ALGÈBRE GÉNÉRALE

par David Blottière, le 16 septembre 2023 à 10h54

DS N°1

3 HEURES

SOMMAIRE

§ 1. QUESTIONS DE COURS

Q1. — Énoncer le théorème de classification des groupes monogènes.

Q2. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Énoncer le théorème sur les inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis le démontrer.

Q3. — Énoncer le théorème des restes chinois.

Q4. — Soit $\mathbf{K}$ un corps. Énoncer le théorème décrivant les idéaux de $\mathbf{K}[X]$, puis le démontrer.

Q5. — Énoncer la formule de Leibniz dans $\mathbf{R}[X]$, puis la démontrer.

§ 2. ISOMÉTRIES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Soit $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $||\cdot||$ la norme induite sur E par le produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Un endomorphisme de E est une isométrie de E si :

$$\forall x \in E, \quad \big|\big| f(x) \big|\big| = ||x||.$$

L'ensemble des isométries de E est noté $\mathcal{O}(E)$.

Q6. — Démontrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$ des automorphismes de E.

§ 3. SIMILITUDES COMPLEXES

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, on définit l'application $f_{\alpha,\beta}$ par :

$$f_{\alpha,\beta} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \alpha \cdot z + \beta. \end{array} \right.$$

On pose :

$$\mathscr{S} := \left\{ f_{\alpha,\beta} \,:\, (\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \right\}.$$

Q7. — Démontrer que la composition des applications induit une loi de composition interne sur $\mathscr{S}$.

Q8. — Démontrer que $(\mathscr{S}, \circ)$ est un groupe. Est-il commutatif?

Q9. — À quelle condition sur $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, l'application $f_{\alpha,\beta}$ est-elle d'ordre fini dans $(\mathscr{S}, \circ)$?

§ 4. Groupes dont les carrés égalent le neutre

Soit $(G,*)$ *un groupe dont le neutre est noté* e*. On suppose que :*

$$\forall x \in G, \quad x * x = e.$$

Q10. — Démontrer que le groupe $(G,*)$ est abélien.

Désormais, on suppose que G est fini.

Q11. — Soient H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous-groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Démontrer :

$$\operatorname{Card}(K) = 2 \cdot \operatorname{Card}(H).$$

Q12. — En déduire que $\operatorname{Card}(G)$ est une puissance de 2.

§ 5. Groupes ayant un nombre fini de sous-groupes

Soit $(G,*)$ *un groupe possédant un nombre fini de sous-groupes.*

Q13. — Démontrer que tout élément de G est d'ordre fini.

Soient $g_1, g_2, \dots, g_r$ *des éléments de G tels que* $\langle g_1\rangle, \langle g_2\rangle, \dots, \langle g_r\rangle$ *est une liste exhaustive, sans répétition, de tous les sous-groupes cycliques de G.*

Q14. — Démontrer que :

$$\forall g \in G, \quad \exists i \in [\![1,r]\!], \quad \exists k \in \mathbf{N}, \quad g = g_i^k.$$

Q15. — En déduire que G est fini et que :

$$\operatorname{Card}(G) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \operatorname{ord}(g_i).$$

§ 6. Un corps de rupture du polynôme $X^3 - X - 1$

Q16. — Démontrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ possède une unique racine réelle α.

Q17. — Donner une base du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}[\alpha] := \operatorname{Vect}_{\mathbf{Q}}\left(\left(\alpha^k\right)_{k\in\mathbf{N}}\right)$.

Q18. — Démontrer que $\mathbf{Q}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$.

§ 7. Conditions suffisantes pour qu'un anneau intègre soit un corps

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau commutatif intègre.*

Q19. — Démontrer que, si A est fini, alors $(A,+,\times)$ est un corps.

Q20. — Démontrer que, si A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux, alors $(A,+,\times)$ est un corps.