INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

CORRIGÉ

DS N°4

par David Blottière, le 3 décembre 2023 à 07h24

La correction de l'exercice 3 [E3A-PSI-A-2019] a été rédigée par Christophe Devulder.

Les corrections de l'exercice 6 et du bonus [X-ENS-MP-B-2020] sont dues à Denis Choimet et Jean Nougayrède.

EXERCICE 1 — MPI-MPI* — NATURES ET SOMMES ÉVENTUELLES DE SÉRIES

Q1. — Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme, à l'aide de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2(X+1)^2}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} &= -2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} \\
&= 2\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2} \\
&= 2\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - 3 \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 3.
\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$. ■

Q2. — Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n}\ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n}\ln(k) = \sum_{k=2}^{n-1}\ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1}\ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n}\ln(k).$$

Après télescopages :

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(n) - \ln(2) + \ln(n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2).$$

Donc la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$. ■

Q3. — Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Nous savons :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e} - \frac{e}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme :

- $\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}}{2n}$;
- pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{e}{2n} \geqslant 0$;
- la série harmonique diverge ;

le théorème de comparaison livre la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ■

Q4. — Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^3(n)}$.

Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \ln(x)$ sont croissantes et strictement positives sur $[2,+\infty[$. Nous en déduisons que la fonction $x \longmapsto x\ln^3(x)$ est croissante et strictement positive sur $[2,+\infty[$, puis que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\ln^3(x)} \end{array} \right.$$

est décroissante. Comme :

- la fonction f est continue par morceaux sur $[2,+\infty[$;
- la fonction f est positive sur $[2,+\infty[$;
- la fonction f est décroissante sur $[2,+\infty[$;

le théorème de comparaison série-intégrale livre que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^3(n)}$ a même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$. Or cette dernière est convergente car :

$$\int_2^A \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2\ln^2(x)}\right]_2^A = \frac{1}{2\ln^2(2)} - \frac{1}{2\ln^2(A)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2\ln^2(2)}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ est donc convergente. ■

Q5. — Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$.

(a) La série converge pour $x = 0$.
(b) Désormais, supposons $x \neq 0$ et posons, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n(x) := \frac{\ln(n)}{n^2}\, x^n \neq 0.$$

Comme :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)$$

il vient :

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{\ln(n+1)\, n^2}{\ln(n)\,(n+1)^2}\,|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n^2}\, x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$.
(c) Si $x \in \{-1, 1\}$, alors :

$$|u_n(x)| = \frac{\ln(n)}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

d'après les croissances comparées. Comme :

- $|u_n(x)| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$;
- pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geqslant 0$;
- la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (critère de Riemann) ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n^2}\, x^n$ est absolument convergente. ■

EXERCICE 2 — MPI — RÈGLE DE RAABE-DUHAMEL ET CAS CRITIQUE

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

Q6. — On suppose qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Démontrer que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Par hypothèse :

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont à termes strictement positifs, nous en déduisons :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante, donc majorée par son premier terme. Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \max\left\{\frac{u_k}{v_k} \;:\; k \in [\![0, n_0]\!]\right\}$$

et $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. ■

Q7. — On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Soient β un réel tel que $1 < \beta < \alpha$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta = 1 - \frac{\beta}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha-\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\alpha-\beta}{n} > 0.$$

Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

puis $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ d'après la question précédente. Comme :

- $u_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$;
- pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^\beta} \geqslant 0$;
- la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\beta}$ converge (critère de Riemann) ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. ■

Q8. — On suppose cette fois qu'il existe $\alpha < 1$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Soient β un réel tel que $\alpha < \beta < 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\beta-\alpha}{n} > 0.$$

Nous en déduisons qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

puis $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ d'après la question précédente. Comme :

- $\dfrac{1}{n^\beta} = \mathrm{O}(u_n)$;
- pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$;
- la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\beta}$ diverge (critère de Riemann) ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge. ■

Q9. — Soient a et b des réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{a+k}{b+k}$.

Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k} > 0.$$

Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après les deux questions précédentes, la série $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$ converge si $b-a>1$ et diverge si $b-a<1$.

