Eléments de correction : Mines MP1 2014

1) Avec $z = R\mathrm{e}^{i\theta} = R\cos(\theta) + iR\sin(\theta)$, le complexe e^z a pour module $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} = \mathrm{e}^{R\cos(\theta)}$ et argument $R\sin(\theta)$, donc $z\mathrm{e}^z$ a pour module $|z| \times |\mathrm{e}^z| = R\mathrm{e}^{R\cos(\theta)}$ et argument $\theta + R\sin(\theta)$. Ainsi par identification des modules et arguments, on obtient

$$\boxed{z\mathrm{e}^z = w \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R\mathrm{e}^{R\cos(\theta)} = r \\ \theta + R\sin(\theta) = \alpha\ [2\pi] \text{ i.e. } R\sin(\theta) = \alpha - \theta\ [2\pi] \end{array} \right.}$$

2) En posant $u(\theta) = \frac{\alpha-\theta}{\sin(\theta)}$, on obtient :

• d'une part, $\varphi(\theta) = u(\theta)\exp(u(\theta))\exp((\cos(\theta)-1)u(\theta))$

avec $u(\theta)$ qui tend vers $+\infty$ quand θ tend vers 0^+ (car $\alpha > 0$) et $(\cos(\theta)-1)\,u(\theta) \sim_0 -\dfrac{1}{2}\theta^2\dfrac{\alpha}{\theta} \sim_0 -\dfrac{1}{2}\theta\,\alpha$ qui tend vers 0. Donc par théorèmes opératoires, $\exp((\cos(\theta)-1)u(\theta))$ tend vers 1 quand θ tend vers 0 et $\boxed{\varphi \text{ tend vers } +\infty \text{ en } 0^+;}$

• d'autre part $\varphi(\theta) = u(\theta)\exp(-u(\theta))\exp((\cos(\theta)+1)u(\theta))$

avec $u(\theta)$ qui tend vers $+\infty$ quand θ tend vers π^- (car $\alpha - \pi > 0$) et

$(\cos(\theta)+1)\ u(\theta) \sim_\pi (\alpha-\pi)\frac{1-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)} \sim_\pi \dfrac{1}{2}(\alpha-\pi)(\pi-\theta)$ (cf premier point). Donc par continuité de exp, le terme $\exp((\cos(\theta)+1)u(\theta))$ tend vers 1 quand θ tend vers π, et par croissances comparées, $\boxed{\varphi \text{ tend vers } 0 \text{ en } +\infty;}$

• Ainsi, comme φ tend vers $+\infty$ en 0^+, il existe $\varepsilon \in]0;\pi/2[$ tel que : $\forall \theta \in]0;\varepsilon[,\ \varphi(\theta) > r$ (car $r > 0$).

Et comme φ tend vers 0 en π, il existe $\varepsilon' \in]0;\pi/2[$ tel que : $\forall \theta \in]\pi-\varepsilon';\pi[,\ \varphi(\theta) < r$ (car $r > 0$)

Comme φ est continue sur l'intervalle $]0;\pi[$ comme quotient et composée de telles fonctions, par le théorème des valeurs intermédiaires (comme φ prend sur $]0;\varepsilon[\subset]0;\pi/2[$, une valeur strictement supérieure à r et sur $]\pi-\varepsilon';\pi[\subset]\pi/2;\pi[$ une valeur strictement inférieure à r), φ prend la valeur r donc

$\boxed{\text{pour tout } r > 0, \text{ l'équation } \varphi(\theta) = r \text{ admet au moins une solution.}}$

3) Soit w un complexe.

• Si $w = 0$ alors $0 \in D$ vérifie $g(0) = 0\,\mathrm{e}^0 = 0 = w$ donc w est atteint par g.

• Sinon $w \neq 0$, s'écrit $w = r\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $r > 0$ son module et α son unique argument dans $[2\pi;4\pi[$.

