# INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

*par David Blottière, le 3 décembre 2023 à 07h09*

**DS N°4**

**4 HEURES**

**Les étudiants de MPI et de MPI* composent tous cet unique problème.**

**Les étudiants de MPI résolvent les exercices 1,2,3 et 4, ceux de MPI* les exercices 1,4,5 et 6.**

## EXERCICE 1 — MPI-MPI* — NATURES ET SOMMES ÉVENTUELLES DE SÉRIES

**Q1. —** Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme, à l'aide de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

**Q2. —** Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

**Q3. —** Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

**Q4. —** Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^3(n)}$.

**Q5. —** Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n^2}\, x^n$.

## EXERCICE 2 — MPI — RÈGLE DE RAABE-DUHAMEL ET CAS CRITIQUE

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.*

**Q6. —** On suppose qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Démontrer que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

**Q7. —** On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

**Q8. —** On suppose cette fois qu'il existe $\alpha < 1$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

**Q9.** — Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.

*On suppose désormais que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Q10.** — Démontrer que :

$$\exists C_1 \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \geqslant -\frac{1}{n} + \frac{C_1}{n^2}.$$

**Q11.** — Démontrer que :

$$\exists C_2 \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \ln(u_{n+1}) \geqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + C_2.$$

**Q12.** — En déduire que :

$$\exists C_3 \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} \geqslant \frac{C_3}{n}$$

et conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

## Exercice 3 — MPI — Intégrale de Dirichlet

**Q13.** — Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non-absolument convergente.

*On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :*

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**Q14.** — Justifier que $u_n$ et $v_n$ existent pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

**Q15.** — Démontrer que la valeur $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de $n$ et donner sa valeur.

**Q16.** — Soit $h$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On pose, pour tout $m \in N$ :

$$H_m = \int_\alpha^\beta h(t)\,\mathrm{e}^{imt}\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que :

$$H_m \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad [\text{lemme de Riemann-Lebesgue}].$$

**Q17.** — Démontrer que la fonction :

$$h\colon t \longmapsto h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**Q18.** — Étudier la limite éventuelle de $v_n - u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Q19.** — En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

## EXERCICE 4 — MPI-MPI* — TRANSFORMATION D'ABEL

**Q20.** — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \qquad \text{[transformation d'Abel]}\,.$$

**Q21.** — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

(H1) la suite de terme général $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée;

(H2) la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

**Q22.** — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que pour tout $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge.

**Q23.** — Soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\theta \neq 0\ [2\pi]$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

**Q24.** — Soient $\theta$ et $\alpha$ des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

## EXERCICE 5 — MPI* — INTÉGRALES DE WALLIS ET DE GAUSS

*Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \,\mathrm{d}t.$$

*On se propose de déterminer un équivalent de $W_n$, quand $n$ tend vers $+\infty$.*

**Q25.** — Établir pour $n \in \mathbf{N}$ une relation simple entre $W_{n+2}$ et $W_n$.

**Q26.** — En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ :

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

**Q27.** — Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante et qu'elle converge.

**Q28.** — Déterminer la limite de la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et donner un équivalent de cette suite.

*On se propose de démontrer que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

**Q29. —** Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**Q30. —** Démontrer que, que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout réel $x$ vérifiant $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$ :

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

**Q31. —** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la question précédente :

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra considérer les changements de variables $x = \sqrt{n}\cos(t)$ et $x = \dfrac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.

**Q32. —** En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

## EXERCICE 6 — MPI* — MÉTHODE DE LAPLACE ET FORMULE DE STIRLING

*Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction infiniment dérivable. Appelons $(H)$ l'hypothèse suivante : il existe un unique point $x_0 \in [a,b]$ où $f$ atteint son maximum, on a $a < x_0 < b$, et $f''(x_0) \neq 0$.*

**Q33. —** Montrer que sous l'hypothèse $(H)$, on a $f''(x_0) < 0$.

**Q34. —** Sous l'hypothèse $(H)$, montrer que pour tout $\delta > 0$ tel que $\delta < \min(x_0 - a, b - x_0)$, on a l'équivalent :

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x.$$

**Q35. —** Sous l'hypothèse $(H)$, montrer l'équivalent :

$$\int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}.$$

**Q36. —** Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$n! = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t.$$

**Q37. —** En utilisant les résultats précédents, retrouver la formule de Stirling donnant un équivalent asymptotique de $n!$.

## Bonus

**Q38. —** Démontrer que :

$$\int_0^a \left|\sin\left(x^2\right)\right|\,\mathrm{d}x \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty.$$