Suites et séries de fonctions

par David Blottière, le 24 décembre 2023 à 04h28

DS n°5

4 heures

Les étudiants de MPI résolvent les problèmes 1 et 2, ceux de MPI* les problèmes 2 et 3.

Problème 1 — MPI — Comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux questions suivantes on supposera que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

Q1. — Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

Q2. — On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

Q3. — On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I. On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.

Q4. — Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

Q5. — Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n(1-x)$.

Q6. — Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I.

Q7. — Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

Q8. — Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

Q9. — Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

Q10. — Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I. On pourra observer que pour $k \geqslant n+1, \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

Q11. — Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Q12. — Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

(a) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

(b) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

(c) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

Q13. — Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

Problème 2 — MPI-MPI* — Fonction ζ de Riemann

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

Q14. — Déterminer D_ζ.

Q15. — Étudier le sens de variation de ζ.

Q16. — Démontrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_ζ et exprimer, pour tout $(x,k) \in D_\zeta \times \mathbf{N}^*$, $\zeta^{(k)}(x)$ comme une somme de série convergente.

Q17. — Justifier que ζ admet une limite finie en $+\infty$.

Q18. — Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

Q19. — En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$:

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Q20. — Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Q21. — Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

On note D_f l'ensemble de définition de f.

Q22. — Déterminer D_f.

Q23. — Montrer que f est continue sur D_f et étudier ses variations.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

Q24. — Calculer $f(k)$.

Q25. — En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Q26. — Pour tout $x \in D_f$, vérifier que $x+k \in D_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$.

Q27. — En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

On considère la série de fonction de la variable réelle x donnée par $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$.

Q28. — Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$ converge.

Q29. — Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in D_f$ et tout $k \in \mathbf{N}^*$.

Q30. — Montrer qu'il existe $A \in \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[, \quad \left| f^{(k)}(x) \right| \leqslant k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right).$$

Q31. — En déduire que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k.$$

Problème 3 — MPI* — Fonctions continues nulle part dérivables

L'objectif de ce problème est de construire une fonction continue sur $[0,1]$, nulle part dérivable sur $[0,1]$. Ensuite on établit que ces fonctions, étranges de prime abord, abondent dans la nature, puisqu'elles forment une partie dense de $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Teiji Takagi (1875-1960)

Le cœur du travail porte sur l'étude d'une fonction définie par Teiji Takagi en 1903 dans son article *A simple example of the continuous function without derivative*, initialement paru dans les Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, ser II, Vol 1. 1903, pp 176-177, puis dans les Collected Papers of Teiji Takagi (S. Iyanaga, Ed), Springer Verlag, New York 1990.

Nous définissons la fonction φ par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,\mathbf{Z}) := \inf\{|x-n| \,:\, n \in \mathbf{Z}\}\,. \end{array} \right.$$

Q32. — Démontrer que la fonction φ est 1-lipschitzienne.

Q33. — Démontrer que la fonction φ est paire.

Q34. — Démontrer que la fonction φ est 1-périodique.

Q35. — Démontrer que $\varphi(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1/2]$.

Q36. — Tracer la représentation graphique de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4, 4]$.

Q37. — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \leqslant 1/2 \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x & \text{si } x - \lfloor x \rfloor > 1/2. \end{cases}$$

Q38. — Démontrer que la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et calculer $||\varphi||_\infty$.

Nous introduisons la fonction due à Teiji Takagi.

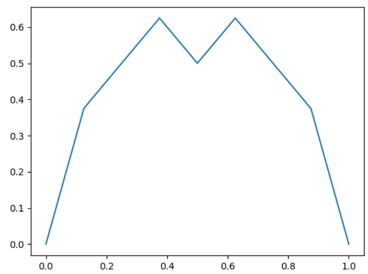
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}. \end{array} \right.$$

Q39. — Démontrer que cette fonction f est bien définie.

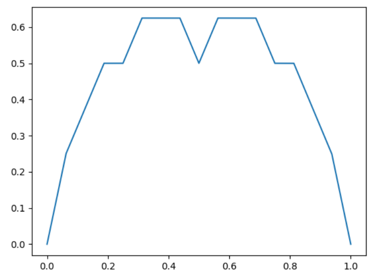
Q40. — Démontrer que la fonction f est 1-périodique.

Ci-dessous, figurent des courbes de fonctions qui approximent la fonction f sur $[0, 1]$.

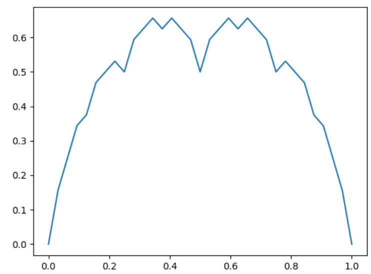
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{2} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



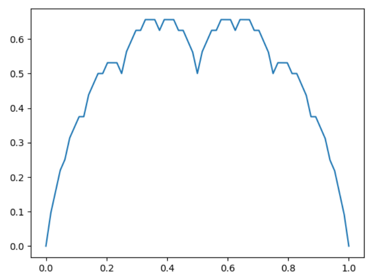
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{3} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



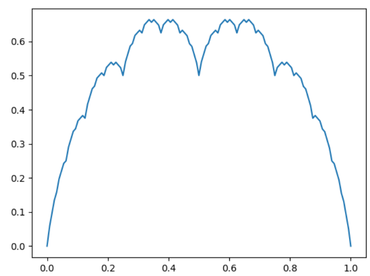
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{4} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



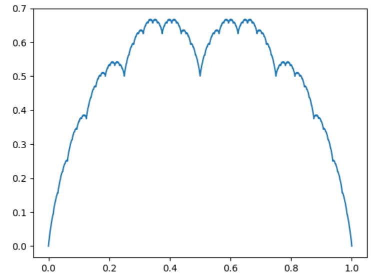
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{5} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{6} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{100} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



Q41. — Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

On souhaite démontrer que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un nombre réel x en lequel la fonction f est dérivable.

Q42. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad a_n \leqslant x < b_n \qquad ; \qquad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \qquad ; \qquad b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\,.$$

Démontrer :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(x)\,.$$

Q43. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier qu'il existe un unique $j_n \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$a_n := \frac{j_n}{2^n} \leqslant x < \frac{j_n + 1}{2^n} =: b_n$$

puis démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers x.

Q44. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \mathbf{N}$. Démontrer :

$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\, \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right)\,.$$

Q45. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k}\,\frac{\varphi\left(b_n 2^k\right) - \varphi\left(a_n 2^k\right)}{b_n - a_n} \in \{-1, 1\}\,.$$

On pourra poser $q_{n,k} := \lfloor 2\,a_n 2^k \rfloor$, démontrer que $2\,b_n 2^k \in \left[q_{n,k}, q_{n,k}+1\right]$, puis exploiter des propriétés de la fonction φ en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier $q_{n,k}$.

Q46. — Déduire des deux questions précédentes que la suite $\left(\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente.

Q47. — Conclure quant à la non dérivabilité de f en x.

On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$.

Q48. — Soit $g \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ continues sur $[0,1]$, dérivables en aucun point de $[0,1]$, telle que :

$$g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} g\,.$$