Si $b-a=1$, alors :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{a+k+1} = \frac{a}{a+n} \sim \frac{a}{n}.$$

Comme :

- $u_n \sim \frac{a}{n}$;
- pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{a}{n} \geqslant 0$;
- la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{n}$ diverge ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge. ■

On suppose désormais que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Q10. — Démontrer que :

$$\exists C_1 \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \geqslant -\frac{1}{n} + \frac{C_1}{n^2}.$$

Posons :

$$v_n := n^2 \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{O}(1).$$

de sorte que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{v_n}{n^2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{v_n}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n} + \frac{v_n}{n^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n} + \frac{v_n}{n^2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(-\frac{1}{n} + \frac{v_n}{n^2}\right)^2\right) \\
&= -\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$n^2 \left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}(1)$$

ce qui livre le résultat. ■

Q11. — Démontrer que :

$$\exists C_2 \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \ln(u_{n+1}) \geqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + C_2.$$

D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) \geqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

donc :

$$\ln(u_{n+1}) \geqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(u_1) + C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. La suite $\left(\ln(u_1) + C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente et par suite minorée. Notons C_2 un de ses minorants. Alors :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \ln(u_{n+1}) \geqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + C_2.$$

■

Q12. — En déduire que :

$$\exists C_3 \in \mathbf{R}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} \geqslant \frac{C_3}{n}$$

et conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

- Nous calculons tout d'abord un développement asymptotique de :

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Par concavité du logarithme, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0.$$

La suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est donc décroissante. Par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$, il vient pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

puis, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\ln(n) - \ln(2) = \int_2^n \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - 1 - \frac{1}{n}$$

nous en déduisons, que pour tout $n \geqslant 2$:

$$H_n - \ln(n) \geqslant 1 + \frac{1}{n} - \ln(2) \geqslant 1 - \ln(2)$$

La suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de plus minorée. Par théorème de la limite monotone pour les suite, la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Nous notons γ sa limite ($\gamma \in]0,577, 0,578[$ est la constante d'Euler) pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

- En appliquant la fonction exponentielle à chaque membre de l'inégalité obtenue à la question précédente, il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_{n+1} \geqslant \exp(-H_n)\, \exp(C_2)$$

À l'aide du développement asymptotique obtenu à l'instant, nous obtenons :

$$\exp(-H_n)\, \exp(C_2) = \frac{1}{n} \exp(\gamma + \mathrm{o}(1))\, \exp(C_2).$$

Comme la suite $\exp(\gamma + \mathrm{o}(1))\ \exp(C_2)$ converge, elle est minorée. Si nous notons C_3 un de ses minorants, il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_{n+1} \geqslant \exp(-H_n)\ \exp(C_2) \geqslant \frac{C_3}{n}.$$

- Comme :
  - $\frac{1}{n} = \mathrm{O}(u_{n+1})$;
  - pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$;
  - la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

■

Exercice 3 — MPI — Intégrale de Dirichlet

Q13. — Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente, mais non-absolument convergente.

- La fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin(t)}{t} \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Comme $\sin(t) \sim t$ lorsque t tend vers 0, la fonction f admet un prolongement pas continuité en 0. L'intégrale $\int_0^1 f$ est donc convergente.
- Les fonctions :

$$u\colon t \longmapsto \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad v\colon t \longmapsto -\cos(t)$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et, comme v est bornée :

$$\frac{-\cos(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi :

$$\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^{+\infty} = \frac{\cos(1)}{1}$$

est-t-il bien défini. Par formule d'intégration par parties les intégrales $\int_1^{+\infty} f$ et :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

ont même nature. Comme :

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge (critère de Riemann), le théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives livre l'absolue convergence, donc la convergence, de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$. Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ est-elle convergente.
- D'après les deux points précédents l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

- Nous raisonnons par l'absurde. Supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)| \, dt$ converge, ce qui implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(t)| \, dt$ converge Alors, comme :

$$\forall t \geqslant 1, \quad |f(t)| = \frac{|\sin(t)|}{t} \geqslant \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \geqslant 0$$

le théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \, dt.$$

Au moyen d'une intégration par parties, comme nous l'avons fait pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$, nous établissons la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} \, dt.$$

Par propriété de linéarité des intégrales convergentes, il vient alors que l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} \, dt$$

converge, ce qui n'est pas (critère de Riemann). ■

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \, dt \qquad \textit{et} \qquad v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} \, dt.$$

Q14. — Justifier que u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Les fonctions :

$$f_n \,:\, t \longmapsto \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \qquad \text{et} \qquad g_n \,:\, t \longmapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$$

sont continues sur $]0, \pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 (par $f_n(0) = 2n$ et $g_n(0) = 2n$). Ce sont donc des fonctions intégrables sur le segment $[0, \pi/2]$ et u_n et v_n existent a fortiori. ■

