant g(n)$ (car g décroissante sur $[1,+\infty[$, donc sur $[n, n+1]$ (car $n \geqslant 2$)).
D'où, par croissance de l'intégrale ($n \leqslant n+1$), on a :

$$\int_n^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} g(n)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}.$$

• De même, pour tout $t \in [n-1, n]$, $g(n) \leqslant g(t)$ (car g décroissante sur $[1,+\infty[$, donc sur $[n-1, n]$ (car $n \geqslant 2$)).
D'où, par croissance de l'intégrale ($n-1 \leqslant n$), on a :

$$g(n) = \int_{n-1}^{n} g(n)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t)\ \mathrm{d}t.$$

• En mettant bout à bout les deux inégalités obtenues, on a bien :

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1} n\frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

■

Q19. — En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$:

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Comme $x > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ \mathrm{d}t$ converge (Riemann).
D'où, en sommant l'encadrement obtenu à la question précédente pour tout $n = 2 \dots +\infty$ (la série et les intégrales convergent), on obtient, grâce à la relation de Chasles,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ \mathrm{d}t.$$

En ajoutant 1 à tous les membres de l'encadrement, on obtient :

$$1 + \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ \mathrm{d}t \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ \mathrm{d}t.$$

Enfin, comme

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{(x-1)\,t^{x-1}}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{(x-1)\,t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)} \qquad [(\text{car } x-1>0)],$$

on a bien l'encadrement souhaité :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

■

Q20. — Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Comme, pour tout $x > 1$, $\zeta(x) \geqslant 1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} 1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$. ■

Q21. — Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Comme, pour tout $x > 1$, $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x-1} = 1$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$. ■

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

On note D_f l'ensemble de définition de f.

Q22. — Déterminer D_f.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $f(-n)$ n'existe pas (division par zéro).
- Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbf{N}\}$,

$$\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n} \right)$ converge, donc $f(x)$ existe.

- Par suite, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbf{N}^*\}$. ■

Q23. — Montrer que f est continue sur D_f et étudier ses variations.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit :

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n} \right) = -\dfrac{x}{n(n+x)}. \end{array} \right.$$

⋆ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Soit $[a,b] \subset]-k-1, -k[$ avec $a < b$.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, g_n est continue sur $[a,b]$ (car continue sur D_f).
- Pour tout $n \geqslant k+1$, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|g_n(x)| = \left| -\frac{x}{n(n+x)} \right| \leqslant \frac{|a|}{n(n+a)}$$

car $|b| \leqslant |x| \leqslant |a|$ et, comme $n \geqslant k+1$, $0 < n+a \leqslant n+x \leqslant n+b$ (car $n \geqslant k+1 > -a$).

On a donc $\|g_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{|a|}{n(n+a)}$.

Or, $\sum\limits_{n\geqslant k+1} \dfrac{|a|}{n(n+a)}$ converge, car $\dfrac{|a|}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant k+1} \|g_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

Comme la convergence ne dépend pas des premiers termes, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|g_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge aussi.

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge donc normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.

• La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est donc continue sur $[a,b]$, ceci pour tout $[a,b] \subset]-k-1,-k[$, donc f est continue sur $]-k-1,-k[$.

• Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, f est continue sur $\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-k-1,-k[$.

⋆ Soit à présent $[a,b] \subset]-1,+\infty[$ avec $a < b$.

• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, g_n est continue sur $[a,b]$ (car continue sur D_f).

• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|g_n(x)| = \left|-\frac{x}{n(n+x)}\right| \leqslant \frac{\max(|a|,|b|)}{n(n+a)}$$

car $0 < n+a \leqslant n+x \leqslant n+b$.

On a donc $\|g_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{\max(|a|,|b|)}{n(n+a)}$.

Or, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\max(|a|,|b|)}{n(n+a)}$ converge, car $\dfrac{\max(|a|,|b|)}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \|g_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge donc normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.

• La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est donc continue sur $[a,b]$, ceci pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, donc f est continue sur $]-1,+\infty[$.

⋆ f est donc continue sur $]-1,+\infty[\cup \bigcup_{k=1}^{+\infty}]-k-1,-k[= \mathbf{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbf{N}^*\} = D_f$.

⋆ Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n}$ est décroissante sur chaque intervalle contenu dans D_f, donc $f = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est décroissante sur chaque intervalle contenu dans D_f comme limite simple d'une série de fonctions décroissantes.

f est donc décroissante sur $]-n-1,-n[$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et sur $]-1,+\infty[$. ■

Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

Q24. — Calculer $f(k)$.

Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+k} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} &= \sum_{j=k+1}^{N+k} \frac{1}{j} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} && [\text{(en posant } j = n+k)] \\
&= \sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} && [\text{(téléscopage)}] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N+j} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} && [\text{(en posant } j = n-N)] \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} && [\text{(somme de } k \text{ (fixé) limites nulles),}]
\end{aligned}$$

donc $f(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n+k} - \dfrac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{n+k} - \dfrac{1}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{k} \dfrac{1}{n}$. ■

Q25. — En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

• Un équivalent classique donne $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \underset{k\to+\infty}{\sim} \ln(k)$ (s'obtient par comparaison série intégrale).
• Pour tout $x > 1$, $1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
D'où, comme f est décroissante sur $]-1,+\infty[$, $f(\lfloor x \rfloor) \geqslant f(x) \geqslant f(\lfloor x \rfloor + 1)$, et, en divisant pas $-\ln(x)$ (< 0 car $x > 1$), on a finalement :

$$-\frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \leqslant \frac{f(x)}{-\ln x} \leqslant -\frac{f(\lfloor x \rfloor + 1)}{\ln x}.$$

• De plus, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ et, par suite, $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
• D'où, quand $x \to +\infty$, $\lfloor x \rfloor \to +\infty$ et $\lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$, donc

$$f(\lfloor x \rfloor) = -\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(\lfloor x \rfloor) = -\underbrace{\ln(x)}_{\to+\infty} - \underbrace{\ln\Bigg(\overbrace{\frac{\lfloor x \rfloor}{x}}^{\to 1}\Bigg)}_{\to 0} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x.$$

On a donc $\lim_{x\to+\infty} -\frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} = 1$ et $-\frac{f(\lfloor x \rfloor + 1)}{\ln x} = -\frac{f(\lfloor x + 1 \rfloor)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln(x) + \ln(1 + 1/x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$, donc, comme $-\frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \leqslant \frac{f(x)}{-\ln x} \leqslant -\frac{f(\lfloor x \rfloor + 1)}{\ln x}$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{-\ln x} = 1$, donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x.$$

■

Q26. — Pour tout $x \in D_f$, vérifier que $x + k \in D_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$.

• $x + k \notin D_f \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N}^* : x + k = -n \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N}^* : x = -(k+n) \Rightarrow x \notin D_f$ (car $k + n \in \mathbf{N}^*$).
Par contraposée, on a bien $x \in D_f \Rightarrow x + k \in D_f$.
• Pour tout $x \in D_f$, $x + k \in D_f$ et

$$\begin{aligned} f(x+k) - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x} - \frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x} - \frac{1}{n+x}\right). \end{aligned}$$

Or, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+k+x} - \frac{1}{n+x}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+k+x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x} \\ &= \sum_{j=k+1}^{N+k} \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{j+x} \qquad [(\text{en posant } j = n+k)] \\ &= \sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x} \qquad [(\text{téléscopage})] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j+N+x} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x} \qquad [(\text{en posant } j = n-N)] \\ &\underset{N\to+\infty}{\to} 0 - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x} \qquad [(\text{somme de } k \text{ (fixé) limites nulles}),] \end{aligned}$$

donc
$$f(x+k)-f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x}-\frac{1}{n+x}\right)=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x}.$$
■

Q27. — En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

Pour tout $x\in D_f$, $f(x)=f(x+k)+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x}=f(x+k)+\frac{1}{x+k}+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n+x}$.
Or,
$$\lim_{x\to -k} f(x+k)=f(0)=0 \qquad \left[\text{(par continuité de } f \text{ en } 0)\right],$$
$$\lim_{x\to -k}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n+x}=\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n-k} \qquad [\text{(limite finie)}]$$
$$\text{et}\quad \lim_{x\to -k}\left|\frac{1}{x+k}\right|=+\infty,$$
donc
$$f(x)\underset{x\to -k}{\sim}\frac{1}{x+k}.$$
Par suite, $\lim_{x\to -k^+} f(x)=\lim_{x\to -k^+}\frac{1}{x+k}=+\infty$ et $\lim_{x\to -k^-} f(x)=\lim_{x\to -k^-}\frac{1}{x+k}=-\infty$. ■

On considère la série de fonction de la variable réelle x donnée par $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$.

Q28. — Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$ converge.