Via la question **2**, il existe θ dans $]0;\pi[$ avec $\varphi(\theta) = r$. On pose alors $R = \frac{\alpha-\theta}{\sin(\theta)}$, comme $\sin(\theta) > 0$ et $\alpha - \theta > 2\pi - \pi > 0$, ce réel est strictement positif.

Par définition de R et θ : $R\,e^{R\cos(\theta)} = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin(\theta)}\exp\left(\dfrac{(\alpha-\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) = \varphi(\theta) = r$ et $R\sin(\theta) = \alpha - \theta$

Ainsi via la question **1**, on obtient $z\,\mathrm{e}^z = w$ avec $z = R\mathrm{e}^{i\theta}$ qui est bien dans D, donc $w = g(z)$.

• Ainsi, tout complexe w est image par g d'un élément de D, autrement dit $\boxed{g : D \to \mathbb{C} \text{ est surjective .}}$

4) Par définition de l'indice de nilpotence, N^{n-1} n'est pas la matrice nulle donc

$\boxed{\text{il existe } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ avec } N^{n-1}X \neq 0.}$

Par l'absurde, supposons la famille $(N^kX)_{k=0\ldots n-1}$ liée. Alors il existe une famille $(\lambda_k)_{k=0\ldots n-1}$ non nulle de complexes vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k N^k X = 0$. On considère k_0 le plus petit élément de l'ensemble fini non vide $\{k|\lambda_k \neq 0\}$. Alors $m = n-1-k_0$ est un entier naturel, et on obtient :

$$0 = N^m\,0 = N^m\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k N^k X\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k N^{m+k}X = \sum_{k=k_0}^{n-1}\lambda_k N^{m+k}X = \lambda_{k_0}N^{n-1}X$$

car si $k < k_0$ alors $\lambda_k = 0$ par définition de k_0 et si $k > k_0$, alors $k - k_0 - 1$ est un entier naturel donc $N^{m+k}X = N^{k-k_0-1}\,N^nX = 0$.

Or $N^{n-1}X \neq 0$ par choix de k_0, donc $\lambda_{k_0} = 0$ ce qui contredit la définition de k_0.
Finalement, $\boxed{\text{la famille } (N^k X)_{k=0\dots n-1} \text{ est libre.}}$

5) Soit $\mathcal{N}$ l'endomorphisme canoniquement associé à N. Comme $(N^k X)_{k=0\dots n-1}$ est une famille libre à n éléments (question **4**) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui est de dimension n, c'est une base de cet espace. Dans cette base $B = (N^{n-1}X, \dots, NX, X)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la matrice de $\mathcal{N}$ est $J_n(0)$ car $N(N^k X) = N^{k+1}X$ et $N^n X = 0$ (puisque $N^n = 0$). Ainsi les matrices de $\mathcal{N}$ dans les bases canonique et B autrement dit $\boxed{N \text{ et } J_n(0) \text{ sont semblables.}}$

6) • Comme $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent, on obtient $\mathrm{e}^{J_n(0)-J_n(0)} = \mathrm{e}^{J_n(0)}\,\mathrm{e}^{-J_n(0)}$ i.e. $\mathrm{e}^{J_n(0)}\,\mathrm{e}^{-J_n(0)} = \mathrm{e}^0 = I_n$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{e}^{J_n(0)} \text{ est inversible d'inverse } \mathrm{e}^{-J_n(0)}.}$
• Pour toute matrice carrée A, par continuité du produit par A (application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie), on a :

$$A\mathrm{e}^A = A \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(A\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)A\right) = \mathrm{e}^A A$$

