# Algèbre linéaire et réduction I

DS n°2

4 heures

par David Blottière, le 9 octobre 2023 à 05h13

**Les étudiants de MPI résolvent l'exercice 1 et le problème.**

**Les étudiants de MPI* résolvent l'exercice 2 et le problème.**

## Exercice 1 — Racines carrées et puissances de matrices (MPI)

Dans ce problème, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Q1. —** Démontrer que $A$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

• Des valeurs propres à vue — Puisque :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le scalaire 7 est valeur propre de $A$ et $f_1 := (1,1,1)^\top \in E_7(A)$.
De plus, on observe que $\mathrm{Rg}(A - I_3) = 1$. Ainsi 1 est valeur propre de $A$ et $E_1(A)$.

• Conclusion avec théorie et comptage — Comme les sous-espaces propres de $A$ sont en somme directe $E_7(A) \oplus E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension au moins 3 dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Nous en déduisons :

- $E_7(A) \oplus E_1(A) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et donc $A$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ ;
- $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A) = \{7, 1\}$ ;
- $\dim(E_7(A)) = 1$ et donc $(f_1)$ est une base de $E_7(A)$.

■

**Q2. —** Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

• Une application linéaire — Introduisons $a$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ défini par :

$$a \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

de sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(a) = A$, où $\mathscr{B}_0$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

• Une base de vecteurs propres — Nous résolvons le système linéaire :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + y + z = 0$$

d'inconnue $(x,y,z)^\top \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ pour obtenir que :

$$\left( f_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une famille génératrice de $E_1(A)$, donc une base (famille génératrice de cardinal minimal).
Puisque $E_7(A) \oplus E_1(A) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, la famille $\mathscr{B} := (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

• Conclusion avec le théorème de changement de base — D'après le théorème de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(a) = P_{\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) \times P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_0}.$$

identité qui se réécrit :

$$A = P \times D \times P^{-1} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

**Q3.** — Déterminer une matrice $B$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$.

• Une racine carrée de $D$ — Posons :

$$\Delta := \mathrm{Diag}\left(\sqrt{7}, 1, 1\right) \qquad \left[\text{une autre matrice du type } \mathrm{Diag}\left(\pm\sqrt{7}, \pm 1, \pm 1\right) \text{ aurait convenu}\right]$$

de sorte que $\Delta^2 = D$.

• Une racine carrée de $A$ — Posons :

$$B := P \times \Delta \times P^{-1}$$

de sorte que :

$$B^2 = \left(P \times \Delta \times P^{-1}\right)^2 = P \times \Delta^2 \times P^{-1} = P \times D \times P^{-1} = A.$$

• Calculs explicites de $P^{-1}$ et de $B$ — Pour finir, nous calculons :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2+\sqrt{7} & \sqrt{7}-1 & \sqrt{7}-1 \\ \sqrt{7}-1 & 2+\sqrt{7} & \sqrt{7}-1 \\ \sqrt{7}-1 & \sqrt{7}-1 & 2+\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

■

**Q4.** — Déterminer, pour tout entier naturel non nul $n$, les 9 coefficients de la matrice $A^n$, en utilisant la matrice de passage $P$.

• Des puissances de $A$ au puissances de $D$ — Au moyen d'un raisonnement par récurrence (dussions-nous le rédiger ?), nous établissons :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad A^n = \left(P \times D \times P^{-1}\right)^n = P \times D^n \times P^{-1} = P \times \mathrm{Diag}\left(7^n, 1, 1\right) \times P^{-1}.$$

• Calculs explicites des puissances de $A$ — Au moyen de l'expression de $P^{-1}$ déterminée en Q4, nous calculons :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2+7^n & 7^n-1 & 7^n-1 \\ 7^n-1 & 2+7^n & 7^n-1 \\ 7^n-1 & 7^n-1 & 2+7^n \end{pmatrix}.$$

■

**Q5. —** Donner le polynôme minimal de la matrice $A$ et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice $A^n$ comme une combinaison linéaire des matrices $A$ et $I_3$.

• Polynôme caractéristique de $A$ — Comme $A$ et $D$ sont semblables :

$$\chi_A = \chi_D = (X-7)\times(X-1)^2.$$

• Restriction du champ des possibles pour $\mu_A$ — D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mu_A$ est un diviseur unitaire non constant de $\chi_A$. Puisque tout polynôme de $\mathbf{R}[X]$ se décompose essentiellement d'une unique manière en produit d'irréductibles, il vient :

$$\mu_A \in \left\{X-7\,,\ X-1\,,\ (X-1)^2\,,\ (X-7)\times(X-1)\,,\ (X-7)\times(X-1)^2\right\}.$$

Puisque $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(\mu_A) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(\chi_A)$, 7 et 1 divisent $\mu_A$. Ainsi :

$$\mu_A \in \left\{(X-7)\times(X-1)\,,\ (X-7)\times(X-1)^2\right\}.$$

• Conclusion quant au polynôme minimal de $A$ — Comme les matrices $A$ et $D$ sont semblables, elles ont mêmes polynômes annulateurs. Nous calculons :

$$((X-7)\times(X-1))\,(D) = \mathrm{Diag}\,(0,-6,-6)\times \mathrm{Diag}\,(6,0,0) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbf{R})}.$$

pour en déduire $\mu_A = (X-7)\times(X-1)$.