• La série converge si $x=0$.
• Supposons $x\neq 0$. D'après l'étude précédente, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$ $\zeta(k+1)>1$, donc $\left|(-1)^k\zeta(k+1)\right|\neq 0$.
Comme de plus :
$$\left|\frac{(-1)^{k+1}\zeta(k+2)x^{k+2}}{(-1)^k\zeta(k+1)x^{x+1}}\right|=\frac{\zeta(k+2)}{\zeta(k+1)}\,|x|\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1}\,|x|=|x| \qquad \left[\text{(d'après la question 21)}\right].$$
D'après la règle de d'Alembert, si $|x|<1$ alors la série converge absolument et si $|x|>1$ alors la série diverge grossièrement.
• Si $x=\pm1$, $|(-1)^k\zeta(k+1)x^k|=\zeta(k+1)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}1$ donc $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$ diverge grossièrement.
• L'ensemble des réels x tels que la série $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$ converge est donc $]-1,1[$. ■

Q29. — Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x\in D_f$ et tout $k\in\mathbf{N}^*$.

Posons comme dans la question 22 :
$$g_n\;\left|\;\begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right)=-\frac{x}{n(n+x)}.\end{array}\right.$$

• Pour tout $n \in \mathbf{N}$, g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f. Montrons par récurrence que, pour tout $x \in D_f$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $g_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \dfrac{1}{(n+x)^{k+1}}$.

Initialisation : pour tout $x \in D_f$, $g_n^{(1)}(x) = g_n'(x) = -\dfrac{1}{(n+x)^2}$ et $(-1)^1 1! \dfrac{1}{(n+x)^{1+1}} = -\dfrac{1}{(n+x)^2}$. On a bien HR_0.

Hérédité : Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée.

Alors, pour tout $x \in D_f$,

$$\begin{aligned} g_n^{(k+1)}(x) &= \left(g_n^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(n+x)^{k+2}} = (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{(n+x)^{k+2}}. \qquad \text{[On a bien } HR_{k+1}.\text{]} \end{aligned}$$

Conclusion : D'où, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in D_f$, $g_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \dfrac{1}{(n+x)^{k+1}}$.

• Soit $j \in \mathbf{N}^*$. Soit $[a,b] \subset]-j-1,-j[$ avec $a < b$.

— Pour tout $n \in \mathbf{N}$, g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$.

— $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $[a,b]$ (cf. question 22).

— Pour tout $n \geqslant j+1$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\forall x \in [a,b], \quad |g_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}, \qquad \text{[donc]} \quad \|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}.$$

Or, $\sum\limits_{n \geqslant j+1} \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ converge (car $\dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$ avec $k+1>1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant j+1} \|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

Comme la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge aussi.

La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n^{(k)}$ converge donc normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.

D'où $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$, ceci pour tout $[a,b] \subset]-j-1,-j[$, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-j-1,-j[$.

Ceci étant valable pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}]-j-1,-j[$.

• Soit $[a,b] \subset]-1,+\infty[$ avec $a < b$.

— Pour tout $n \in \mathbf{N}$, g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$.

— $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $[a,b]$ (cf. question 22).

— Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\forall x \in [a,b], \quad |g_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}, \quad \text{donc} \quad \|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}.$$

Or, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ converge (car $\dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$ avec $k+1>1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n^{(k)}$ converge donc normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.

D'où $f = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$, ceci pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.

- f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $D_f =]-1,+\infty[\cup \bigcup_{j=1}^{+\infty}]-j-1,-j[$ et, pour tout $x \in D_f$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}.$$

■

Q30. — Montrer qu'il existe $A \in \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[, \quad \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant k!\left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right).$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right| \qquad [\text{inégalité triangulaire}].$$

Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in]-1,1[$, $n+x > 0$:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}} = k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right) \leqslant k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

puisque, pour tout $x \in]-1,1[$, $\forall n \geqslant 2$, $n+x > 1$, donc $(n+x)^{k+1} \geqslant (n+x)^2 \geqslant (n-1)^2$. Alors :

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) = k!\left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right)$$

en posant $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Toutes les majorations successives utilisées ici sont justifiables car la série majorante est toujours convergente. ■