Ainsi toute matrice commute avec son exponentielle.
On obtient donc pour tout entier naturel k: $\left(J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k = (J_n(0))^k\,\left(\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k$
et comme $e^{J_n(0)}$ est inversible donc tout $\left(\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ aussi, on a :
$\left(J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k = 0 \Leftrightarrow (J_n(0))^k = 0 \Leftrightarrow k \geqslant n$ (car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n).
Finalement, on a prouvé que $\boxed{J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)} \text{ est nilpotente d'indice } n.}$
Remarque : le polynôme caractéristique de $J_n(0)$ est $\det(XI_n - J_n(0)) = X^n$ (déterminant d'une matrice triangulaire supérieure) donc via le théorème de Cayley-Hamilton, ce polynôme est annulateur de $J_n(0)$ donc on a $(J_n(0))^n = 0$.
Mais en notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a par définition de $J_n(0)$, $J_n(0)e_\ell = e_{\ell-1}$ pour tout $\ell = 2...n$, donc $(J_n(0))^{n-1}e_n = e_{n-(n-1)} = e_1 \neq 0$ ce qui assure que $(J_n(0))^{n-1}$ n'est pas nulle.
Ainsi $(J_n(0))^{n-1} \neq 0$ et $(J_n(0))^n = 0$ donc $\boxed{J_n(0) \text{ est bien nilpotente d'indice } n}$.

7) • Par continuité de l'application linéaire $A \mapsto PAP^{-1}$ (définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, donc continue), on obtient pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
$$P\,e^A P^{-1} = P\left(\lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)\right)P^{-1} = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(P\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)P^{-1}\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{P\,A^k\,P^{-1}}{k!}\right)$$
Or $PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$ par récurrence sur k. En effet, la propriété est vraie au rang $k = 0$ car $PP^{-1} = I_n$ et si elle est vraie au rang k, alors $PA^{k+1}P^{-1} = PA^kP^{-1}PAP^{-1} = (PAP^{-1})^k\,(PAP^{-1}) = (PAP^{-1})^{k+1}$.
Donc $P\,e^A P^{-1} = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{(PAP^{-1})^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{PAP^{-1}}$.
En particulier $\boxed{\text{on a bien } P\,\mathrm{e}^{J_n(0)}P^{-1} = \mathrm{e}^{PJ_n(0)P^{-1}}\ .}$

• Via la question **6**, $J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n, donc semblable à $J_n(0)$ (question **5**) : ainsi il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $J_n(0) = PJ_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}P^{-1}$.
Avec $\widetilde{N} = PJ_n(0)P^{-1}$, via le début de la question,
$\widetilde{N}\,\mathrm{e}^{\widetilde{N}} = PJ_n(0)P^{-1}\,P\mathrm{e}^{J_n(0)}P^{-1} = PJ_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}P^{-1} = J_n(0)$ donc $\boxed{\text{on a bien trouvé } \widetilde{N} \text{ avec } J_n(0) = \widetilde{N}\mathrm{e}^{\widetilde{N}}.}$

8) • Comme λ est un complexe, <u>il existe $\mu \in D$</u> avec $g(\mu) = \lambda$ (question **3** : g est surjective). Comme λ est non nul, μ ne peut pas être nul (car $g(0) = 0$), donc μ est un élément non nul de D donc de partie imaginaire strictement positive (ce qui exclut les réels). Ainsi $\boxed{\mu \neq -1 \text{ et } \mu e^{\mu} = g(\mu) = \lambda.}$

• On observe $J_n(\mu) = \mu I_n + J_n(0)$. Donc comme μI_n commute avec $J_n(0)$, on a $e^{J_n(\mu)} = e^{\mu I_n}\, e^{J_n(0)}$.

Or $e^{\mu I_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu I_n)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}\right) I_n = e^{\mu}\, I_n$

et $e^{J_n(0)} = I_n + J_n(0) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{J_n(0)^k}{k!}$ (car $J_n(0)^k = 0$ pour tout $k \geqslant n$ puisque $J_n(0)$ est nilpotent d'indice n.