Q15. — Démontrer que la valeur $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de n et donner sa valeur.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La formule :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, indique que :

$$u_{n+1} - u_n = 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t)\cos(t) \, dt.$$

La formule :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, indique alors que :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt)) \, dt.$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = 0.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc constante et

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

■

Q16. — Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha,\beta]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On pose, pour tout $m\in N$:

$$H_m = \int_\alpha^\beta h(t)\,\mathrm{e}^{imt}\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que :

$$H_m \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{[lemme de Riemann-Lebesgue]}.$$

Soit $m\in\mathbf{N}^*$. Les fonctions :

$$u\colon t\longmapsto h(t) \qquad \text{et} \qquad v\colon t\longmapsto \frac{\mathrm{e}^{imt}}{im}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$. Une intégration par parties donne :

$$H_m = \left[h(t)\frac{e^{imt}}{im}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{im}\int_\alpha^\beta h'(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on a :

$$|H_m| \leqslant \frac{|h(\alpha)+h(\beta)|}{m} + \frac{|\beta-\alpha|}{m}\|h'\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$$

ceci étant licite car h' est continue sur le segment $[\alpha,\beta]$. On a alors immédiatement $H_m \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

■

Q17. — Démontrer que la fonction :

$$h\colon t\longmapsto h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- La fonction h est continue sur $[0,\pi/2]$ et :

$$h(t) = \frac{\sin(t)-t\cos(t)}{t\sin(t)} = \frac{(t+\mathrm{o}\left(t^2\right))-(t+\mathrm{o}\left(t^2\right))}{t^2+\mathrm{o}\left(t^2\right)} = \frac{\mathrm{o}\,(1)}{1+\mathrm{o}\,(1))}$$

On en déduit que $h(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0. La fonction h est donc prolongable par continuité en posant $h(0)=0$.

- On a alors une fonction continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$ avec :

$$h'(t) = \frac{t^2-\sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)} = \frac{(t-\sin(t))(t+\sin(t)}{t^2\sin^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(t^3/6)(2t)}{t^4} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{3}.$$

- Par un corollaire des accroissements finis, on en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ avec $h'(0)=1/3$.

■

Q18. — Étudier la limite éventuelle de $v_n - u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On remarque que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad v_n - u_n = \int_0^{\pi/2} h(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t.$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (en passant à la partie imaginaire) on a donc $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ■

Q19. — En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.

Le changement de variable $x = 2nt$ donne

$$v_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (on a existence des différentes limites avec ce qui précède) on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}.$$

■

EXERCICE 4 — MPI-MPI* — TRANSFORMATION D'ABEL

Q20. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \qquad \text{[transformation d'Abel]}\,.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} + A_n b_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k'=1}^{n} A_{k'-1} b_{k'} + A_n b_n \qquad \left[\text{changement d'indice } k' = k+1\right] \\
&= A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} b_k - A_{n-1} b_n + A_n b_n \\
&= \underbrace{A_0}_{a_0}\, b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(A_k - A_{k-1})}_{a_k}\, b_k + \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{a_n}\, b_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k
\end{aligned}$$

Remarque (transformation d'Abel vs. intégration par parties).
De la même manière que les suites peuvent être vues comme des analogues discrets des fonctions, la transformation d'Abel (cf. formule établie ci-dessus) peut être considérée comme un analogue discret de la formule d'intégration par parties. Nous tentons d'expliquer plus précisément cette analogie ci-dessous.

- Reformulation de la formule d'intégration par parties. Soient α et β des nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $a \colon [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et soit $b \colon [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si A désigne une primitive de a sur $[\alpha, \beta]$, alors :

$$\int_\alpha^\beta a(t) b(t)\, dt = [A(t)b(t)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta A(t) b'(t)\, dt\,.$$

- Discrétisation de la notion de dérivée. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite, on définit la suite u' par :

$$u' := (u_n - u_{n-1})_{n\in\mathbf{N}}$$

en convenant que $u_{-1} := 0$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u'_n := u_n - u_{n-1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{n-(n-1)} .$$

Nous reconnaissons un taux d'accroissement.