*Remarque. Nous démontrerons bientôt que, comme $A$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, $\mu_A$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, ce qui restreint le champ des possibles au polynôme $(X-7)\times(X-1)$, évitant ainsi tout calcul.*

• Division euclidienne d'un monôme par $\mu_A$ — Soit $n\in\mathbf{N}$. La division euclidienne de $X^n$ par $\mu_A$ s'écrit :

$$X^n = \mu_A\times Q_n + a_n\cdot X + b_n \quad \text{où} \quad (Q_n, a_n, b_n)\in \mathbf{R}[X]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}.$$

Spécialisant $X \leftarrow 7$ et $X\leftarrow 1$, il vient :

$$\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7^n\\ 1\end{pmatrix}$$

puis :

$$a_n = \frac{1}{6}\cdot\left(7^n-1\right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{6}\cdot\left(7-7^n\right).$$

Ainsi :

$$(\star)\qquad X^n = \mu_A\times Q_n + \frac{1}{6}\cdot\left(7^n-1\right)\cdot X + \frac{1}{6}\cdot\left(7-7^n\right).$$

• Expression des puissances de $A$ comme combinaison linéaire de $A$ et $I_n$ — De $(\star)$ et de $\mu_A(A) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbf{R})}$, nous déduisons :

$$A^n = \frac{1}{6}\cdot\left(7^n-1\right)\cdot A + \frac{1}{6}\cdot\left(7-7^n\right)\cdot I_n.$$

■

## EXERCICE 2 — CLASSES DE SIMILITUDE DE PARTIES DE $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (MPI*)

Soit un entier $n\geqslant 2$.

**Q6. —** Déterminer le nombre de classes d'équivalence de la relation de similitude sur :

$$\mathscr{S} := \left\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\ :\ A^2 = I_n\right\}.$$

• Remarque liminaire — L'ensemble $\mathscr{S}$ est stable par conjugaison, i.e. :

$$\forall A \in \mathscr{S}, \quad \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \quad P \times A \times P^{-1} \in \mathscr{S}$$

La relation de similitude $\sim_{\mathbf{R}}$ sur $\mathscr{S}$ est donc bien définie. Si $A \in \mathscr{S}$, nous noterons $\overline{A}$ sa classe de conjugaison, qui est sa classe d'équivalence pour la relation $\sim_{\mathbf{R}}$.

• Les matrices de $\mathscr{S}$ sont des matrices de symétries vectorielles — Soit $A \in \mathscr{S}$. Choisissons $E$ notre $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ préféré, $\mathscr{B}$ une base de ce dernier et considérons $a$ l'endomorphisme de $E$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = A$. De $A^2 = I_n$, nous déduisons $a^2 = \mathrm{id}_E$. D'après le cours sur les symétries vectorielles :

$$\mathrm{Ker}\,(a - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(a + \mathrm{id}_E) = E.$$

Grâce à cette décomposition de $E$ en somme directe, nous pouvons construire une base $\mathscr{C}$ de $E$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(a) \in \left\{ \underbrace{-I_n}_{D(0)}, \underbrace{I_n}_{D(n)} \right\} \sqcup \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}}_{D(r)} \;:\; r \in [\![1, n-1]\!] \right\}.$$

Les matrices $D(0), \dots, D(n)$ appartiennent toutes à $\mathscr{S}$. Avec le théorème de changement de base, nous obtenons qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que :

$$A = P \times D(r) \times P^{-1} \quad \text{où} \quad P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

donc $A \sim_{\mathbf{R}} D(r)$, i.e. $\overline{A} = \overline{D(r)}$.

• Décomposition de l'ensemble quotient et nombre de classes — D'après ce qui précède, l'ensemble quotient $\mathscr{S} / \sim_{\mathbf{R}}$ de $\mathscr{S}$ pour la relation d'équivalence $\sim_{\mathbf{R}}$ se décompose en :

$$\mathscr{S} / \sim_{\mathbf{R}} = \left\{ \overline{D(r)} \;:\; r \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

Si $r_1$ et $r_2$ sont deux éléments distincts de $[\![0, n]\!]$ alors :

$$\chi_{D(r_1)} = (X-1)^{r_1} \times (X+1)^{n-r_1} \neq \chi_{D(r_2)} = (X-1)^{r_2} \times (X+1)^{n-r_2}$$

et donc les matrices $D(r_1)$ et $D(r_2)$ ne sont pas semblables ou encore les classes $\overline{D(r_1)}$ et $\overline{D(r_2)}$ sont distinctes. Nous en déduisons :

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{S} / \sim_{\mathbf{R}}) = n + 1.$$

■

**Q7.** — Démontrer qu'une matrice non nulle de :

$$\mathscr{N} := \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; A^2 = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})} \right\}$$

est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r$ est un entier à préciser. En déduire le nombre de classes d'équivalence de la relation de similitude sur $\mathscr{N}$.