On peut donc écrire $e^{J_n(0)} = I_n + J_n(0) + J_n(0)^2 Q(J_n(0))$ avec Q le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{X^{k-2}}{k!}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} &= (\mu I_n + J_n(0))\, e^{\mu}\, (I_n + J_n(0) + J_n(0)^2\, Q(J_n(0))) \\ &= \mu e^{\mu} I_n + \mu e^{\mu} J_n(0) + J_n(0)^2\, (\mu e^{\mu} Q)(J_n(0)) + e^{\mu}\, J_n(0) + e^{\mu}\, J_n(0)^2\, (I_n + J_n(0)\, Q(J_n(0))) \end{aligned}$$

donc comme $\mu e^{\mu} = \lambda$, on a $\boxed{J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}\, J_n(0) + (J_n(0))^2\, p(J_n(0))}$ avec p le polynôme $p = e^{\mu}(\mu Q + 1 + XQ)$

9) Observons qu'il est possible d'écrire $C = (\mu+1)e^{\mu}\, J_n(0) + (J_n(0))^2\, p(J_n(0)) = (XR)(J_n(0))$ avec R le polynôme $R = (\mu+1)e^{\mu} + Xp$.

Donc comme l'évaluation est un morphisme d'algèbre,

• $C^n = ((XR)(J_n(0)))^n = (X^n R^n)(J_n(0)) = J_n(0)^n\, (R^n)(J_n(0)) = 0$ car $J_n(0)^n = 0$.

Donc C est bien nilpotente d'indice au plus n.

• et $C^{n-1} = ((XR)(J_n(0)))^{n-1} = (X^{n-1}R^{n-1})(J_n(0)) = S(J_n(0))$ où S est le reste de la division euclidienne de $X^{n-1}R^{n-1}$ par le polynôme X^n qui annule $J_n(0)$. Donc $S = \alpha X^{n-1}$ avec α le coefficient constant de R^{n-1}. Or $\alpha = R^{n-1}(0) = (R(0))^{n-1} = ((\mu+1)e^{\mu})^{n+1} \neq 0$ car $\mu \neq -1$.

Ainsi $C^{n-1} = \alpha J_n(0)^{n-1}$ avec le complexe α non nul et la matrice $J_n(0)^{n-1}$ non nulle (car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n, cf remarque de la question **6**). On en déduit $C^{n-1} \neq 0$.

Finalement $\boxed{C = (\mu+1)e^{\mu}\, J_n(0) + (J_n(0))^2\, p(J_n(0)) \text{ est bien nilpotente d'indice } n.}$

D'après la question **5**, C est semblable à $J_n(0)$; ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C = PJ_n(0)P^{-1}$. La relation de la question **8** s'écrit

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + C = \lambda I_n + PJ_n(0)P^{-1} = P(\lambda I_n + J_n(0))P^{-1} = PJ_n(\lambda)P^{-1}.$$

On termine comme à la question **7** : $\boxed{J_n(\lambda) = P^{-1}J_n(\mu)e^{J_n(\mu)}P = Me^{M} \text{ avec } M = P^{-1}J_n(\mu)P.}$

10) Comme N est nilpotente d'indice p, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $N^{p-1}X \neq 0$. Par le même raisonnement qu'à la question **4** (qui n'utilisait que l'indice de nilpotence de la matrice), la famille $(N^kX)_{k=0\ldots p-1}$ est libre. Le théorème de la base incomplète assure que l'on peut compléter cette famille en une base $(N^{p-1}X, \ldots, NX, X, X_1, \ldots X_{n-p})$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (qui est de dimension n). Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N a pour matrice, une matrice du type

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right) \quad \text{car } N(N^{p-1}X) = N^pX = 0 \text{ et } N(N^{\ell}X) = N^{\ell+1}X \text{ pour tout } \ell = 0..p-2.$$

11) • Soit X et Y dans $\mathcal{M}_{p,n-p}$, en faisant des produits par blocs, on obtient $T_X\, T_Y = T_{X+Y}$.