- Discrétisation de la notion d'intégrale. La somme $\sum$ peut être vue comme un analogue discret de l'intégrale $\int$. Le lien est en fait bien plus profond, puisque la construction de l'intégrale de Riemann s'appuie sur des sommes (d'aires de rectangles). Il existe d'ailleurs une autre notion d'intégrale, due à Lebesgue, qui permet de considérer des sommes finies comme des intégrales (point de vue très fécond, mais hors programme).
- Version discrète du théorème fondamental de l'analyse. Nous remarquons que si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k .$$

- Discrétisation de la notion de primitive. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite, on définit la suite U par :

$$U := \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Nous observons que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$U'_n = U_n - U_{n-1} = u_n .$$

Nous pouvons reformuler la transformation d'Abel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_{k+1}$$

et mieux mesurer l'analogie entre transformation d'Abel et formule d'intégration par parties.

Formule d'intégration par parties	$\int_\alpha^\beta a(t)b(t)\,\mathrm{d}t = [A(t)b(t)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta A(t)b'(t)\,\mathrm{d}t$
Transformation d'Abel	$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_{k+1}$

■

Q21. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

(H1) la suite de terme général $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée ;

(H2) la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

D'après la question précédente :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n\,. \tag{1}$$

- Démontrons que la série $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ est (absolument) convergente. La suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ étant bornée, il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que :
$$\forall\, k \in \mathbf{N}, \quad |A_k| \leqslant M\,.$$
Pour tout $k \in \mathbf{N}$:
$$0 \leqslant |A_k(b_k - b_{k+1})| \leqslant M\,|b_k - b_{k+1}| = M\,(b_k - b_{k+1})$$
car la suite $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Comme la suite $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge, la série télescopique $\sum b_k - b_{k+1}$ est convergente. Par linéarité, la série $\sum M\,(b_k - b_{k+1})$ converge.
D'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs, la série $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument, donc converge. Par définition même, la suite de ses sommes partielles converge. Donc, il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell\,. \tag{2}$$

- Démontrons que la suite $(A_n b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. La suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge vers 0. D'après le théorème de la limite monotone et le caractère unique de sa limite, 0 est la borne inférieure de la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En particulier, 0 minore la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à termes positifs ou nuls.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$0 \leqslant |A_n b_n| \leqslant M b_n\,.$$
Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, le théorème d'encadrement nous livre $|A_n b_n| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$ et donc :
$$A_n b_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0\,. \tag{3}$$

- Conclusion. De (1), (2) et (3), nous déduisons :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell\,.$$
La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ converge, donc la série $\sum a_n b_n$ converge.

Remarque (résultat de la question 21 vs. critère spécial des séries alternées). La question 21 permet de redémontrer la convergence d'une série vérifiant les hypothèses du critère spécial des séries alternées (mais pas les inégalités, ni les majorations des restes en valeur absolue, qui sont également importantes). En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que :

- $\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1}\, u_n \leqslant 0$;
- la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante ;
- la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Introduisons la fonction signe définie par :

$$\operatorname{sgn}\left|\begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \{-1, 0, 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \operatorname{sgn}(u_n)\ |u_n|$. Comme la suite $\left(\operatorname{sgn}(u_n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie l'hypothèse (H1) de la question 21 (sauriez-vous l'établir ?) et comme la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie l'hypothèse (H2) de la question 21, on redémontre la convergence de la série $\sum \underbrace{\operatorname{sgn}(u_n)\ |u_n|}_{u_n}$ en appliquant le résultat de la question 21. ■

Q22. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que pour tout $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge.

Nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ converge. Comme la série $\sum \frac{a_n}{n}$ diverge, $\alpha \neq 1$ et donc $\alpha < 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_n}{n^\alpha} \times \frac{1}{n^{1-\alpha}}\,.$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de la question 21.

(H1) La série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ étant convergente, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente, donc bornée.

(H2) Comme $1-\alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de la question 21 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n}$, d'où une contradiction. ■

Q23. — Soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\theta \neq 0\ [2\pi]$. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

- Démontrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{\cos(n\theta)}{n} = \cos(n\theta) \times \frac{1}{n}\,.$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de la question 21.

(H1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\, \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) && [\text{car } e^{i\theta} \neq 1, \text{ cf. } \theta \not\equiv 0\,[2\pi]]\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\, \frac{-2\,i\,e^{i\frac{n\theta}{2}} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{-2\,i\,e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) && [\text{par factorisation par l'angle moitié}]\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\, \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}}_{\text{indépendant de } n}.$$

De cette étude, nous déduisons que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée.

(H2) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de la question 21 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

- Démontrons que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{\cos(n\theta)}{n}\right|$ diverge. Nous raisonnons par l'absurde et upposons que la série $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n}$ est convergente.

Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Comme $|\cos(n\theta)|\leqslant 1$, $\cos^2(n\theta)\leqslant|\cos(n\theta)|$, donc :

$$0 \leqslant \frac{\cos^2(n\theta)}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\frac{\cos(2n\theta)}{n} \leqslant \frac{|\cos(n\theta)|}{n}.$$

Par théorème de domination pour les séries à termes positifs :

$$\text{la série } \sum \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\frac{\cos(2n\theta)}{n} \text{ converge.} \tag{4}$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties.

- Cas où $2\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. D'après le point précédent, la série $\frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge. À l'aide de (4) et des résultats de linéarité sur les séries convergentes, nous en déduisons que la série $\sum\frac{1}{n}$ converge.
- Cas où $2\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Le résultat (4) se ré-écrit alors : la série $\sum\frac{1}{n}$ converge.

Dans les deux cas, nous concluons à la convergence de la série harmonique, que l'on sait être divergente, d'où une contradiction.

■

Q24. — Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

- Cas où $\alpha\leqslant 0$. Alors $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = n^{-\alpha}$ ne tend pas vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est donc grossièrement divergente.
- Cas où $\alpha>0$ et $\theta\equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est une série de Riemann. Elle converge donc si et seulement si $\alpha>1$.
- Cas où $\alpha>0$ et $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$ La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si les deux séries :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

convergent. En suivant la démarche exposée dans la question 23, nous démontrons que les deux séries précédentes convergent et donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge. ■

Exercice 5 — MPI* — Intégrales de Wallis et de Gauss

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt.$$

On se propose de déterminer un équivalent de W_n, quand n tend vers $+\infty$.

Q25. — Établir pour $n \in \mathbf{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\ (\sin(t))^{n+1} \, dt\,.$$

Les fonctions :

$$t \mapsto -\cos(t) \qquad \text{et} \qquad t \mapsto (\sin(t))^{n+1}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par intégration par parties, il vient :

$$W_{n+2} = \underbrace{\left[-\cos(t)\ (\sin(t))^{n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2(t)}_{=1-\sin^2(t)}\ (\sin(t))^n \, dt = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$$

et ainsi :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, W_n\,.$$

■

Q26. — En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(n+2)\ W_{n+1}\ W_{n+2} = (n+1)\ W_n W_{n+1}\,.$$

La suite $((n+1)\ W_n W_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est donc constante. Comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, nous en déduisons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad (n+1)\ W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}\,.$$

■

Q27. — Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante et qu'elle converge.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Par linéarité et croissance de l'intégrale :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{n+1} t - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin(t))^n}_{\geqslant 0} \underbrace{(\sin(t)-1)}_{\leqslant 0} \, dt \leqslant 0\,. \tag{5}$$

  La suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc décroissante.

- Démontrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n \neq W_{n+1}$, en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $W_{n+1} - W_n = 0$. La fonction :

$$g_n : t \mapsto (\sin(t))^n\ (\sin(t)-1)$$

  est continue et de signe constant sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le calcul effectué en (5), puisque $W_{n+1} -$

$W_n = 0$, la fonction g_n est nulle (propriété de séparation de l'intégrale). Or :

$$g_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \neq 0$$

d'où une contradiction. Ainsi, la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle strictement décroissante. item Par croissance de l'intégrale :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin(t))^n}_{\geqslant 0} \,\mathrm{d}t \geqslant 0\,.$$

Donc la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée par 0.

- D'après ce qui précède et le théorème de la limite monotone, la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et sa limite, notée ℓ, vérifie $\ell \geqslant 0$.

■

Q28. — Déterminer la limite de la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et donner un équivalent de cette suite.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$ et $W_n \geqslant 0$:

$$W_{n+1}W_n \leqslant W_n^2 \leqslant W_{n-1}W_n\,.$$

D'après la question 26 :

$$\frac{\pi}{2(n+1)} = W_{n+1}W_n \leqslant W_n^2 \leqslant W_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2n}$$

et donc :

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, W_n \leqslant 1\,.$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et donc $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ■

On se propose de démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Q29. — Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue par morceaux et positive sur $\mathbf{R}$.
- On observe que, d'après les résultats sur les croissances comparées :

$$\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'après le critère de Riemann, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par théorème d'intégration de comparaison, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$.

