Un corrigé du DS3

Concours X-ESCPI-ENS PC 2017

Edouard Lebeau

Question 1.a. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathrm{C} > 0$.

On fait l'hypothèse $||\mathrm{M}|| \leqslant \mathrm{C}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{||\mathrm{M}x||_1}{||x||_1} \leqslant \mathrm{C}$.

Pour tout x non nul de $\mathbb{C}^n$, on a donc la majoration $\dfrac{||\mathrm{M}x||_1}{||x||_1} \leqslant \mathrm{C}$. On multiplie par $||x||_1$, qui est positif, ce qui donne $||\mathrm{M}x||_1 \leqslant \mathrm{C}||x||_1$.

Cette inégalité est également valable si x est nul.

Réciproquement, on fait l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{C}^n : ||\mathrm{M}x||_1 \leqslant \mathrm{C}||x||1$.

Pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{C}^n$, on en déduit l'inégalité $\dfrac{||\mathrm{M}x||_1}{||x||_1} \leqslant \mathrm{C}$ car $||x||_1 > 0$, donc $||\mathrm{M}|| \leqslant \mathrm{C}$.

$\boxed{\text{On a prouvé l'équivalence } ||\mathrm{M}|| \leqslant \mathrm{C} \iff \forall x \in \mathbb{C}^n : ||\mathrm{M}x||_1 \leqslant \mathrm{C}||x||_1.}$

Au final, remarquons qu'on a prouvé en particulier l'inégalité $||\mathrm{M}x||_1 \leqslant ||\mathrm{M}|| \times ||x||_1$ et qu'on possède une méthode pour majorer $||\mathrm{M}||$ dans le cas général. Ces deux points serviront fréquemment dans ce qui suit.

Question 1.b. $\boxed{1}$ Déjà, la fonction $\mathrm{M} \mapsto ||\mathrm{M}||$ est à valeurs réelles positives.

$\boxed{2}$ Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $||\mathrm{M}|| = 0$. À la question précédente, on n'a pas utilisé le caractère strict de l'inégalité $\mathrm{C} > 0$. On peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : ||\mathrm{M}x||_1 \leqslant 0.$$

Par positivité de la norme, on obtient donc $\forall x \in \mathbb{C}^n : ||\mathrm{M}x||_1 = 0$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{C}^n : \mathrm{M}x = 0$. Les colonnes de la matrice M sont les produits $\mathrm{M}e_i$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, les colonnes de M sont nulles donc M est la matrice nulle.

$\boxed{3}$ Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Exploitons l'homogénéité de la norme $||\ ||_1$.

$$||\lambda \mathrm{M}x||_1 = |\lambda| \times ||\mathrm{M}x||_1 \leqslant |\lambda| \times ||\mathrm{M}|| \times ||x||_1.$$

On en déduit la majoration $||\lambda\mathrm{M}|| \leqslant |\lambda| \times ||\mathrm{M}||$ d'après 1.a.

Si $\lambda = 0$, on obtient $||\lambda\mathrm{M}|| \leqslant 0$ donc $||\lambda\mathrm{M}|| = 0 = |\lambda| \times ||\mathrm{M}||$.

Si $\lambda \neq 0$, on effectue la substitution $(\mathrm{M}, \lambda) \leftarrow (\lambda\mathrm{M}, 1/\lambda)$ dans l'inégalité $||\lambda\mathrm{M}|| \leqslant |\lambda| \times ||\mathrm{M}||$, pour obtenir $||\mathrm{M}|| \leqslant ||\lambda\mathrm{M}||/|\lambda|$, c'est-à-dire $||\lambda\mathrm{M}|| \geqslant |\lambda| \times ||\mathrm{M}||$.
On obtient donc $||\lambda\mathrm{M}|| = |\lambda| \times ||\mathrm{M}||$ dans tous les cas.

Remarque. Ce raisonnement est encore valable si on prend λ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas requis par la définition d'une norme mais cette extension est utile plus loin (à la question 8).

$\boxed{4}$ Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'inégalité triangulaire pour la norme $||\ ||_1$ donne

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad ||(\mathrm{M}+\mathrm{N})x||_1 \leqslant ||\mathrm{M}x||_1 + ||\mathrm{N}x||_1 \leqslant ||\mathrm{M}|| \times ||x||_1 + ||\mathrm{N}|| \times ||x||_1.$$

On en déduit l'inégalité $||\mathrm{M}+\mathrm{N}|| \leqslant ||\mathrm{M}|| + ||\mathrm{N}||$ par application de 1.a.

