Réduction et espaces vectoriels normés

DS n°3

4 heures

par David Blottière, le 10 novembre 2023 à 04h50

Les étudiants de MPI et de MPI* composent tous cet unique problème.

Dans le problème, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n.

$\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$) désigne l'espace des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbf{C}$ (resp. dans $\mathbf{R}$). La matrice transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ est notée $M^\top$.

$\mathbf{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbf{C}$. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbf{C}^n$ sont notés $x_1, \ldots, x_n$. Dans tout le problème, $\mathbf{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Pour tous $x \in \mathbf{C}^n$ et $y \in \mathbf{C}^n$, la matrice $x^\top y \in \mathcal{M}_1(\mathbf{C})$ est identifiée au nombre complexe $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ engendré par un vecteur $v \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ est noté $\mathbf{C}v$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont des réels positifs (resp. strictement positifs). Cette propriété est notée $M \geqslant 0$ (resp. $M > 0$).

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, on notera $A \geqslant B$ (resp. $A > B$) la propriété $A - B \geqslant 0$ (resp. $A - B > 0$). Ainsi, pour x et y dans $\mathbf{R}^n$,

$$x \geqslant y \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geqslant y_i.$$

Lorsque $m = n$, on utilisera la notation $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (resp $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) pour $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ (resp $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$).

La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$$

sera notée $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On note $I_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ la matrice identité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbf{C}^n,\ \|x\|_1 = 1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \qquad (1)$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sera en général identifiée à l'endomorphisme φ_M de $\mathbf{C}^n$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$: pour $x \in \mathbf{C}^n$, $\varphi_M(x) = Mx$. On appelle spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et on note $\mathrm{Sp}(M)$, l'ensemble des valeurs propres de M. Le rayon spectral de M, noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}.$$

Première partie

1. a) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence :

$$\|M\| \leqslant C \iff \forall x \in \mathbf{C}^n, \quad \|Mx\|_1 \leqslant C\|x\|_1.$$

b) Montrer que l'application $M \longmapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j. Montrer que :

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

4. On dit qu'une suite $\left(A^{(k)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ lorsque :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{k \to +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite $\left(A^{(k)}\right)$ converge vers B si et seulement si $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| A^{(k)} - B \right\| = 0$.

5. On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \mathrm{diag}\left(1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

a) Calculer $P_b^{-1} A P_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que :

$$\left\| P_b^{-1} A P_b \right\| < 1.$$

c) En déduire que la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

Deuxième partie

6. Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\mu \in \mathbf{C}$.

i) $\rho(\mu A) = |\mu|\rho(A)$

ii) $\rho(A+B) \leqslant \rho(A) + \rho(B)$.

iii) $\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)$.

iv) Pour $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ inversible, $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

v) $\rho\left(A^\top\right) = \rho(A)$.

8. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

*Dans les questions **9** à **11**, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.*

9. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

10. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\left|\left| A^k \right|\right| \geqslant \rho(A)^k$.

b) On définit la partie de $\mathbf{R}_+$:

$$E_A = \left\{ \alpha > 0 \,:\, \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0 \right\}.$$

Montrer que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

11. Montrer la formule :

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\left| A^k \right|\right|^{1/k} = \rho(A).$$

12. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de coefficients $a_{i,j}$, on pose $A_+ = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où $b_{i,j} = |a_{i,j}|$. Montrer l'inégalité :

$$\rho(A) \leqslant \rho(A_+).$$

Troisième partie

*Dans toute cette partie, A est une matrice **strictement positive** de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*
On se propose de démontrer les propriétés suivantes.

(i) *$\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre de A et toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho(A)$.*

(ii) *$\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et $\mathrm{Ker}(A - \rho(A)I_n)$ est engendré par un vecteur v_0 dont toutes les composantes sont strictement positives.*

(iii) *Si v est un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont positives, alors $v \in \mathrm{Ker}(A - \rho(A)I_n)$.*

(iv) *Pour tout vecteur positif non nul x, il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = c v_0$.*

13. Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que si :

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.

14. Soient $x, y \in \mathbf{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors on a l'implication suivante :

$$\left(Ax = \lambda x \text{ et } A^\top y = \mu y\right) \Longrightarrow x^\top y = 0.$$

15. On suppose qu'il existe un réel positif μ et un vecteur positif non nul w tels que $Aw \geqslant \mu w$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k w \geqslant \mu^k w$. En déduire que $\rho(A) \geqslant \mu$.

b) Montrer que si $Aw > \mu w$, alors $\rho(A) > \mu$.

c) On suppose à présent que dans le système d'inégalités $Aw \geqslant \mu w$, la k-ième inégalité est stricte, c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} w_j > \mu w_k.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, en posant $w'_j = w_j$ si $j \neq k$ et $w'_k = w_k + \varepsilon$, on a $Aw' > \mu w'$. En déduire que $\rho(A) > \mu$.

16. Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et soit $x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ. On définit le vecteur positif non nul v_0 par $(v_0)_i = |x_i|$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

a) Montrer que $Av_0 \geqslant \rho(A) v_0$, puis que :

$$Av_0 = \rho(A) v_0.$$

b) En déduire que $\rho(A) > 0$ et :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (v_0)_i > 0.$$

c) Montrer que x est colinéaire à v_0. En déduire que $\lambda = \rho(A)$.

La propriété (i) est démontrée.

17. En appliquant les résultats précédents à la matrice $A^\top$, on obtient l'existence de $w_0 \in \mathbf{R}^n$, dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que $A^\top w_0 = \rho(A) w_0$. On pose :

$$F = \left\{x \in \mathbf{C}^n \ : \ x^\top w_0 = 0\right\}.$$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ stable par φ_A et que :

$$C^n = F \oplus \mathbf{C} v_0.$$

b) Montrer que si v est un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\mu \neq \rho(A)$, alors $v \in F$. En déduire la propriété *(iii)*.

18. a) On note ψ l'endomorphisme de F défini comme la restriction de φ_A à F. Montrer que toutes les valeurs propres de ψ sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et que :

$$\operatorname{Ker}(A - \rho(A) I_n) = \mathbf{C} v_0.$$

La propriété (ii) est démontrée.

b) Montrer que si $x \in F$, $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = 0$.

c) Soit x un vecteur positif non-nul. Déterminer la limite de $\dfrac{A^k x}{\rho(A)^k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

La propriété (iv) est démontrée.