- Nous avons établi que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Par changement de variable $u = -x$, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge et :

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

- D'après ce qui précède, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

■

Q30. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout réel x vérifiant $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$:

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Si $x = \sqrt{n}$, alors l'inégalité à établir s'écrit $0 \leqslant \mathrm{e}^{-n} \leqslant 2^{-n}$. Elle découle de $2 \leqslant \mathrm{e}$.
- Soit $x \in \left[0, \sqrt{n}\right[$.
  - Comme $-\dfrac{x^2}{n} > -1$, nous déduisons de la concavité du logarithme que :

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leqslant -\frac{x^2}{n}$$

    puis, comme la fonction $u \mapsto \exp(nu)$ est croissante sur $\mathbf{R}$:

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(n\left(-\frac{x^2}{n}\right)\right) = e^{-x^2}. \tag{6}$$

  - Comme $\dfrac{x^2}{n} > -1$, nous déduisons de la de la concavité du logarithme que :

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n}$$

    puis, comme la fonction $u \mapsto \exp(-nu)$ est décroissante sur $\mathbf{R}$:

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \exp\left(-n\frac{x^2}{n}\right) \leqslant \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}. \tag{7}$$

  De (6) et (7), nous déduisons

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

■

Q31. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la question précédente :

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra considérer les changements de variables $x = \sqrt{n}\cos(t)$ et $x = \dfrac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Par croissance de l'intégrale, nous déduisons de la question précédente que :

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x}_{=:I_n} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x}_{=:J_n}. \tag{8}$$

- Calculons I_n. À l'aide du changement de variable $x=\sqrt{n}\cos(t)$, il vient :

$$I_n=\int_{\pi/2}^{0} \left(1-\cos^2(t)\right)^n \sqrt{n}\,(-\sin(t))\,\mathrm{d}t=\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{2n+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{n}\,W_{2n+1}. \tag{9}$$

- Calculons J_n, que l'on peut considérer comme l'intégrale convergente de la fonction continue par morceaux

$$\left|\begin{array}{ccc}]0,\sqrt{n}] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \end{array}\right.$$

sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\sqrt{n}]$. On lui applique le théorème de changement de variable pour $x=\dfrac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$. Il livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1+\frac{1}{\tan^2(t)}\right)^{-n} (-\sqrt{n})\left(1+\tan^2(t)\right)\frac{1}{\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

ainsi que l'identité :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x &= \int_{\pi/2}^{\pi/4} \left(1+\frac{1}{\tan^2(t)}\right)^{-n} (-\sqrt{n})\left(1+\tan^2(t)\right)\frac{1}{\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t & (10)\\ &= \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t. & (11)\end{aligned}$$

- De (8), (9) et (11), on déduit :

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

■

Q32. — En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

- D'après la question 28, W_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$:

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{12}$$

- Par définition de la valeur d'une intégrale convergente et par composition de limites :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

- Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t = W_{2n-2}-\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

On observe que pour tout $t\in[0,\pi/4]$, $0\leqslant\sin(t)\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit :

$$0\leqslant\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\, \mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2}\right)$. Comme $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, les résultats sur les croissances comparées livrent :

$$\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\, \mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{15}$$

De (14), (15) et la question 28 on déduit :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et donc que :

$$\sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{16}$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question 31 et en utilisant (12), (13) et (16), il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

À l'aide de la question 29, nous en déduisons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

■

EXERCICE 6 — MPI* — MÉTHODE DE LAPLACE ET FORMULE DE STIRLING

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction infiniment dérivable. Appelons (H) l'hypothèse suivante : il existe un unique point $x_0 \in [a,b]$ où f atteint son maximum, on a $a < x_0 < b$, et $f''(x_0) \neq 0$.

Q33. — Montrer que sous l'hypothèse (H), on a $f''(x_0) < 0$.

Comme f est $\mathscr{C}^2$, d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction $\varepsilon : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ de limite nulle en x_0 telle que :

$$\forall\, x \in [a,b], \quad f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x)\right)(x-x_0)^2.$$

Comme f présente un maximum en x_0, point intérieur à $[a,b]$, on a $f'(x_0) = 0$. Dès lors, pour $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, on a :

$$\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} \leqslant 0$$

d'où, en faisant tendre x vers x_0 :

$$\frac{f''(x_0)}{2} \leqslant 0.$$

Comme de plus $f''(x_0) \neq 0$, on a montré que :

$$f''(x_0) < 0.$$

■

Q34. — Sous l'hypothèse (H), montrer que pour tout $\delta > 0$ tel que $\delta < \min(x_0 - a, b - x_0)$, on a l'équivalent :

$$\int_a^b e^{tf(x)}\, \mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Posons $E = [a,b] \setminus]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Cet ensemble est la réunion de deux segments de $\mathbf{R}$, et il s'agit (avec un léger abus de notation) de montrer :

$$\int_E \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x\right). \tag{17}$$