$\boxed{\text{On a montré que } ||\ || \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$

Question 2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En appliquant 1.a dans le sens $\Rightarrow$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad ||(\mathrm{AB})x||_1 \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{B}x||_1 \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{B}|| \times ||x||_1.$$

En appliquant 1.a dans le sens $\Leftarrow$, on en déduit l'inégalité $||\mathrm{A}\times\mathrm{B}|| \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{B}||$.

Question 3. Posons $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$ et notons j_0 un indice qui réalise ce maximum.

En notant de nouveau $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on observe l'égalité

$$\mathrm{A}e_{j_0} = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{S}(\mathrm{A}) = ||\mathrm{A}e_{j_0}||_1.$$

L'égalité $||e_{j_0}||_1 = 1$ donne alors $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \dfrac{||\mathrm{A}e_{j_0}||_1}{||e_{j_0}||_1} \leqslant ||\mathrm{A}||$.

Pour l'inégalité réciproque, prenons x quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

$$\mathrm{A}x = \mathrm{A} \times \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \times \mathrm{A}e_j.$$

L'inégalité triangulaire de la norme $||\ ||_1$ donne alors

$$||\mathrm{A}x||_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_j| \times ||\mathrm{A}e_j||_1.$$

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on observe les relations

$$||\mathrm{A}e_j||_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \mathrm{S}(\mathrm{A})$$

donc

$$||\mathrm{A}x||_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_j| \times \mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{S}(\mathrm{A}) \times ||x||_1.$$

D'après 1.a, on en déduit la majoration $||\mathrm{A}|| \leqslant \mathrm{S}(\mathrm{A})$.

$$\boxed{\text{Par double inégalité, on a prouvé l'égalité } ||\mathrm{A}|| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right).}$$

Question 4. C'est énervant : on nous demande de prouver une propriété du cours.

$\boxed{1}$ On commence par supposer que la suite $(\mathrm{A}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice B. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on remarque l'encadrement

$$0 \leqslant ||\mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}|| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}\right|.$$

Chaque terme du membre de droite tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ donc, par le théorème des gendarmes, on voit que $||\mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}||$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

$\boxed{2}$ Réciproquement, on suppose que $||\mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}||$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe l'encadrement

$$0 \leqslant \left|a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{n} \left|a_{s,j}^{(k)} - b_{s,j}\right| \leqslant ||\mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}||.$$

On en déduit que $a_{i,j}^{(k)}$ tend vers $b_{i,j}$ quand k tend vers $+\infty$.
Ainsi, la suite $(\mathrm{A}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice B.

Question 5.a. Le calcul donne

$$\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ba_{1,2} & b^2a_{1,3} & \cdots & b^{n-1}a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & ba_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b^2a_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ba_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{On en déduit que } \mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b \text{ tend vers la matrice } \mathrm{diag}(a_{1,1},\ldots,a_{n,n}) \text{ quand } b \text{ tend vers } 0.}$

Question 5.b. La question précédente, la deuxième inégalité triangulaire pour la norme || || et le théorème des gendarmes livrent que $||\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b||$ tend vers $||\mathrm{diag}(a_{1,1},\ldots,a_{n,n})||$ quand b tend vers 0. Cette limite, notée ℓ, est égale à $\max(|a_{j,j}|; 1 \leqslant j \leqslant n)$.

Cette limite est strictement inférieure à 1 par hypothèse. Notons $r = (1+\ell)/2$, ce qui est dans $]\ell, 1[$.

D'après la définition de la limite, il existe $b_0 > 0$ tel que pour tout b dans $]0, b_0]$, le nombre $||\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b||$ soit majoré par r. On obtient donc en particulier l'inégalité $||\mathrm{P}_{b_0}^{-1}\mathrm{AP}_{b_0}|| < 1$.

Question 5.c. Gardons la notation b de la question précédente. Une itération de l'inégalité de la question 2 donne

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant ||(\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b)^k|| \leqslant ||\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b||^k.$$

L'inégalité $||\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b|| < 1$ donne que $||\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b||^k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Rappelons l'identité $(\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b)^k = \mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P}_b$. L'inégalité de la question 2 donne maintenant

$$0 \leqslant ||\mathrm{A}^k|| \leqslant ||\mathrm{P}_b|| \times ||(\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b)^k|| \times ||\mathrm{P}_b^{-1}||,$$

si bien que $||\mathrm{A}^k||$ tend également vers 0.