Q31. — En déduire que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k.$$

Comme f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on a, d'après la formule de Taylor reste intégral, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{j^{k+1}}\right) x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{k+1}}\right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \zeta(k+1) x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta(k+1)x^k\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}(n+1)!\left(A+\frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right)\ \mathrm{d}t\right| \qquad [\text{positivité et question précédente}] \\
&\leqslant \left|\int_0^x (n+1)A(x-t)^n\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^x (n+1)\frac{(x-t)^n}{(t+1)^{n+2}}\ \mathrm{d}t\right| \qquad [\text{inégalité triangulaire}] \\
&= \left|\left[-A(x-t)^{n+1}\right]_0^x\right| + \left|\int_0^x (n+1)\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n\ \mathrm{d}t\right| \\
&= A|x|^{n+1} + \left|\int_0^x (n+1)\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{1+x}{1+t}-1\right)^n\ \mathrm{d}t\right| \\
&= A|x|^{n+1} + \left|\left[\frac{1}{1+x}\left(\frac{1+x}{1+t}-1\right)^{n+1}\right]_0^x\right| \qquad [\text{intégrande de la forme } u'u^n] \\
&= A|x|^{n+1} + \left|\frac{1}{x+1}x^{n+1}\right| = A|x|^{n+1} + \frac{|x|^{n+1}}{1+x} = \left(A+\frac{1}{1+x}\right)|x|^{n+1} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad [|x|\in]-1,1[]
\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta(k+1)x^k = 0$.

Donc, pour tout $x\in]-1,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta(k+1)x^k = f(x)$.

Ainsi, pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$. ■

PROBLÈME 3 — MPI* — FONCTIONS CONTINUES NULLE PART DÉRIVABLES

L'objectif de ce problème est de construire une fonction continue sur $[0,1]$, nulle part dérivable sur $[0,1]$. Ensuite on établit que ces fonctions, étranges de prime abord, abondent dans la nature, puisqu'elles forment une partie dense de $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}),||\cdot||_\infty\right)$.

Le cœur du travail porte sur l'étude d'une fonction définie par Teiji Takagi en 1903 dans son article *A simple example of the continuous function without derivative*, initialement paru dans les Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, ser II, Vol 1. 1903, pp 176-177, puis dans les Collected Papers of Teiji Takagi (S. Iyanaga, Ed), Springer Verlag, New York 1990.

Teiji Takagi (1875-1960)

Nous définissons la fonction φ par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,\mathbf{Z}) := \inf\{|x-n| \ :\ n\in\mathbf{Z}\} \end{array}\right. .$$

Q32. — Démontrer que la fonction φ est 1-lipschitzienne.

Soient x et y des nombres réels. Nous démontrons : $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |x-y|$.

- Soit $n \in \mathbf{Z}$. Nous observons :

$$\varphi(x) \leqslant |x-n| \leqslant |x-y| + |y-n|$$

d'où :

$$\underbrace{\varphi(x) - |x-y|}_{\text{indépendant de } n} \leqslant |y-n| \,.$$

Par passage à l'inf sur $n \in \mathbf{Z}$, il vient :

$$\varphi(x) - |x-y| \leqslant \varphi(y)$$

puis :

$$(\star) \qquad \varphi(x) - \varphi(y) \leqslant |x-y| \,.$$

- Par symétrie des rôles joués par x et y, nous déduisons de $(\star)$:

$$(\star\star) \qquad \varphi(y) - \varphi(x) \leqslant |y-x| = |x-y| \,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit : $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |x-y|$. ■

Q33. — Démontrer que la fonction φ est paire.

- L'ensemble $\mathbf{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & -n \end{array} \right.$$

est une permutation de l'ensemble $\mathbf{Z}$, d'où l'égalité d'ensembles :

$$E_x := \{|x-n| \ : \ n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x-(-n)|}_{=|-x-n|} \ : \ n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_{-x} \,.$$

A fortiori, $\varphi(x) := \inf E_x = \inf E_{-x} = \varphi(-x)$. ■

Q34. — Démontrer que la fonction φ est 1-périodique.

- L'ensemble $\mathbf{R}$ est stable par la fonction $x \longmapsto x+1$.
- L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$$

est une permutation de l'ensemble $\mathbf{Z}$, d'où l'égalité d'ensembles :

$$E_{x+1} := \{|x+1-n| \ : \ n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x+1-(n+1)|}_{=|x-n|} \ : \ n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_x \,.$$

A fortiori, $\varphi(x+1) := \inf E_{x+1} = \inf E_x = \varphi(x)$. ■

Q35. — Démontrer que $\varphi(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1/2]$.