• Remarque liminaire — L'ensemble $\mathscr{N}$ est stable par conjugaison, i.e. :

$$\forall A \in \mathscr{N}, \quad \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \quad P \times A \times P^{-1} \in \mathscr{N}$$

La relation de similitude $\sim_{\mathbf{R}}$ sur $\mathscr{N}$ est donc bien définie. Si $A \in \mathscr{N}$, nous noterons $\overline{A}$ sa classe de conjugaison, qui est sa classe d'équivalence pour la relation $\sim_{\mathbf{R}}$.

• Introduction d'un endomorphisme : construction d'une base plutôt que d'une matrice inversible — Soit $A$ une matrice non nulle de $\mathscr{N}$. Choisissons $E$ notre $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ préféré, $\mathscr{B}$ une base de ce dernier et considérons $a$ l'endomorphisme de $E$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = A$. De $A^2 = 0$, nous déduisons $a^2 = 0$, i.e. $\mathrm{Im}\,(a) \subset \mathrm{Ker}\,(a)$.

• Reformulation de la question posée en termes de base — D'après le théorème de changement de base (cf. question précédente pour plus de détails), si nous déterminons un entier $r$ et une base $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_{n-r}, x_1, \ldots, x_r)$ de $E$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, nous pourrons conclure que :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) \sim_{\mathbf{R}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathscr{C}$ de $E$ doit donc satisfaire les conditions :

i. les vecteurs $e_1, \ldots, e_{n-r}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(a)$ ;

ii. les vecteurs $e_1 = a(x_1), \ldots, e_r = a(x_r)$ engendrent $\mathrm{Im}(a)$ ;

et l'entier $r$ est le rang de $a$. De $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Ker}(a)$ et du théorème du rang nous déduisons $r \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$.

• Construction d'une base idoine — Posons $r := \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(a) \in [\![1, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(a)$.
Complétons la famille libre $(e_1, \ldots, e_r)$ de vecteurs $\mathrm{Ker}(a)$ en une base $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ (cf. théorème du rang pour le nombre de vecteurs) de $\mathrm{Ker}(a)$.
Notons, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $t_i$ un vecteur de $E$ tel que $a(x_i) = e_i$ et démontrons que la famille :

$$\mathscr{C} := (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{n-r}, x_1, \ldots, x_r)$$

de $n$ vecteurs de $E$ est une base de $E$. Par cardinalité-dimension, il suffit de prouver que la famille $\mathscr{C}$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}, \mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \cdot e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \cdot x_j = 0_E$$

En appliquant $a$, il vient :

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \cdot e_j = 0_E$$

puis, comme la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre, $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$. Alors $(\star)$ et la liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ livrent $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$.

• Conclusion de la première question — Par construction de la base $\mathscr{C}$ de $E$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par théorème de changement de base $A \sim_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Décomposition de l'ensemble quotient et nombre de classes — Les matrices $T(0) := 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$ et, pour tout $r \in [\![1, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, $T(r) := \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ appartiennent toutes à $\mathscr{S}$ ($r \leqslant n/2$ est ici essentiel).
Nous déduisons de ce qui précède que l'ensemble quotient $\mathscr{N} / \sim_{\mathbf{R}}$ de $\mathscr{N}$ pour la relation d'équivalence $\sim_{\mathbf{R}}$ se décompose en :

$$\mathscr{N} / \sim_{\mathbf{R}} = \left\{ \overline{T(r)} \;:\; r \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!] \right\}.$$

Si $r_1$ et $r_2$ sont deux éléments distincts de $[\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$ alors :

$$\mathrm{Rg}(T(r_1)) = r_1 \neq r_2 = \mathrm{Rg}(T(r_2))$$

et donc les matrices $T(r_1)$ et $T(r_2)$ ne sont pas équivalentes et, a fortiori, non semblables. Les classes $\overline{T(r_1)}$ et $\overline{T(r_2)}$ sont donc distinctes. Nous en déduisons :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{N} / \sim_{\mathbf{R}}) = \lfloor n/2 \rfloor + 1.$$

■

**Q8. —** Démontrer que deux matrices $A, B$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$ tel que $A \sim_{\mathbf{C}} B$, i.e. tel qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $A = P \times B \times P^{-1}$. Nous en déduisons que :

$$A \times P = P \times B$$

ou encore :

$$A \times (R + i \cdot S) = (R + i \cdot S) \times B \quad \text{où } R := \mathrm{Re}(P) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \text{ et } S := \mathrm{Im}(P) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

Comme les matrices $A$ et $B$ sont à coefficients réels, il vient :

$$A \times R = R \times B \quad \text{et} \quad A \times S = S \times B$$

puis, pour tout $t \in \mathbf{R}$ :

$$A \times Q(t) = Q(t) \times B \quad \text{où } Q(t) := R + t \cdot S \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

Pour conclure que $A \sim_{\mathbf{R}} B$, il suffit d'établir qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $Q(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Pour ce faire, raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Det}(Q(t)) = 0$. Alors la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Det}(R + z \cdot S) \end{array} \right.$$

qui est polynomiale en $z$ (le déterminant d'une matrice est polynomiale en les coefficients d'icelle), s'annule sur $\mathbf{R}$ (ensemble infini). Elle est donc identiquement nulle et :

$$0 = f(i) = \mathrm{Det}(R + i \cdot S) = \mathrm{Det}(P)$$

ce qui n'est pas. ■

**Q9. —** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}$. Démontrer que $\mathbf{C}^n = \mathrm{Ker}\,(u + i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n})$.