$\boxed{\text{La suite de matrices } (\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$

Question 6. Pour la matrice $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_1) = \{0;1\}$ donc $\rho(\mathrm{A}_1) = 1$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_2) = \{0\}$ donc $\rho(\mathrm{A}_2) = 0$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_3) = \{0;1\}$ donc $\rho(\mathrm{A}_3) = 1$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_4) = \{\mathrm{i}\sqrt{2}; -\mathrm{i}\sqrt{2}\}$ donc $\rho(\mathrm{A}_4) = \sqrt{2}$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_5) = \{1;4\}$ donc $\rho(\mathrm{A}_5) = 4$.

Question 7. La propriété (i) est vraie en raison de l'égalité

$$\mathrm{Sp}(\mu \mathrm{A}) = \{\mu x \ ; \ x \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\}.$$

Pour prouver cette égalité, on remarque pour commencer l'égalité $\mathrm{Sp}(0 \times \mathrm{A}) = \{0\}$ puis, si $\mu \neq 0$, on remarque l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\mu\mathrm{A} - \mu x \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - x\mathrm{I}_n), \qquad \text{qui donne} \qquad \mu x \in \mathrm{Sp}(\mu\mathrm{A}) \iff x \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}).$$

La propriété (ii) est fausse. On peut prendre $\mathrm{A} = \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{A}_2$, ce qui donne $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Dans ce cas, on a donc $\rho(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = 1$ et $\rho(\mathrm{A}) + \rho(\mathrm{B}) = 0$ donc $\rho(\mathrm{A} + \mathrm{B}) > \rho(\mathrm{A}) + \rho(\mathrm{B})$.

La propriété (iii) est fausse. On peut prendre $\mathrm{A} = \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{A}_2$, ce qui donne $\mathrm{AB} = \mathrm{A}_1$.
Dans ce cas, on a donc $\rho(\mathrm{AB}) = 1$ et $\rho(\mathrm{A})\rho(\mathrm{B}) = 0$ donc $\rho(\mathrm{AB}) > \rho(\mathrm{A})\rho(\mathrm{B})$.

Les propriétés (iv) et (v) sont vraies car les matrices $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et ${}^t\mathrm{A}$ ont le même spectre que A.

Question 8. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(\mathrm{A})$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Les relations $\mathrm{A}x = \lambda x$ et $x \neq 0$ donnent

$$|\lambda| = \frac{||\mathrm{A}x||_1}{||x||_1}$$

donc $\boxed{\rho(\mathrm{A}) \leqslant ||\mathrm{A}||.}$

Question 9. On fait l'hypothèse $\rho(\mathrm{A}) < 1$. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$) donc il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A donc leurs modules sont strictement inférieurs à 1.

La matrice T vérifie donc les hypothèses de la question 5, si bien que la suite de matrices $(\mathrm{T}^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

Par le même raisonnement qu'en 5.c, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$

Question 10.a. On reprend le raisonnement de la question 8 : soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ telle que $|\lambda| = \rho(\mathrm{A})$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve

$$\mathrm{A}^k x = \mathrm{A}^{k-1}\lambda x = \mathrm{A}^{k-2}\lambda^2 x = \ldots = \lambda^k x$$

puis, le vecteur x étant non nul, on obtient $|\lambda^k| = ||\mathrm{A}^k x||_1/||x||_1$ donc $\rho(\mathrm{A})^k \leqslant ||\mathrm{A}^k||$.

Question 10.b. $\boxed{1}$ Soit $\alpha \in]0, \rho(\mathrm{A})]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on observe alors l'inégalité

$$\left|\left|\left(\frac{\mathrm{A}}{\alpha}\right)^k\right|\right| = \frac{||\mathrm{A}||^k}{\alpha^k} \geqslant \left(\frac{\rho(\mathrm{A})}{\alpha}\right)^k \geqslant 1$$

d'après 10.a.

On en déduit que $||(\mathrm{A}/\alpha)^k||$ ne tend vers pas 0 quand k tend vers $+\infty$ donc α n'est pas dans E_A.

$\boxed{2}$ Soit $\alpha \in]\rho(\mathrm{A}), +\infty[$. L'identité 7.i donne $\rho(\mathrm{A}/\alpha) = \rho(\mathrm{A})/\alpha < 1$ donc la suite $((\mathrm{A}/\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle d'après le résultat de la question 9, si bien que α est dans E_A.