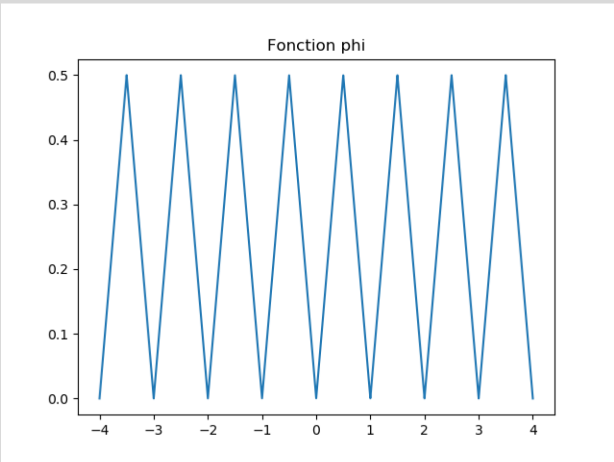
Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- Nous calculons $|x - 0| = x$.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $n \geqslant 1$:
$$-n \leqslant x - n \leqslant \frac{1}{2} - n \leqslant -\frac{1}{2}$$
et il vient $|x - n| \geqslant \frac{1}{2} \geqslant x = |x - 0|$.
- Soit $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leqslant -1$. Comme $n \leqslant -1$:
$$1 \leqslant -n \leqslant x - n \leqslant \frac{1}{2} - n$$
et il vient $|x - n| \geqslant 1 \geqslant x = |x - 0|$.

Des trois points précédents, nous déduisons :
$$\varphi(x) := \inf\{|x - n| \ : \ n \in \mathbf{Z}\} = |x - 0| = x\,.$$

■

Q36. — Tracer la représentation graphique de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4, 4]$.



■

Q37. — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:
$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \leqslant 1/2 \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x & \text{si } x - \lfloor x \rfloor > 1/2. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbf{R}$. On rappelle que par définition de la partie entière, $Ex \in \mathbf{Z}$ et $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$.

- 1^{er} cas : $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor \leqslant \frac{1}{2}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x - \lfloor x \rfloor) && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= x - \lfloor x \rfloor && \left[x - \lfloor x \rfloor \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right]. \end{aligned}$$

- $2^{\text{ème}}$ cas : $\frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor$. D'après la définition de la partie entière, nous avons de plus

$$\frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor < 1$$

d'où $-\frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor - 1 < 0$, puis :

$$0 < \lfloor x \rfloor + 1 - x < \frac{1}{2}.$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x - \lfloor x \rfloor - 1) && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= \varphi(\lfloor x \rfloor + 1 - x) && [\varphi \text{ est paire}] \\ &= \lfloor x \rfloor + 1 - x && \left[\lfloor x \rfloor + 1 - x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right]. \end{aligned}$$

■

Q38. — Démontrer que la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et calculer $||\varphi||_\infty$.

Nous remarquons :

$$\begin{aligned} \left\{|\varphi(x)| \,:\, x \in \mathbf{R}\right\} &= \left\{|\varphi(x)| \,:\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\} && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= \left\{|\varphi(x)| \,:\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} && [\varphi \text{ est paire}] \\ &= \left[0, \frac{1}{2}\right] && \left[\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \varphi(x) = x\right]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

La fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et :

$$||\varphi||_\infty := \sup \left\{|\varphi(x)| \,:\, x \in \mathbf{R}\right\} = \sup \left[0, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

■

Nous introduisons la fonction due à Teiji Takagi.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}. \end{array} \right.$$

Q39. — Démontrer que cette fonction f est bien définie.

- Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_k par :

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k} \end{array} \right. .$$

- Il s'agit ici de démontrer que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} f_k$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Nous démontrons une propriété plus forte : la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} f_k$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.
- Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$, la fonction f_k et également bornée sur $\mathbf{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \left|f_k(x)\right| = \left|\frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}\right| \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{2^k} = \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{\text{indépendant de } x} .$$

Par passage au sup :

$$0 \leqslant \|f_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} .$$

D'après le cours sur les séries géométriques et le théorème de domination pour les séries à termes positifs ou nuls, la série numérique $\sum_{k \geqslant 0} \|f_k\|_\infty$ converge.

■

Q40. — Démontrer que la fonction f est 1-périodique.