• Reformulation de la question posée — Il nous faut établir que :

$$\forall\, x \in \mathbf{C}^n, \quad \exists!\,(y,z) \in \mathrm{Ker}\,(u + i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}) \times \mathrm{Ker}\,(u - i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}) \quad x = y + z.$$

Ne disposant pas encore du lemme des noyaux, qui serait fort utile ici puisque :

$$X^2 + 1 = (X - i) \times (X + i) \qquad \text{et} \qquad (X + i) \wedge (X - i) = 1,$$

nous fixons donc $x \in \mathbf{C}^n$ et raisonnons par analyse-synthèse.

• Analyse — Supposons qu'il existe $(y,z) \in \mathrm{Ker}\,(u + i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}) \times \mathrm{Ker}\,(u - i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n})$ tel que :

$$(L1) \qquad x = y + z$$

En appliquant $u$, il vient :

$$(L2) \qquad u(x) = -i \cdot y + i \cdot z$$

En combinant $(L1)$ et $(L2)$, on trouve nécessairement que :

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{i}{2} \cdot u(x) \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{i}{2} \cdot u(x).$$

Les deux candidats obtenus en fin d'analyse étant uniques, la décomposition cherchée est unique, si elle existe.

• Synthèse — Vérifions si les deux candidats trouvés en fin d'analyse conviennent.

i. Clairement $y + z = x$.

ii. Vérifions si $u(y) = -i \cdot y$. Nous calculons, grâce à $u^2 = -\mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}$ :

$$u(y) = u\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{i}{2} \cdot u(x)\right) = \frac{1}{2} \cdot u(x) + \frac{i}{2} \cdot u^2(x) = \frac{1}{2} \cdot u(x) - \frac{i}{2} x = -i \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{i}{2} \cdot u(x)\right) = -i \cdot y.$$

iii. De manière analogue, nous établissons que $u(z) = i \cdot z$.

■

**Q10. —** Démontrer que :

$$\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \,:\, A^2 = -I_n\}$$

est non vide si et seulement si $n$ est pair.

• Implication directe — Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{A}$. Alors :

$$\mathrm{Det}(A)^2 = (-1)^n$$

et comme $\mathrm{Det}(A) \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Det}(A)^2 \geqslant 0$. Donc $n$ est pair.

• Implication réciproque — Supposons $n$ pair. Alors la matrice diagonale par blocs, constituée de $n/2$ blocs $(2,2)$ :

$$\mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

appartient à $\mathscr{A}$. ■

**Q11. —** On suppose $n$ pair. Démontrer que la relation de similitude sur $\mathscr{A}$ possède une unique classe d'équivalence, celle de la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

• Remarque liminaire — L'ensemble $\mathscr{A}$ est stable par conjugaison, i.e. :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \quad P \times A \times P^{-1} \in \mathscr{A}$$

La relation de similitude $\sim_{\mathbf{R}}$ sur $\mathscr{A}$ est donc bien définie.

• Reformulation de la question — Nous avons déjà observé que la matrice diagonale par blocs $R$ définie par :

$$R := \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

appartient à $\mathscr{A}$. Il nous faut établir que :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad A \sim_{\mathbf{R}} R.$$

• Réduction d'une matrice de $\mathscr{A}$ sur $\mathbf{C}$ — Soit $A \in \mathscr{A}$. Nous notons $a$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à $A$. Puisque $A^2 = -I_n$, $a^2 = -\mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}$. D'après la question précédente :

$$\mathbf{C}^n = \mathrm{Ker}\,(u + i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n})$$

et donc $a$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ avec $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(a) \subset \{-i, i\}$. Nous en déduisons que, si $p := \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u + i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}))$, alors :

$$\chi_a = \chi_A = (X - i)^p \times (X + i)^{n-p}.$$

Comme $A$ est à coefficients réels, $\chi_A \in \mathbf{R}[X]$ et donc :

$$\chi_A = \overline{\chi_A} = \overline{(X - i)^p \times (X + i)^{n-p}} = (X + i)^p \times (X - i)^{n-p}.$$

Par unicité de la décomposition de $\chi_A$ comme produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, il vient $p = n - p$ et donc $p = n/2$. Puisque $A$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ :

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\,(u + i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n})) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u - i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n})) = n/2.$$

Ainsi :

$$A \sim_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} -i \cdot I_{n/2} & 0 \\ 0 & i \cdot I_{n/2} \end{pmatrix}.$$

• Conclusion — D'après la question précédente :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad A \sim_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} -i \cdot I_{n/2} & 0 \\ 0 & i \cdot I_{n/2} \end{pmatrix} \sim_{\mathbf{C}} R$$

et donc :

$$\forall\, A \in \mathscr{A}, \quad A \sim_{\mathbf{C}} R.$$

Enfin, comme $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, la question 8 livre :

$$\forall\, A \in \mathscr{A}, \quad A \sim_{\mathbf{R}} R.$$

■

# PROBLÈME — MATRICES QUASI-NILPOTENTES (MPI-MPI*)

## § NOTATIONS

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Étant donnés deux entiers naturels $n$ et $p$ non nuls, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position $(i, j)$ et de valeur 1. La transposée d'une matrice $M$ sera notée $M^\top$.

Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.

On note $S_n(\mathbf{K})$, $A_n(\mathbf{K})$ et $T_n^{++}(\mathbf{K})$ les sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour $x$ et $y$ deux entiers,

$$\Delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 1** — *Etant donné un entier naturel non nul $n$, un sous-espace vectoriel $V$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et un élément $j$ de $[\![1, n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de $V$ dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la $j$-ème.*

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{K})$ avec $n \geqslant 2$, on notera $K(M) \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$, $R(M) \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbf{K})$, $L(M) \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ et $a(M) \in \mathbf{K}$ la décomposition de $M$ en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right) \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : M_n(\mathbf{K}) \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : M_n(\mathbf{K}) \to \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$, évidemment linéaires.

## § THÉORÈME SPECTRAL

On pourra appliquer le théorème suivant, admis aujourd'hui, mais démontré plus tard dans l'année.

**Théorème (spectral)** — Pour toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $S = P\,D\,P^\top$.

## § OBJECTIFS

**Définition 2** — *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que $A$ est* **quasi-nilpotente** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbf{K}$. Une partie $V$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite* **quasi-nilpotente** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énoncé comme suite.

**Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents)** — *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent $N$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a*

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \tag{$QN$}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.

**Lemme (Lemme des colonnes)** — *Pour tout sous-espace vectoriel $V$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément $j$ de $[\![1,n]\!]$ tel que $C_j(V)=\{0\}$.*

## § A. EXEMPLES

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**Q12.** — Montrer que la matrice $D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ ?

Le polynôme caractéristique de $D$ est

$$\chi_D = X^2+1$$

Il n'a aucune racine réelle et le spectre réel de $D$ est vide. En particulier $D$ n'a aucune valeur propre réelle non nulle et $D$ est $\mathbf{R}$-quasi-nilpotente.
Le spectre complexe de $D$ est $\{i,-i\}$ et contient au moins un élément non nul donc $D$ n'est pas $\mathbf{C}$-quasi-nilpotente. ■

**Q13.** — Montrer que la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$.

Le polynôme caractéristique de $B$ est

$$\chi_B = X^2-\operatorname{Tr}(B)X+\operatorname{Det}(B)=X^2$$

Ainsi, le spectre complexe de $B$ est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul. $B$ est $\mathbf{C}$-quasi-nilpotente. ■

**Q14.** — Montrer que $S_n(\mathbf{K})$, $A_n(\mathbf{K})$ et $T_n^{++}(\mathbf{K})$ sont des sous-esapces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que la dimension de $S_n(\mathbf{K})$ est $n(n+1)/2$.

$S_n(\mathbf{K})$ est le noyau de l'application linéaire :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M-M^\top \end{array}\right.$$

donc est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
$A_n(\mathbf{K})$ est le noyau de l'application linéaire :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M-M^\top \end{array}\right.$$

donc est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$..
Comme

$$T_n^{++}(\mathbf{K})=\operatorname{Vect}\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
Montrons que

$$S_n(\mathbf{K})=\operatorname{Vect}\left((E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\,\#\,(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$$

- L'inclusion réciproque est vraie car les $E_{i,j}+E_{j,i}$ et $E_{i,i}$ sont symétriques et car $S_n(\mathbf{K})$ est un sous-espace.
- Soit $S\in S_n(\mathbf{K})$. On a

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i})+\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}E_{i,i}\in\operatorname{Vect}\left((E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n},(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$$

  On a donc aussi l'inclusion directe.

On remarque ensuite que la famille $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n} \# (E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre (on considère une combinaison linéaire nulle et on a immédiatement la nullité des coefficients, en s'appuyant sur le caractère libre de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$). Il reste alors à compter le nombre des éléments de cette famille qui est une base de $S_n(\mathbf{K})$ :

$$\dim(S_n(\mathbf{K})) = \sum_{i=1}^{n}(n-i)+n = \frac{n(n-1)}{2}+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

**Q15. —** Montrer que $T_n^{++}(\mathbf{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Vérifier que

$$\dim\left(T_n^{++}(\mathbf{K})\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc :

$$\forall T \in T_n^{++}(\mathbf{K}),\ \mathrm{Sp}(T) = \{0\}.$$

Ceci montre que $T_n^{++}(\mathbf{K})$ est quasi-nilpotent. D'après la question précédente,

$$T_n^{++}(\mathbf{K}) = \mathrm{Vect}\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right).$$

La famille $\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)$ étant libre (sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$), c'est une base de $T_n^{++}(\mathbf{K})$ et

$$\dim\left(T_n^{++}(\mathbf{K})\right) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