Ainsi $T_X\, T_{-X} = T_0 = I_n = T_{-X}\, T_X$ ce qui prouve que $\boxed{T_X \text{ est inversible, d'inverse } T_{-X}.}$

• Ainsi, toujours à l'aide de produits par blocs :

$$A' = T_X\, A\, T_X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B + XC \\ \hline O & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & -J_p(0)X + B + XC \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

Donc avec les notations de l'énoncé, on a $\boxed{Z = C \text{ et } Y = B + XC - J_p(0)X.}$

12) En notant $A_{(i)}$ la i-ème ligne de la matrice A, la relation $Y = B + XC - J_p(0)X$ entre matrices à p lignes, s'écrit : $Y_{(i)} = B_{(i)} + X_{(i)}C - X_{(i+1)}$ pour tout $i = 1...p-1$ et $Y_{(p)} = B_{(p)} + X_{(p)}C$.
Ainsi, on choisit la première ligne de X dans $\mathcal{M}_{1,n-p}(\mathbb{C})$, on peut prendre par exemple cette première ligne nulle. Puis on définit par récurrence limitée, $X_{(\ell+1)} = B_{(\ell)} + X_{(\ell)}C$ pour tout ℓ de 1 à $p-1$. Ainsi, on a défini $\boxed{\text{une matrice } X \text{ et par choix, toutes les lignes de } Y \text{ sauf peut-être la dernière, sont nulles.}}$

13) • Par choix de A', les matrices A et A' sont semblables et les matrices A et N aussi (question **10**) donc A' et N sont semblables et il existe P inversible avec $A' = PNP^{-1}$. Dans la question **7**, pour tout entier naturel k, on a obtenu $A'^k = PN^kP^{-1}$, donc comme P et P^{-1} sont inversibles, on obtient $A'^k = 0 \Longleftarrow N^k = 0$ ce qui prouve que $\boxed{A' \text{ est nilpotente d'indice } p}$ comme N.

• Faisons le choix de X de la question précédente donc toutes les lignes de Y sont nulles sauf peut-être la dernière. On a donc par récurrence, pour tout entier naturel k non nul :

$$A'^k = \left(\begin{array}{c|c} (J_p(0))^k & Y_k \\ \hline O & Z^k \end{array}\right) \text{ avec } Y_1 = Y \text{ et } Y_{k+1} = J_n(0)Y_k + YZ^k$$

Observons, pour toute matrice C : $J_n(0)\begin{pmatrix} C_{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{(2)} \\ \vdots \\ C_{(p)} \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc en notant L la dernière ligne de Y, on obtient successivement

$$Y_1 = Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \text{ puis } Y_2 = J_n(0)Y + YZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ LZ \end{pmatrix} \text{ et } Y_3 = J_n(0)Y_2 + YZ^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ LZ \\ LZ^2 \end{pmatrix}$$

Pour tout k entre 1 et p, par récurrence, $Y_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ LZ \\ \vdots \\ LZ^{k-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$. En particulier $Y_p = \begin{pmatrix} L \\ LZ \\ \vdots \\ LZ^{p-1} \end{pmatrix}$ est nul car $A'^p = 0$ comme A' est nilpotente d'indice p (première partie de la question). Donc $L = 0$ et finalement $\boxed{Y = 0.}$

14) Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété H_n suivante : toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux du type $J_{p_j}(0)$ avec pour $j = 1...r$, les p_j des entiers naturels non nuls (forme de l'énoncé).

• Pour $n = 1$, la seule matrice nilpotente N est la matrice nulle, donc avec $r = 1$ et $p_1 = 1$, on a le résultat

$(N = J_1(0) = 0)$.

• Supposons H_ℓ vérifiée pour tout ℓ entre 1 et n.
Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et p son indice de nilpotence.
Alors X^p est un polynôme annulateur de N, donc le polynôme minimal π_N de N divise X^p donc est de la forme X^ℓ avec $\ell \leqslant p$, mais par définition de p, aucun X^ℓ avec $\ell > p$ n'est annulateur de N donc $\pi_N = X^p$.
Or via le théorème de Cayley-Hamilton, π_N divise le polynôme caractéristique de N qui est de degré $n+1$.
Donc $1 \leqslant p \leqslant n+1$.