- Tout d'abord, par continuité de f et compacité de E, on peut fixer $x_1 \in E$ tel que $f(x) \leqslant f(x_1)$ pour tout $x \in E$. Dès lors :

$$\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \int_E \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E \mathrm{e}^{tf(x_1)}\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\,\mathrm{e}^{tf(x_1)}. \tag{18}$$

- Fixons ensuite $m \in]f(x_1), f(x_0)[$ (c'est légitime puisque f atteint son maximum uniquement en x_0). Par continuité de f en x_0, il existe $\eta \in]0,\delta[$ tel que :

$$\forall x \in [x_0-\eta, x_0+\eta], \quad f(x) \geqslant m.$$

  On a alors :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{tm}\,\mathrm{d}x = 2\eta\,\mathrm{e}^{tm}. \tag{19}$$

On déduit de (18) et (19) que, pour $t \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \frac{\displaystyle\int_E \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x} \leqslant \frac{b-a}{2\eta}\,\mathrm{e}^{t(f(x_1)-m)}$$

d'où :

$$\frac{\displaystyle\int_E \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

par le théorème des gendarmes. Cela prouve que :

$$\int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x.$$

■

Q35. — Sous l'hypothèse (H), montrer l'équivalent :

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}.$$

Nous allons d'abord traiter dans le cas particulier où :

$$x_0 = f(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) = -2 \tag{20}$$

et nous expliquerons ensuite comment se ramener à ce cas.
- Soient $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon_0 \in]0,1[$ à ajuster. D'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -x^2 + o(x^2)$$

donc on peut fixer $\delta > 0$ vérifiant $[-\delta,\delta] \subset [a,b]$ et

$$\forall x \in [-\delta,\delta], \quad -(1+\varepsilon_0)x^2 \leqslant f(x) \leqslant -(1-\varepsilon_0)x^2. \tag{21}$$

Soit alors $t > 0$. On a :

$$\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-t(1+\varepsilon_0)x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-t(1-\varepsilon_0)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Les changements de variable $v = x\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}$ et $v = x\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}$ donnent :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \int_{-\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \leqslant \sqrt{t}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} \int_{-\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v.$$

Or, quand $t \longrightarrow +\infty$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v$ et $\displaystyle\int_{-\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v$ tendent toutes deux vers :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}.$$

On peut donc fixer $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant t_0$, l'on ait :

$$\int_{-\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \geqslant \sqrt{\pi} - \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \int_{-\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \leqslant \sqrt{\pi} + \varepsilon_0.$$

On a alors :

$$\forall\, t \geqslant t_0, \quad \frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_0}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \leqslant \sqrt{t}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{t f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{\pi}+\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0}}. \tag{22}$$

Nous y sommes presque. Revenons à notre $\varepsilon > 0$. Comme :

$$\frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_0}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\pi}+\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0}}$$

tendent tous deux vers $\sqrt{\pi}$ quand ε_0 tend vers 0^+, on peut choisir $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tel que :

$$\frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_0}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \geqslant \sqrt{\pi} - \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\pi}+\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} \leqslant \sqrt{\pi} + \varepsilon.$$

On associe alors à ε_0 tout d'abord δ comme en (20), puis t_0 comme en (21). On a alors :

$$\forall\, t \geqslant t_0, \quad \sqrt{\pi} - \varepsilon \leqslant \sqrt{t}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{t f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\pi} + \varepsilon.$$

Cela prouve que :

$$\sqrt{t}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{t f(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

autrement dit que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{t f(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{t}}. \tag{23}$$

- Expliquons maintenant comment en déduire le cas général. Soit $\lambda > 0$ à ajuster, et

$$g \left| \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x_0 + \lambda x) - f(x_0) \end{array} \right.$$

où :

$$\alpha = \frac{a - x_0}{\lambda} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b - x_0}{\lambda}.$$