$\boxed{\text{On a prouvé l'égalité } \mathrm{E}_\mathrm{A} =]\rho(\mathrm{A}), +\infty[.}$

Question 11. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on connaît l'inégalité $\rho(\mathrm{A}) \leqslant ||\mathrm{A}^k||^{1/k}$, qui découle de 10.a.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 10.b, la suite de matrices de terme général $\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\rho(\mathrm{A})+\varepsilon}\right)^k$ tend vers la matrice nulle. Il existe donc un entier $k_\varepsilon \geqslant 1$ tel que

$$\forall k \geqslant k_\varepsilon, \qquad \left|\left|\frac{\mathrm{A}^k}{(\rho(\mathrm{A})+\varepsilon)^k}\right|\right| \leqslant 1,$$

ce qui donne ensuite $||\mathrm{A}^k||^{1/k} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon$.

Récapitulons :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geqslant k_\varepsilon, \quad \rho(\mathrm{A}) \leqslant ||\mathrm{A}^k||^{1/k} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

$\boxed{\text{On a prouvé que la suite } (||\mathrm{A}^k||^{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \rho(\mathrm{A}).}$

Question 12. Introduisons les coefficients des matrices en présence

$$\mathrm{A}^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_+^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, notons I_k l'énoncé

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \left|a_{i,j}^{(k)}\right| \leqslant b_{i,j}^{(k)}.$$

L'énoncé I_1 est vrai par définition des $b_{i,j}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'énoncé I_k est vrai. Soit (i,j) un couple d'indices entre 1 et n. La formule du produit matriciel donne

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}a_{\ell,j}^{(k)}.$$

On applique l'inégalité triangulaire puis on utilise l'hypothèse I_k.

$$\left|a_{i,j}^{(k+1)}\right| \leqslant \sum_{ell=1}^{n} \underbrace{|a_{i,\ell}|}_{=b_{i,\ell}} \underbrace{\left|a_{\ell,j}^{(k)}\right|}_{\leqslant b_{\ell,j}^{(k)}} \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell}b_{\ell,j}^{(k)} = b_{i,j}^{(k+1)}.$$

L'énoncé I_{k+1} est prouvé.

Par récurrence, l'énoncé I_k est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Prenons maintenant k quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et considérons un indice j tel que $||\mathrm{A}^k|| = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_{i,j}^{(k)}\right|$. L'énoncé I_k donne

$$||\mathrm{A}^k|| \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}^{(k)} \leqslant ||\mathrm{A}_+^k|| \qquad \text{puis} \qquad ||\mathrm{A}^k||^{1/k} \leqslant ||\mathrm{A}_+^k||^{1/k}.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient l'inégalité $\boxed{\rho(\mathrm{A}) \leqslant \rho(\mathrm{A}_+).}$

Question 13. Encore un raisonnement par récurrence. Pour tout entier $k \geqslant 2$, notons J_k l'énoncé « Pour tout $(z_1,\ldots,z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ qui vérifie l'égalité $|z_1+\cdots+z_n| = |z_1|+\cdots+|z_n|$, le vecteur $(z_1,\ldots,z_n)$ est colinéaire à $(|z_1|,\ldots,|z_n|)$. »

Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$. Notons $r_1 = |z_1|$ et $r_2 = |z_2|$ et introduisons θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que

$$z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

Le calcul donne $|z_1+z_2|^2 = r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$ et $(|z_1|+|z_2|)^2 = r_1^2+r_2^2+2r_1r_2$. On en déduit que le produit $r_1r_2(1-\cos(\theta_1-\theta_2))=0$ est nul.

Si $r_1=0$, on a alors $(z_1,z_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}(|z_1|,|z_2|)$.

Si $r_2=0$, on a alors $(z_1,z_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(|z_1|,|z_2|)$.

Si $\cos(\theta_1-\theta_2)=0$, alors θ_1 et θ_2 sont congrus modulo 2π donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ donc $(z_1,z_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(|z_1|,|z_2|)$.

L'énoncé J_2 est prouvé.

Soit $k\geqslant 2$ pour lequel J_k est vrai. Prenons $(z_1,\dots,z_{n+1})$ tel que $|z_1+\dots+z_{k+1}|=|z_1|+\dots+|z_{k+1}|$.

