Algèbre linéaire et réduction I

par David Blottière, le 7 octobre 2023 à 09h41

DS n°2

4 heures

Les étudiants de MPI résolvent l'exercice 1 et le problème.

Les étudiants de MPI* résolvent l'exercice 2 et le problème.

Exercice 1 — Racines carrées et puissances de matrices (MPI)

Dans ce problème, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1. — Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Q2. — Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Q3. — Déterminer une matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$.

Q4. — Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n, en utilisant la matrice de passage P.

Q5. — Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_3.

Exercice 2 — Classes de similitude de parties de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (MPI*)

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q6. — Déterminer le nombre de classes d'équivalence de la relation de similitude sur :

$$\mathscr{S} := \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A^2 = I_n \right\}.$$

Q7. — Démontrer qu'une matrice non nulle de :

$$\mathscr{N} := \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A^2 = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})} \right\}$$

est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où r est un entier à préciser. En déduire le nombre de classes d'équivalence de la relation de similitude sur $\mathscr{N}$.

Q8. — Démontrer que deux matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q9. — Soit u un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}$. Démontrer que $\mathbf{C}^n = \mathrm{Ker}\,(u + i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n})$.

Q10. — Démontrer que :

$$\mathscr{A} := \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A^2 = -I_n \right\}$$

est non vide si et seulement si n est pair.

Q11. — On suppose n pair. Démontrer que la relation de similitude sur $\mathscr{A}$ possède une unique classe d'équivalence, celle de la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

PROBLÈME — MATRICES QUASI-NILPOTENTES (MPI-MPI*)

§ NOTATIONS

Dans tout le problème, **K** désigne **R** ou **C**.

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans **K** et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i,j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée $M^\top$.

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.

On note $S_n(\mathbf{K})$, $A_n(\mathbf{K})$ et $T_n^{++}(\mathbf{K})$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\Delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1 — *Etant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et un élément j de $[\![1,n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ème.*

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{K})$ avec $n \geqslant 2$, on notera $K(M) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$, $R(M) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{K})$, $L(M) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ et $a(M) \in \mathbf{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right) \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : M_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : M_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$, évidemment linéaires.

§ THÉORÈME SPECTRAL

On pourra appliquer le théorème suivant, admis aujourd'hui, mais démontré plus tard dans l'année.

Théorème (spectral) — Pour toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $S = P\,D\,P^\top$.

§ OBJECTIFS

Définition 2 — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est* **quasi-nilpotente** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans* **K**. *Une partie V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite* **quasi-nilpotente** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énoncé comme suite.

Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents) — *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a*

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \tag{QN}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.

Lemme (Lemme des colonnes) — *Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1,n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.*

§ A. EXEMPLES

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q12. — Montrer que la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$?

Q13. — Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$.

Q14. — Montrer que $S_n(\mathbf{K})$, $A_n(\mathbf{K})$ et $T_n^{++}(\mathbf{K})$ sont des sous-esapces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que la dimension de $S_n(\mathbf{K})$ est $n(n+1)/2$.

Q15. — Montrer que $T_n^{++}(\mathbf{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Vérifier que

$$\dim\left(T_n^{++}(\mathbf{K})\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Q16. — Soit $A \in A_n(\mathbf{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X^\top AX = 0$. En déduire que $A_n(\mathbf{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q17. — Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que

$$A_n(\mathbf{R}) = \{PMP^{-1} \,:\, M \in T_n^{++}(\mathbf{R})\}$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite en Q1.

§ B. CAS RÉEL

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Q18. — Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Le résultat obtenu tient-il si on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$?

Q19. — Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Déduire de la question précédente que

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

§ C. LEMME DES COLONNES

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

Q20. — Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right)$$

Q21. — Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$.

Q22. — En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On considère la matrice P_σ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$:

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Q23. — Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

Q24. — Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

Q25. — Pour $M \in M_n(\mathbf{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ. *On pourra utiliser un changement de base.*

Q26. — Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

Q27. — En déduire que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(i)} \in V$. On obtient ainsi une fonction

$$f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$$

Q28. — En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1,\ldots,j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1,p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \ \text{ et } \ f(j_p) = j_1$$

Q29. — Écrire un algorithme qui permet d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de f.

Q30. — Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k,f(j_k)}$ et conclure.

§ D. CAS GÉNÉRAL

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in M_n(\mathbf{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K : V \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : V \to \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

Q31. — Montrer que $\dim(V) \leqslant \dim(K(W)) + (n-1)$.

Q32. — En déduire que $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$.

Q33. — Démontrer que $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.