La fonction g est $\mathscr{C}^\infty$, présente un maximum absolu exactement en 0, et vérifie en outre $g''(0) = \lambda^2 f''(x_0) \neq 0$. Cela conduit à choisir :

$$\lambda = \sqrt{\frac{-2}{f''(x_0)}} = \sqrt{\frac{2}{|f''(x_0)|}}.$$

Alors $g''(0) = -2$, donc d'après (23), appliqué à g au lieu de f, et $\dfrac{\delta}{\lambda}$ au lieu de δ :

$$\mathrm{e}^{-t f(x_0)} \int_{-\delta/\lambda}^{\delta/\lambda} \mathrm{e}^{t f(x_0+\lambda x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

soit, par le changement de variable $y = x_0 + \lambda x$:

$$\frac{\mathrm{e}^{-t f(x_0)}}{\lambda} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mathrm{e}^{t f(y)}\,\mathrm{d}y \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

soit encore :

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mathrm{e}^{t f(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{t f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}$$

d'où finalement, grâce à la question précédente :

$$\int_a^b \mathrm{e}^{t f(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{t f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}.$$

■

Q36. — Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$n! = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n \,\mathrm{d}t.$$

Posons :

$$\forall \geqslant 0, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n \,\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale est convergente car l'intégrande est continu sur $[0, +\infty[$, positif et $\mathrm{o}\left(t^{-2}\right)$ en $+\infty$. On a $I_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, une intégration par parties (correcte car le terme tout intégré est convergent) donne :

$$I_n = \underbrace{\left[-\mathrm{e}^{-t}\, t^n\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} (-\mathrm{e}^{t}) n t^{n-1} \,\mathrm{d}t = n I_{n-1}.$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, que $I_n = n!$ pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi :

$$\forall \geqslant 0, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n \,\mathrm{d}t = n!.$$

■

Q37. — En utilisant les résultats précédents, retrouver la formule de Stirling donnant un équivalent asymptotique de $n!$.

Fixons $n \geqslant 1$. D'après la question précédente, on a :

$$n! = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t + n\ln(t)} \,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longmapsto -t + n\ln(t)$ atteint son maximum en $t = n$. On ramène ce maximum en 0 par le changement de variable $u = t - n$:

$$n! = \int_{-n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n-u+n\ln(u+n)} \,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-n} \int_{-n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u+n\ln(u+n)} \,\mathrm{d}u.$$

On fixe alors les bornes par le changement de variable $u = nx$:

$$n! = n\mathrm{e}^{-n} \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx+n\ln(nx+n)} \,\mathrm{d}x = n^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n} \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{n(-x+\ln(x+1))} \,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

Or, la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & -x + \ln(x+1) \end{array} \right.$$

est $\mathscr{C}^{\infty}$, croît (resp. décroît) strictement sur $]-1, 0]$ (resp. $[0, +\infty[$), atteint son maximum exactement en 0 et vérifie $f(0) = 0$ et $f''(0) = -1 < 0$. On déduit alors de la question 35 que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{n(-x+\ln(x+1))} \,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}. \tag{25}$$

Pour conclure, on a besoin des majoration suivantes :

$$0 \leqslant \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{nf(x)} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{nf(-\frac{1}{2})} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{nf(-\frac{1}{2})}$$

et

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{nf(x)} \,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{nf(x)}{2}}\, \mathrm{e}^{\frac{nf(x)}{2}} \,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{nf(\frac{1}{2})}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{2}} \,\mathrm{d}x$$

(l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{2}} \,\mathrm{d}x$ étant convergente), qui montrent que les intégrales :

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{nf(x)} \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{nf(x)} \,\mathrm{d}x$$

tendent vers 0 à vitesse exponentielle, donc sont négligeables devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$ quand $n \longrightarrow +\infty$. On déduit alors de (25) que :

$$\int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{n(-x+\log(x+1))}\, \mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

puis de (24) que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

■

Bonus

Q38. — Démontrer que :

$$\int_0^a \left|\sin\left(x^2\right)\right| \mathrm{d}x \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty.$$

Posons pour tout $a > 0$:

$$f(a) = \int_0^a |\sin(x^2)|\, \mathrm{d}x.$$

Effectuons le changement de variable $\mathscr{C}^1$ strictement croissant $u = x^2$.

$$\forall a > 0, \quad f(a) = \int_0^{a^2} \frac{|\sin(u)|}{2\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u.$$

Posons ensuite :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2} \frac{|\sin(u)|}{2\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n \geqslant \frac{1}{4}\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\pi/2}}.$$

Comme l'intégrande est positif ou nul, que $\sum u_n$ est une série divergente dont la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ et que les intervalles $[2n\pi+\pi/6, 2n\pi+\pi/2]$ sont deux à deux disjoints (et inclus dans $\mathbf{R}_+$), on peut conclure :

$$f(a) \xrightarrow[a\longrightarrow+\infty]{} +\infty.$$

■