Supposons dans un premier temps que z_{k+1} est nul, ce qui donne $|z_1+\dots+z_k|=|z_1|+\dots+|z_k|$. L'hypothèse J_k donne alors l'existence de $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $(z_1,\dots,z_k)=\lambda(|z_1|,\dots,|z_k|)$. La nullité de z_{k+1} donne alors $(z_1,\dots,z_{k+1})=\lambda(|z_1|,\dots,|z_{k+1}|)$.

Ce raisonnement se généralise au cas où au moins un des z_i est nul.

Supposons maintenant que tous les z_i sont non nuls.
L'inégalité triangulaire donne

$$|z_1+\dots+z_k+z_{k+1}|\leqslant|z_1+\dots+z_k|+|z_{k+1}|\leqslant|z_1|+\dots+|z_k|+|z_{k+1}|.$$

Ces trois nombres sont donc égaux, ce qui donne en particulier

$$|z_1+\dots+z_k|+|z_{k+1}|=|z_1|+\dots+|z_k|+|z_{k+1}| \qquad \text{donc} \qquad |z_1+\dots+z_k|=|z_1|+\dots+|z_k|.$$

L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $(z_1,\dots,z_k)=\lambda(|z_1|,\dots,|z_k|)$.

On peut aussi organiser l'inégalité triangulaire sous la forme

$$|z_1+z_2+\dots+z_{k+1}|\leqslant|z_1|+|z_2+\dots+z_{k+1}|\leqslant|z_1|+|z_2|+\dots+|z_{k+1}|$$

et en déduire l'égalité $|z_2+\ldots+z_{k+1}|=|z_2|+\dots+|z_{k+1}|$. L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe un $\mu\in\mathbb{C}$ tel que $(z_2,\dots,z_{k+1})=\mu(|z_2|,\dots,|z_{k+1}|)$.

Le fait que z_2 soit non nul donne $\lambda=z_2/|z_2|=\mu$ donc finalement $(z_1,\dots,z_{k+1})=\lambda(|z_1|,\dots,|z_{k+1}|)$.

L'énoncé J_{k+1} est prouvé. Par récurrence, l'énoncé J_k est vrai pour tout entier $k\geqslant 2$.

Question 14. Le produit ${}^t y\mathrm{A}x$ s'écrit de deux manières

$${}^t y\mathrm{A}x={}^t y\lambda x=\lambda\,{}^t yx \qquad \text{et} \qquad {}^t y\mathrm{A}x={}^t({}^t\mathrm{A}y)x={}^t(\mu y)x=\mu\,{}^t yx.$$

On en tire l'égalité $(\lambda-\mu)\,{}^t yx=0$ puis ${}^t yx=0$ car $\lambda\neq\mu$. On remarque enfin l'égalité ${}^t yx={}^t xy$, qui donne finalement $\boxed{{}^t xy=0.}$

Question 15.a. La récurrence est déjà initialisée par l'hypothèse $\mathrm{A}w\geqslant\mu w$.

Remarquons pour plus tard que le produit de deux matrices positives est une matrice positive. Idem avec une somme.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^k w\geqslant\mu^k w$. La colonne $\mathrm{A}^k w-\mu^k w$ est positive et la matrice A est positive donc la colonne $\mathrm{A}^{k+1}w-\mu^k\mathrm{A}w$ est positive. De même, la colonne $\mu^k(\mathrm{A}w-\mu w)$ est positive.
Par somme, la colonne $\mathrm{A}^{k+1}w-\mu^{k+1}w$ est positive, ce qui donne $\mathrm{A}^{k+1}\geqslant\mu^{k+1}w$.

$\boxed{\text{Par récurrence, l'inégalité } \mathrm{A}^k w\geqslant\mu^k w \text{ est valable pour tout } k\in\mathbb{N}^*.}$

Les vecteurs en présence sont à coefficients positifs. On en déduit l'inégalité $||\mathrm{A}^k w||_1 \geqslant \mu^k ||w||_1$ puis

$$\frac{||\mathrm{A}^k w||_1}{||w||_1} \geqslant \mu^k \qquad \text{puis} \qquad ||\mathrm{A}^k|| \geqslant \mu^k \qquad \text{et} \qquad ||\mathrm{A}^k||^{1/k} \geqslant \mu,$$

ce qui donne $\boxed{\rho(\mathrm{A}) \geqslant \mu}$ en faisant tendre k vers $+\infty$ (question 11).