■

**Q16. —** Soit $A \in A_n(\mathbf{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X^\top AX = 0$. En déduire que $A_n(\mathbf{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Notons que si $X, Y \in M_{n,1}(\mathbf{R})$, $X^\top Y$ peut s'interpréter comme le produit scalaire $\langle X, Y\rangle$ de $X$ et $Y$ vus comme éléments de $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $A \in A_n(\mathbf{R})$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$. On a :

$$X^\top AX = \langle X, AX\rangle = \langle AX, X\rangle = (AX)^\top X = X^\top A^\top X = -X^\top AX$$

On en déduit donc que $X^\top AX = 0$. En particulier, si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur propre associé alors :

$$0 = X^\top AX = \lambda\|X\|^2$$

et comme $X \neq 0$ (vecteur propre), $\lambda = 0$. Ainsi 0 est donc la seule valeur propre réelle possible pour $A$. On a montré que $A_n(\mathbf{R})$ est quasi-nilpotent. ■

**Q17. —** Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que

$$A_n(\mathbf{R}) = \{PMP^{-1} \ :\ M \in T_n^{++}(\mathbf{R})\}$$

*Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice $D$ introduite en Q1.*

Comme $n \geqslant 2$, on peut consdérer la matrice $M$ définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$. On a :

$$\chi_M = X^{n-2}\times\chi_D = X^{n-2}\times(X^2+1)$$

et le spectre complexe de $M$ est soit égal à $\{i,-i\}$ (cas $n=2$) soit égal à $\{0,i,-i\}$ (cas $n \geqslant 3$). Si, par l'absurde, il existait une matrice $P$ comme dans l'énoncé, $M$ serait semblable dans $\mathbf{R}$ à un élément de $T_n^{++}(\mathbf{R})$ et donc à

une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe. La similitude dans $\mathbf{R}$ entraînant immédiatement celle dans $\mathbf{C}$ ($\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$) et le spectre étant un invariant de similitude, on obtient une contradiction.
Il n'existe donc pas de $P$ comme dans l'énoncé. ■

## § B. CAS RÉEL

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul.

**Q18. —** Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Le résultat obtenu tient-il si on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$ ?

Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$. $S$ est alors diagonalisable (théorème spectral). Si 0 est sa seule valeur propre réelle possible, $S$ est alors semblable à une matrice diagonale nulle et est donc nulle.
Réciproquement, la matrice nulle de en format $(n,n)$ est symétrique et quasi-nilpotente.
La matrice nulle est ainsi la seule matrice symétrique quasi-nilpotente.
La question 13 montre que le résultat est faux dans le cas complexe (on a trouvé une matrice symétrique complexe quasi-nilpotente qui n'est pas nulle). ■

**Q19. —** Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Déduire de la question précédente que

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbf{R})$. D'après la question précédente $V \cap S_n(\mathbf{R}) = \{0\}$ et donc $V$ et $S_n(\mathbf{R})$ sont en somme directe. Ainsi

$$\dim(V) \leqslant \dim(M_n(\mathbf{R})) - \dim(S_n(\mathbf{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

■

## § C. LEMME DES COLONNES

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier $n$.

**Q20. —** Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

La seule matrice quasi-nilpotente de $M_1(\mathbf{K})$ est la matrice nulle (puisqu'une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas $n = 1$. ■

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent $V$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble $V'$ de $V$ constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice $M$ de $V'$ s'écrit donc par blocs comme suit

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right)$$

**Q21. —** Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$.

Un calcul de déterminant par blocs montre que si $M \in V'$ alors

$$\chi_M = X \times \chi_{K(M)}$$

Les valeurs propres non nulles de $M \in V'$ et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes. Si $V'$ est quasi-nilpotent alors $K(V')$ l'est aussi. ■

**Q22. —** En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à $K(V')$ (sous-espace de $M_{n-1}(\mathbf{K})$), il existe un élément $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $C_j(K(V')) = \{0\}$. D'après l'hypothèse de l'absurde, il existe une matrice $M$ non nulle dans $C_j(V)$. Comme $j < n$, $M \in V'$ et donc $K(M) \in K(V')$. Comme $M \in C_j(V)$, on a aussi $K(M)$ qui a toutes ses colonnes nulles sauf peut-être la $j$-ème. Finalement, $K(M) \in C_j(K(V'))$ et donc $K(M) = 0$.
$M$ a ainsi une unique colonne qui peut être non nulle (celle numéro $j$) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul.
Comme $M \neq 0$, il existe $c \neq 0$ tel que $M = c \cdot E_{n,j}$. Enfin, $V'$ est un sous-espace vectoriel et :

$$E_{n,j} = \frac{1}{c} \cdot M \in V' \subset V.$$

■

Soit $\sigma$ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. On considère l'application linéaire $u_\sigma$ de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On considère la matrice $P_\sigma$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ :

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

**Q23. —** Vérifier que $u_\sigma$ est inversible et préciser son inverse.

L'application linéaire $u_\sigma$ transforme la base $(e_1, \ldots, e_n)$ en $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ qui est aussi une base. Cette application linéaire est donc un isomorphisme de $\mathbf{K}'$.
L'application $(u_\sigma)^{-1}$ envoie $e_{\sigma(i)}$ sur $e_i$ pour tout $i$ et donc $e_k$ sur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ pour tout $k$. On a donc :

$$(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}.$$

■

**Q24. —** Vérifier que $P_\sigma$ est la matrice de $u_\sigma$ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Montrer que $P_\sigma$ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