- L'ensemble $\mathbf{R}$ est stable par la fonction $x \longmapsto x+1$.
- Soit $x \in \mathbf{R}$.
  — Comme la fonction φ est 1-périodique, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$f_k(x+1) = \frac{\varphi\left(2^k (x+1)\right)}{2^k} = \frac{\varphi\left(2^k x + 2^k\right)}{2^k} = \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k} = f_k(x) .$$

  — Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x+1) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) .$$

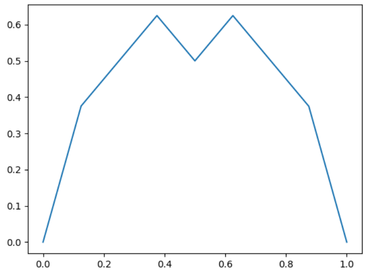
  — En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient :

$$f(x+1) := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) =: f(x) .$$

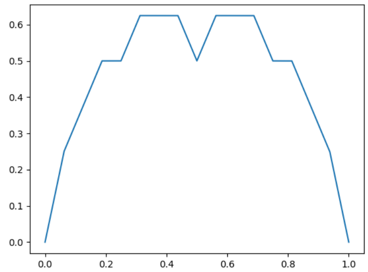
■

Ci-dessous, figurent des courbes de fonctions qui approximent la fonction f sur $[0,1]$.

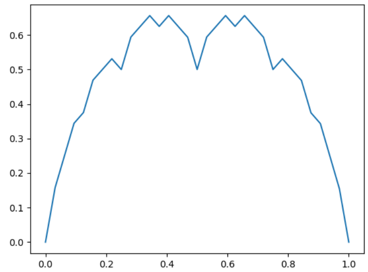
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{2} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



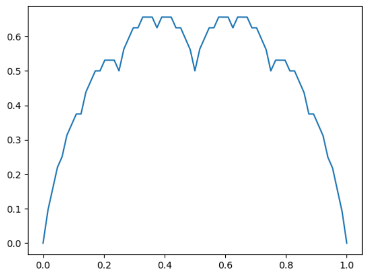
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{3} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



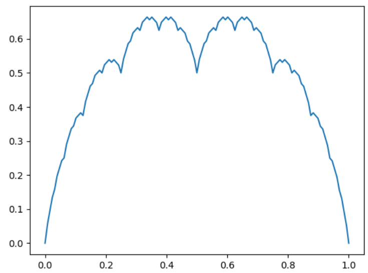
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{4} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



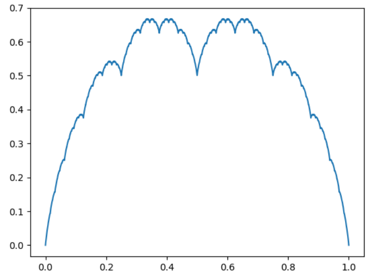
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{5} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{6} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{100} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



Q41. — Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

- Comme la fonction φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$ (Q32), elle est continue sur $\mathbf{R}$. Nous en déduisons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction f_k est continue sur $\mathbf{R}$.
- Nous savons que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} f_k$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ (Q39). Elle converge donc uniformément sur $\mathbf{R}$.
- Des deux points précédents, nous déduisons que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

■

On souhaite démontrer que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un nombre réel x en lequel la fonction f est dérivable.

Q42. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad a_n \leqslant x < b_n \qquad ; \qquad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \qquad ; \qquad b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\,.$$

Démontrer :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(x)\,.$$

- Comme f est dérivable en x, la fonction

$$\varepsilon \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue en 0 et vérifie :

$$\forall\, y \in \mathbf{R} \quad f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + (y-x)\varepsilon(y-x).$$

- On a donc :

$$f(b_n) = f(x)+f'(x)(b_n-x)+(b_n-x)\varepsilon(b_n-x) \quad \text{et} \quad f(a_n) = f(x)+f'(x)(a_n-x)+(a_n-x)\varepsilon(a_n-x)\,.$$

Nous en déduisons

$$f(b_n)-f(a_n) = f'(x)(b_n-a_n) + (b_n-x)\varepsilon(b_n-x) - (a_n-x)\varepsilon(a_n-x).$$

puis :

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(x) + \underbrace{\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\varepsilon(b_n-x)}_{\beta_n} - \underbrace{\frac{a_n-x}{b_n-a_n}\varepsilon(a_n-x)}_{\alpha_n}\,.$$

Le résultat demandé est conséquence de $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $a_n \leqslant x < b_n$:

$$0 \leqslant x - a_n < b_n - a_n$$

puis, comme $b_n - a_n > 0$:

$$0 \leqslant \frac{x-a_n}{b_n-a_n} < 1$$

d'où :

$$\left|\frac{a_n-x}{b_n-a_n}\right| \leqslant 1\,.$$

Nous en déduisons :

$$0 \leqslant |\alpha_n| \leqslant \left|\frac{a_n-x}{b_n-a_n}\right| |\varepsilon(a_n-x)| \leqslant |\varepsilon(a_n-x)|\,.$$