Question 15.b. L'hypothèse $\mathrm{A}w > \mu w$ s'écrit

$$(\mathrm{A}w)_1 > \mu w_1 \quad \ldots \quad (\mathrm{A}w)_n > \mu w_n.$$

Notons λ le plus petit des nombres $(\mathrm{A}w)_i/w_i$ où i décrit l'ensemble (non vide) des indices tels que $w_i > 0$. On a alors $\mathrm{A}w \geqslant \lambda w$ et $\lambda > \mu$.

Le résultat de la question précédente donne $\rho(\mathrm{A}) \geqslant \lambda$ donc $\rho(\mathrm{A}) > \mu$.

Question 15.c. Soit un indice ℓ distinct de k. Le calcul donne

$$(\mathrm{A}w')_\ell - \mu w'_\ell = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j} w_j - \mu w_\ell}_{\geqslant 0} + \underbrace{a_{\ell,k}\varepsilon}_{>0} > 0.$$

Il reste un coefficient de $\mathrm{A}w' - \mu w'$ à étudier

$$(\mathrm{A}w')_k - \mu w'_k = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} w_j - \mu w_k}_{\text{noté } x_k} - (\mu - a_{k,k})\varepsilon.$$

Le nombre x_k vaut $(\mathrm{A}w)_k - w_k$. Il est donc strictement positif, ce qui permet de choisir $\varepsilon > 0$ de sorte que $x_k - (\mu - a_{k,k})\varepsilon > 0$, comme précisé ci-dessous.

Si $\mu - a_{k,k} \leqslant 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = 1$.

Si $\mu - a_{k,k} > 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = x_k/(2(\mu - a_{k,k}))$.

Pour un tel choix de ε, on a alors $\mathrm{A}w' > \mu w'$ et w' est un vecteur positif non nul donc $\rho(\mathrm{A}) > \mu$ d'après 15.b.

Question 16.a. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'égalité $(\mathrm{A}x)_i = \lambda x_i$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j| \geqslant |\lambda| \times |x_i| \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (v_0)_j \geqslant \rho(\mathrm{A})(v_0)_i.$$

C'est vrai pour tout indice i donc $\mathrm{A}v_0 \geqslant \rho(\mathrm{A})v_0$.

Si on suppose que cette inégalité n'est pas une égalité alors on est dans le cadre des hypothèses de la question 15.c avec $\mu = \rho(\mathrm{A})$ et $w = v_0$ donc $\rho(\mathrm{A}) > \rho(\mathrm{A})$, ce qui est absurde.

Cette absurdité prouve l'égalité $\boxed{\mathrm{A}v_0 = \rho(\mathrm{A})v_0.}$

Question 16.b. Soit k un indice tel que $x_k \neq 0$. On obtient alors les relations

$$\rho(\mathrm{A}) = \frac{(\mathrm{A}v_0)_k}{(v_0)_k} = \frac{1}{|x_k|} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} |x_j| \geqslant a_{k,k} > 0.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$(v_0)_i = \frac{(\mathrm{A}v_0)_i}{\rho(\mathrm{A})} = \frac{1}{\rho(\mathrm{A})} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \geqslant \frac{1}{\rho(\mathrm{A})} a_{i,k}|x_k| > 0.$$

$\boxed{\text{Toutes les coordonnées de } v_0 \text{ sont strictement positives.}}$

Question 16.c. L'inégalité triangulaire écrite à la question 16.a est finalement une égalité. En particulier, on a

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j|\,.$$

Le cas d'égalité de la question 13 donne donc l'existence de $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$(a_{1,1}x_1, \ldots, a_{1,n}x_n) = \mu(a_{1,1}|x_1|, \ldots, a_{1,n}|x_n|).$$

Les $a_{1,j}$ étant tous non nuls, il vient

$$(x_1, \ldots, x_n) = \mu(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Ainsi, le vecteur x est colinéaire à v_0. Ces vecteurs sont donc associés à la même valeur propre. Cela prouve l'égalité $\lambda = \rho(\mathrm{A})$.

Question 17.a. Soit $x \in \mathrm{F}$. Le calcul donne

$${}^t(\mathrm{A}x)w_0 = {}^t x\, {}^t\mathrm{A}w_0 = \rho(\mathrm{A})\, {}^t x w_0 = 0$$

donc $\mathrm{A}x$ appartient à F. Le sous-espace F est donc stable par φ_A.