La colonne $j$ de la matrice de $u_\sigma$ dans la base canonique est la colonne $e_{\sigma(j)}$. Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne $\sigma(j)$. Son coefficient générique est donc $\delta_{i,\sigma(i)}$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma.$$

On en déduit que $P_\sigma$ est inversible et que

$$(P_\sigma)^{-1} = \mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}\left(u_\sigma^{-1}\right) = P_{\sigma^{-1}} = \left(\delta_{i,\sigma^{-1}(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \left(\delta_{\sigma(i),j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

*Remarque. On vérifie aisément que les applications :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\mathrm{GL}(\mathbf{K}^n), \circ) \\ \sigma & \longmapsto & u_\sigma \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times) \\ \sigma & \longmapsto & P_\sigma \end{array} \right.$$

*sont des morphismes de groupes liés par la relation :*

$$\psi = Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(\cdot) \circ \varphi.$$

■

**Q25. —** Pour $M \in M_n(\mathbf{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de $M$ et de $\sigma$. *On pourra utiliser un changement de base.*

Soit $g$ l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à $M$. $P_\sigma$ étant la matrice de changement de base de $(e_1,\dots,e_n)$ à $(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$, d'après la formule de changement de base,

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = \mathrm{Mat}_{(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})}(g).$$

Le coefficient à l'intersection des colonne $j$ et ligne $i$ est la coordonnée sur $e_{\sigma(i)}$ de $g(e_{\sigma(j)})$. Or,

$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,\sigma(j)} e_k = \sum_{l=1}^{n} m_{\sigma(l),\sigma(j)} e_{\sigma(l)}$$

Finalement :

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

■

**Q26. —** Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

L'ensemble $V^\sigma$ est l'image de $V$ par l'application linéaire :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & P_\sigma^{-1} M P \end{array} \right.$$

et donc est un espace vectoriel.
Le spectre étant un invariant de similitude, le caractère quasi-nilpotent des éléments de $V$ entraîne celui de ceux des éléments de $V^\sigma$ et $V^\sigma$ est un sous-espace quasi-nilpotent de $M_n(\mathbf{K})$.
Enfin, fixons $k \in [\![1,n]\!]$. D'après l'hypothèse de l'absurde, on peut trouver $M$ non nulle dans $C_{\sigma(k)}(V)$. Si $\ell \in [\![1,n]\!]$, on a en particulier $m_{\ell,c}$ qui est nul si $c \neq \sigma(k)$ ce que l'on peut écrire $m_{\sigma(\ell),\sigma(c)} = 0$ si $\sigma(c) \neq \sigma(k)$ ou encore si $c \neq k$. La matrice $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ est donc dans $C_k(V^\sigma)$. Elle est non nulle car $M$ l'est (et $f$ est un isomorphisme). On a montré que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad C_k(V^\sigma) \neq \{0\}.$$

■

**Q27. —** En déduire que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(i)} \in V$. On obtient ainsi une fonction

$$f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!].$$

Les espaces $V^\sigma$ et $V$ ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout $k$, $C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$). Pour tout $\sigma$, on peut donc appliquer la question 22 à $V^\sigma$ et dire qu'il existe $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $E_{n,k} \in V_\sigma$ ou encore que $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} \in V$.
D'après la question 25, pour tout choix de $\sigma$ on a $P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u),\sigma^{-1}(v)}$ (en effet en notant $N = P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma$, on a $N_{i,j}$ qui est égal au coefficient $(\sigma(i),\sigma(j))$ de $E_{u,v}$ et est nul sauf si $\sigma(i) = u$ et $\sigma(j) = v$).
En appliquant ceci avec $\sigma^{-1}$, on a donc $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.
Fixons $j \in [\![1,n]\!]$. Appliquons ceci avec $\sigma$ la bijection qui se contente de permuter $j$ et $n$ en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si $j = n$). On trouve alors $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $E_{\sigma(n),\sigma(k)} = E_{j,\sigma(k)} \in V$. On a

bien sûr $\sigma(k) \neq j$ car $k \neq n$ et $\sigma$ est une bijection qui envoie déjà $n$ sur $j$.
On a prouvé que :
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \exists f(j) \neq j \quad E_{j,f(j)} \in V.$$
■

**Q28. —** En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1,\dots,j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ telle que
$$\forall k \in [\![1,p-1]\!], \quad f(j_k) = j_{k+1} \text{ et } f(j_p) = j_1$$

Posons $i_1 = 1$ et, pour tout $k \geqslant 2$, $i_k = f(i_{k-1})$. L'ensemble $\{i_k : k \in \mathbf{N}^*\}$ est inclus dans $[\![1,n]\!]$ et donc fini.
Or, $\mathbf{N}^*$ est infini. Il existe donc deux $i_k$ égaux pour des valeurs de $k$ différentes : $i_a = i_b$ avec $a < b$. En partant de $i_a$ et en itérant successivement par $f$, on finit par retomber sur $i_a$.
On regarde la première fois où on retrouve $i_a$ et ce n'est pas à la première itération car $f(j) \neq j$ pour tout $j$.
On trouve des indices $i_a, i_{a+1}, \dots, i_{a+p-1}$ avec $p \geqslant 2$ deux à deux distincts images successifs les uns des autres par $f$ et avec $f(i_{a+p-1}) = f(i_a)$.
En posant $j_1 = i_a$, $j_2 = i_{a+1}, \dots, j_p = i_{a+p-1}$, on a des éléments deux à deux distincts et
$$\forall k \in [\![1,p-1]\!], \quad f(j_k) = j_{k+1} \text{ et } f(j_p) = j_1.$$
■