Comme $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et ε est continue en 0 :

$$|\varepsilon(a_n-x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\varepsilon(0)| = 0\,.$$

Par théorème d'encadrement, $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $a_n \leqslant x < b_n$:

$$a_n - b_n \leqslant x - b_n < 0$$

puis, comme $a_n - b_n < 0$:

$$1 \geqslant \frac{x-b_n}{a_n-b_n} > 0$$

d'où :

$$\left|\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\right| \leqslant 1\,.$$

Nous en déduisons :

$$0 \leqslant |\beta_n| \leqslant \left|\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\right| |\varepsilon(b_n-x)| \leqslant |\varepsilon(b_n-x)|\,.$$

Comme $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et ε est continue en 0 :

$$|\varepsilon(b_n-x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\varepsilon(0)| = 0\,.$$

Par théorème d'encadrement, $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

■

Q43. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier qu'il existe un unique $j_n \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$a_n := \frac{j_n}{2^n} \leqslant x < \frac{j_n + 1}{2^n} =: b_n$$

puis démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers x.

- Soit $j \in \mathbf{Z}$. Nous observons :

$$\frac{j}{2^n} \leqslant x < \frac{j+1}{2^n} \quad \Longleftrightarrow \quad j \leqslant 2^n x < j+1\,.$$

D'après le cours sur la partie entière, il existe un unique entier relatif j satisfaisant cette dernière double inégalité, à savoir la partie entière de $2^n x$. Ainsi $j_n := \lfloor 2^n x \rfloor$ est l'unique entier recherché.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leqslant x - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{2^n}\,.$$

Par théorème d'encadrement, $x - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

- Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = a_n + \dfrac{1}{2^n}$, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

■

Q44. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \mathbf{N}$. Démontrer :

$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\,\varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right)\,.$$

Q45. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k}\,\frac{\varphi\left(b_n 2^k\right) - \varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n - a_n} \in \{-1, 1\}\,.$$

On pourra poser $q_{n,k} := \left\lfloor 2\,a_n 2^k \right\rfloor$, démontrer que $2\,b_n 2^k \in \left[q_{n,k}, q_{n,k}+1\right]$, puis exploiter des propriétés de la fonction φ en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier $q_{n,k}$.

- Effectuons la division euclidienne de l'entier j_n par l'entier 2^{n-k-1}. Il existe un unique couple d'entiers $\left(q_{n,k}, r_{n,k}\right)$ tels que :

$$j_n = q_{n,k}\,2^{n-k-1} + r_{n,k} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r_{n,k} \leqslant 2^{n-k-1} - 1\,.$$

nous en déduisons :

$$2\,a_n 2^k = 2\,\frac{j_n}{2^n}\,2^k = j_n 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k}\,2^{k+1-n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r_{n,k}\,2^{k+1-n} \leqslant 1 - 2^{k+1-n}$$

et en particulier $q_{n,k} = \left\lfloor 2\,a_n 2^k \right\rfloor$. Nous avons de plus :

$$2\,b_n 2^k = 2\,\frac{j_n + 1}{2^n}\,2^k = 2\,\frac{j_n}{2^n}\,2^k + 2^{k+1-n} = 2\,a_n 2^k + 2^{k+1-n}$$

d'où :

$$q_{n,k} \leqslant 2\,a_n 2^k \leqslant 2\,b_n 2^k = 2\,a_n 2^k + 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k}\,2^{k+1-n} + 2^{k+1-n} \leqslant q_{n,k} + 1\,.$$

Nous déduisons de cette étude que :

$$2\,a_n 2^k \text{ et } 2\,b_n 2^k \text{ appartiennent à } \left[q_{n,k}, q_{n,k}+1\right]\,.$$

- Cas où l'entier $q_{n,k}$ est pair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^k}\,\frac{\varphi\left(b_n 2^k\right)-\varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n-a_n} &= \frac{\varphi\left(b_n 2^k\right)-\varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n 2^k-a_n 2^k} \\
&= \frac{\varphi\left(b_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}\right)-\varphi\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}-\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}\right)}\,.
\end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2} \text{ et } b_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2} \text{ appartiennent à } \left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Or sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, la fonction φ est affine, de pente 1 (Q35). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k}\,\frac{\varphi\left(b_n 2^k\right)-\varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n-a_n} = \frac{\varphi\left(b_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}\right)-\varphi\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}-\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}}{2}\right)} = 1\,.$$