Un autre calcul donne ${}^t v_0 w_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} (v_0)_i(w_0)_i > 0$ donc v_0 n'est pas dans F. La droite $\mathbb{C}v_0$ et F sont donc en somme directe.

Le sous-espace F est le noyau de $\varphi : x \mapsto {}^t x w_0$, application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas l'application nulle donc son rang vaut au moins 1 ; son image est incluse dans $\mathbb{C}$ et de dimension au moins 1 donc son image est $\mathbb{C}$. La formule du rang donne donc $\dim(\mathrm{F}) = n - 1$.

On en déduit l'égalité $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathbb{C}v_0) = \dim(\mathbb{C}^n)$. La somme de F et $\mathbb{C}v_0$ étant directe, on en déduit que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

Question 17.b. Soit μ une valeur propre de A telle que $\mu \neq \rho(\mathrm{A})$. Soit v un vecteur propre associé.
Le résultat de la question 14 donne ${}^t v w_0 = 0$ donc $v \in \mathrm{F}$.

Supposons que v ait tous ses coefficients réels et positifs (l'un d'entre eux au moins est alors strictement positifs). On obtient alors ${}^t v w_0 > 0$, ce qui est contradictoire.
Un tel vecteur propre ne peut donc être associé qu'à la valeur propre $\rho(\mathrm{A})$: l'énoncé (iii) est démontré.

Question 18.a. Soit $(v_2, \ldots, v_n)$ une base de F. La famille $\mathcal{V} = (v_0, v_2, \ldots, v_n)$ est alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\mathbb{C}v_0$ et F sont supplémentaires. La matrice de φ_A relativement à cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \rho(\mathrm{A}) & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix},$$

où B est la matrice de ψ relativement à la base $(v_2, \ldots, v_n)$ de F, d'où la factorisation $\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X} - \rho(\mathrm{A}))\chi_\psi$.

Aucun élément de F n'est à coordonnées strictement positives donc $\rho(\mathrm{A})$ n'est pas une valeur propre de ψ. Or les autres valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à $\rho(\mathrm{A})$ donc les racines de χ_ψ ont un module strictement inférieur à $\rho(\mathrm{A})$.

On en déduit que $\rho(\mathrm{A})$ est une racine de multiplicité 1 de χ_{A}.

On connaît l'encadrement $1 \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \rho(\mathrm{A})\mathrm{I}_n)) \leqslant \mathrm{mult}(\rho(\mathrm{A}), \mathrm{A}) = 1$. On en déduit que l'espace propre de A relatif à la valeur propre $\rho(\mathrm{A})$ est de dimension 1 : c'est la droite dirigée par v_0.

Question 18.b. Le raisonnement de la question précédente donne $\rho(\psi) < \rho(\mathrm{A})$ donc $\rho(\psi/\rho(\mathrm{A})) < 1$ en exploitant 7.i.

Le résultat de la question 9 permet d'en déduire que la suite de terme général $(\psi/\rho(\mathrm{A}))^k$ converge vers l'endomorphisme nul de F.

Soit $x \in \mathrm{F}$. L'application linéaire $f \mapsto f(x)$, définie de $\mathcal{L}(\mathrm{F})$ vers F, est continue donc la suite de vecteurs de terme général $\psi/\rho(\mathrm{A}))^k(x)$ converge vers le vecteur nul de F.

En d'autres termes, la suite de vecteurs $(\mathrm{A}^k x/\rho(\mathrm{A})^k)_{k\geqslant 1}$ converge vers le vecteur nul.

Question 18.c. Le vecteur x admet une décomposition (unique) sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \mathrm{F}, \quad x_2 \in \mathbb{C}v_0.$$

Notons α le nombre complexe tel que $x_2 = \lambda v_0$. On obtient alors

$${}^t x w_0 = \underbrace{{}^t x_1 w_0}_{=0} + \lambda \underbrace{{}^t v_0 w_0}_{>0} \qquad \text{donc} \qquad \lambda = \frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le calcul donne

$$\frac{\mathrm{A}^k x}{\rho(\mathrm{A})^k} = \frac{\mathrm{A}^k x_1}{\rho(\mathrm{A})^k} + \frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} v_0.$$

Quand k tend vers $+\infty$, on obtient pour limite le vecteur $\dfrac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} v_0$, qui est le projeté de x sur $\mathbb{C}v_0$ parallèlement à F.

Le fait que x soit positif et non nul donne $\dfrac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} > 0$, ce qui achève de démontrer (iv).