☐ Si $p = n+1$, alors N est nilpotente d'indice maximum, donc via la question **5**, N est semblable à $J_{n+1}(0)$ donc $r = 1$ et $p_1 = n+1$ convient.
☐ Si $p = 1$ alors $N = \pi_N(N) = 0$ donc $r = n+1$ et $p_j = 1$ pour tout $j = 1..n+1$, convient.
☐ Sinon $1 < p < n+1$.On peut appliquer les questions **10-11** ce qui montre que N est semblable à A' avec $Y = 0$ et Z nilpotente d'indice au plus p (question **13**).
Par hypothèse de récurrence, comme Z est dans $\mathcal{M}_{n+1-p}(\mathbb{C})$ avec $0 < n+1-p < n$ (car $1 < p < n+1$), Z est semblable à une matrice de type voulue. Plus précisément, il existe P inversible dans $\mathcal{M}_{n+1-p}(\mathbb{C})$, un entier naturel non nul r' et des entiers p'_j non nuls ($j = 1..r'$) avec

$$PZP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{p'_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p'_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p'_{r'}}(0) \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & (0) \\ \hline (0) & Z \end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & P^{-1} \end{array}\right)}_{=Q \in GL_{n+1}(\mathbb{C})} \left(\begin{array}{c|cccc} J_p(0) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ \hline (0) & J_{p'_1}(0) & & & (0) \\ (0) & & J_{p'_2}(0) & & \\ (0) & & & \ddots & \\ (0) & (0) & & & J_{p'_{r'}}(0) \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & P \end{array}\right)}_{=Q^{-1}}$$

En posant $r = r'+1$, $p_1 = p$ et $p_j = p'_{j-1}$ pour j dans $2..r'+1 = r$, on obtient bien que A' est semblable à une matrice de type voulu, donc N qui est semblable à A' aussi.

Tous les cas de figures ont été traités et on a bien prouvé que H_{n+1} est vraie (sous l'hypothèse que H_ℓ le soit pour
tout $\ell = 1...n$) donc par récurrence forte (comme H_1 est satisfaite), $\boxed{H_n \text{ est vraie pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.}$

15) • Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé car dans $\mathbb{C}[X]$ et non constant. Ses racines sont exactement les valeurs propres de A, donc comme il est unitaire, on obtient : $\chi_A = \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$.
Les λ_ℓ étant 2 à 2 distincts, les polynômes $P_\ell = (X - \lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$ sont 2 à 2 premiers entre eux et le lemme des noyaux assure donc

$$\ker(\chi_A(f)) = \bigoplus_{\ell=1}^{s} \ker(P_\ell(f)) \text{ i.e. } \boxed{\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\ell=1}^{s} F_\ell}$$

En effet, χ_A est aussi le polynôme caractéristique de f (sa matrice dans une base est A) donc est annulateur de f d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(f) = 0$.

• Ainsi la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ i.e. $\boxed{A \text{ est semblable à la matrice } A'}$ de f dans une base $B = (B_1, \cdots, B_s)$ de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la décomposition précédente (chaque B_i est une base de F_i).

Pour tout ℓ, l'endomorphisme $P_\ell(f)$ est un polynôme en f, donc commute avec f et donc f laisse stable $\ker(P_\ell(f)) = F_\ell$. Ainsi la matrice A' de f dans B est diagonale par blocs et chaque bloc est la matrice M_ℓ dans la base B_ℓ de F_ℓ de l'endomorphisme f_ℓ induit par f sur F_ℓ:

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} M_1 & & & (0) \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_s \end{pmatrix}}$$