- Cas où l'entier $q_{n,k}$ est impair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^k}\,\frac{\varphi\left(b_n 2^k\right)-\varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n-a_n} &= \frac{\varphi\left(b_n 2^k\right)-\varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n 2^k-a_n 2^k} \\
&= \frac{\varphi\left(b_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}\right)-\varphi\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}{b_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}-\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}\,.
\end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n 2^k-\frac{q_{n,k+1}}{2} \text{ et } b_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2} \text{ appartiennent à } \left[-\frac{1}{2},0\right].$$

Or sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$, la fonction φ est affine, de pente -1 (Q33 et Q35). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k}\,\frac{\varphi\left(b_n 2^k\right)-\varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n-a_n} = \frac{\varphi\left(b_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}\right)-\varphi\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}{b_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}-\left(a_n 2^k-\frac{q_{n,k}+1}{2}\right)} = -1\,.$$

■

Q46. — Déduire des deux questions précédentes que la suite $\left(\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente.

- Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} &= \frac{1}{b_n-a_n}\left(f\left(\frac{j_n+1}{2^n}\right)-f\left(\frac{j_n}{2^n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{b_n-a_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(\frac{j_n+1}{2^{n-k}}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(\frac{j_n}{2^{n-k}}\right)\right) \qquad \text{[Question 44]}\\
&= \frac{1}{b_n-a_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(2^k b_n\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(2^k a_n\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\frac{\varphi\left(b_n 2^k\right)-\varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n-a_n}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_{n,k} \qquad \text{[Question 45]}
\end{aligned}$$

- Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. D'après le premier point, il s'agit d'une suite d'entiers. Elle est donc stationnaire, i.e. il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :
$$\forall\, n \geqslant N \quad \frac{f(b_{n+1})-f(a_{n+1})}{b_{n+1}-a_{n+1}} - \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = 0\,.$$
En particulier :
$$\frac{f(b_{N+1})-f(a_{N+1})}{b_{N+1}-a_{N+1}} - \frac{f(b_N)-f(a_N)}{b_N-a_N} = \sum_{k=0}^{N}\varepsilon_{N+1,k} + \sum_{k=0}^{N-1} -\varepsilon_{N,k} = 0\,.$$
Comme $N+1+N = 2N+1$ est impair et qu'une somme d'un nombre impair de ± 1 ne peut être nulle, nous obtenons une contradiction. Ainsi, la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge-t-elle. ■

Q47. — Conclure quant à la non dérivabilité de f en x.

Nous avons supposé que la fonction f est dérivable en x.

- D'après les questions 42 et 43, la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
- D'après la question 46, la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

Les deux points précédents sont contradictoires. La fonction f n'est donc par dérivable en x. ■

On considère le $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$.

Q48. — Soit $g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ continues sur $[0,1]$, dérivables en aucun point de $[0,1]$, telle que :

$$g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} g\,.$$

- La fonction g est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème d'approximation polynomiale de

Weierstraß il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\left|\left|P_n - g\right|\right|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$g_n := P_n + \frac{1}{n}\, f_{|\,[0,1]}\,.$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction g_n est continue sur $[0,1]$ (Q41).
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si la fonction g_n est dérivable en un réel $x \in]0,1[$, alors la fonction :

$$f_{|\,[0,1]} = n\, g_n - n\, P_n$$

  est également dérivable en x (une fonction polynomiale est dérivable en tout point de son ensemble de définition), ce qui n'est pas (Q47).
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En adaptant les arguments qui ont permis d'établir que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$, on peut démontrer que f n'est dérivable à droite (respectivement à gauche) en aucun point de $\mathbf{R}$. On en déduit que la fonction g_n n'est pas dérivable à droite en 0, ni à gauche en 1.
- Des deux points précédents, nous déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction g_n n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.
- Enfin :

$$0 \leqslant \left|\left|g_n - g\right|\right|_{\infty,[0,1]} \leqslant \left|\left|P_n - g\right|\right|_{\infty,[0,1]} + \frac{1}{n}\left|\left|f_{|\,[0,1]}\right|\right|_{\infty,[0,1]}\,.$$

  Par théorème d'encadrement, il vient :

$$\left|\left|g_n - g\right|\right|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

■