**Q29. —** Écrire un algorithme qui permet d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de $f$.

On applique le procédé décrit ci-dessus.
On gère un tableau `t` de booléens à $n+1$ case numéroté à partir de 0 et dont la case 0 sera inutile (mais cela permet de respecter la notation python).
Initialement toutes les cases valent `False`. On part de 1 et on pose `t[1]=True` puis on calcule $f(1)$ et on regarde, grâce au tableau `t`, si cette valeur a déjà été détectée. Si c'est le cas, cela signifie que l'on a un cycle de $f(1)$ à lui même. Sinon, on met la valeur `True` dans `t`$[f(1)]$ (on a rencontré l'élément $f(1)$) et on recommence avec $f(1)$ en calculant donc $f(f(1))$. On gère ainsi une variable `i` qui prend successivement les valeurs $1, f(1), \dots$.

```
t=[False]*(n+1)
i=1
while not(t[f(i)]):
    t[f(i)]=True
    i=f(i)
```

A ce niveau, il y a une boucle de `i` vers lui même quand on itère par $f$ et il suffit de partir de `i` et d'itérer en stockant jusqu'à retomber sur `i`.

```
l=[i]
k=f(i)
while k!=i:
    l.append(k)
    k=f(k)
return(l)
```

■

**Q30. —** Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k,f(j_k)}$ et conclure.

La matrice $N$ comporte $p$ valeurs non nulles qui sont égales à 1. Il y a un coefficient 1 sur chaque ligne $j_1,\dots,j_p$ et aussi un sur chaque colonne $f(j_1),\dots,f(j_p) = j_2,\dots,j_p,j_1$.

On en déduit que le vecteur $\sum_{k=1}^{p} e_{j_k}$ est propre pour $N$ associé à la valeur propre 1.
Ceci est contradictoire car $N \in V$ (comme somme d'éléments de $V$ qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Ceci clôt le raisonnement par l'absurde. ■

## § D. Cas général

On va ici prouver l'inégalité $(QN)$ par récurrence sur $n$. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose l'inégalité $(QN)$ établie au rang $n-1$. Soit $V$ un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in M_n(\mathbf{K})$, et en particulier de $V$, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K : V \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : V \to \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

**Q31. —** Montrer que $\dim(V) \leqslant \dim(K(W)) + (n-1)$.

Considérons l'application :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & (K(M), L(M)). \end{array} \right.$$

Si $\Phi(M) = 0$ alors $L(M) = 0$ et $K(M) = 0$. Or $C_n(V) = 0$ et ces conditions impliquent donc que $M = 0$. Le noyau de $\Phi$ est égal à $\ker(K) \cap \ker(L)$ et $\Phi$ (qui est linéaire) est injective. On a ainsi

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\Phi(V)).$$

On peut trouver un supplémentaire $W'$ de $W$ dans $V$ et on a (par injectivité de $\Phi$)

$$\Phi(V) = \Phi(W) \oplus \Phi(W').$$

On a $\Phi(W) = \{(K(M), L(M)) \ : \ M \in W\} = \{(K(M), 0) \ : \ M \in W\}$ qui est isomorphe à $K(W)$ et donc de même dimension.
$W = \ker(L)$ et par théorème du rang, $W'$ est isomorphe à $L(V)$ qui est de dimension inférieure ou égale à $n-1$.
$\Phi(W')$ qui est isomorphe à $W'$ est donc aussi de dimension inférieure à $n-1$. Finalement :

$$\dim(V) = \dim(\Phi(V)) \leqslant \dim(K(W)) + n - 1.$$

■

**Q32. —** En déduire que $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Soit $M \in W$. On a $M = \begin{pmatrix} K(M) & R(M) \\ 0 & a(M) \end{pmatrix}$ qui est quasi nilpotente (car dans $V$) et ses valeurs propres sont celles de $K(M)$ et $a(M)$. Ainsi $K(M)$ n'a pas de valeur propre non nulle (et $a(M) = 0$). Ceci montre que l'espace vectoriel $K(W)$ est quasi-nilpotent.
D'après l'hypothèse de récurrence, sa dimension est plus petite que $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
La question précédente donne alors

$$\dim(V) \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

■

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$.

**Q33. —** Démontrer que $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

D'après le lemme des colonnes, il existe $j$ tel que $C_j(V) = \{0\}$. Considérons la transposition $\sigma$ de $[\![1, n]\!]$ qui échange $j$ et $n$. L'espace $V^\sigma$ est alors isomorphe à $V$ et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel on peut appliquer le cas précédent. On a donc :

$$\dim(V) = \dim\left(V^\sigma\right) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

■