L'endomorphisme $(f_\ell - \lambda_\ell Id_{F_\ell})^{\alpha_\ell} = P_\ell(f_\ell)$ est donc l'endomorphisme induit par $P_\ell(f)$ sur F_ℓ, c'est donc l'endomorphisme nul. Donc $f_\ell - \lambda_\ell Id_{F_\ell}$ est nilpotent et sa matrice N_ℓ dans la base B_ℓ aussi.
Finalement $f_\ell = \lambda_\ell Id_{F_\ell} + (f_\ell - \lambda_\ell Id_{F_\ell})$ a pour matrice dans la base B_ℓ de F_ℓ la matrice $\boxed{M_\ell = \lambda_\ell I_{n_\ell} + N_\ell}$ où n_ℓ est la dimension de F_ℓ.
On a donc la forme voulue dès que l'on aura prouvé que $n_\ell = \alpha_\ell$ pour tout ℓ. Or par construction, le polynôme P_ℓ est annulateur de f_ℓ donc de sa matrice M_ℓ dans la base B_ℓ. Ainsi les valeurs propres de M_ℓ i.e. les racines de son polynôme caractéristique χ_{M_ℓ} sont à chercher parmi les racines de P_ℓ qui n'en admet qu'une λ_ℓ. Comme χ_{M_ℓ} est scindé (car dans $C[X]$), unitaire et de degré $n_\ell = \dim(F_\ell)$, on a pour tout ℓ, $\chi_{M_\ell} = (X - \lambda_\ell)^{n_\ell}$. Ainsi par déterminant diagonal par blocs, on obtient $\chi_A = \chi_{A'} = \prod_{\ell=1}^{s} \chi_{M_\ell}$ i.e. $\prod_{\ell=1}^{s}(X - \lambda_\ell)^{\alpha_\ell} = \prod_{\ell=1}^{s}(X - \lambda_\ell)^{n_\ell}$ donc par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on a bien $\boxed{n_\ell = \alpha_\ell}$ pour tout ℓ, ce qui termine la preuve demandée.

16) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
La question **15** assure que A est semblable à une matrice diagonale par blocs D avec des blocs diagonaux de type $D_\ell = \lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + N_\ell$ avec N_ℓ nilpotente. Il existe donc P inversible avec $A = PDP^{-1}$.
Fixons ℓ.
Comme N_ℓ est nilpotente, via la question **14**, N_ℓ est semblable à une matrice $D'_\ell = \mathrm{diag}(J_{p_1}(0), \ldots, J_{p_r}(0))$. Il existe donc une matrice inversible Q_ℓ avec $N_\ell = Q_\ell^{-1} D'_\ell Q_\ell$ ainsi $D_\ell = \lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + N_\ell = Q_\ell^{-1}(\lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + D'_\ell) Q_\ell$ est semblable à $\lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + D'_\ell = \mathrm{diag}(J_{p_1}(\lambda_\ell), \ldots, J_{p_r}(\lambda_\ell))$.
Suivant la valeur de λ_ℓ (nul ou pas), la question **7** ou **9** permet de trouver des matrices M'_j avec $M'_j \mathrm{e}^{M'_j} = J_{p_j}(\lambda_\ell)$, donc avec $M_\ell = \begin{pmatrix} M'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M'_r \end{pmatrix}$, un calcul matriciel par blocs donne :

$$M_\ell \mathrm{e}^{M_\ell} = \begin{pmatrix} M'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{M'_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{M'_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_\ell) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{p_r}(\lambda_\ell) \end{pmatrix} = Q_\ell D_\ell Q_\ell^{-1}$$

Comme à la question **7**, on a donc aussi en notant $\widetilde{M_\ell} = Q_\ell^{-1} M_\ell Q_\ell$, l'égalité $\widetilde{M_\ell}\mathrm{e}^{\widetilde{M_\ell}} = Q_\ell^{-1} M_\ell \mathrm{e}^{M_\ell} Q_\ell = D_\ell$.
Un calcul par blocs, en tout point similaire au précédent, assure qu'en notant $\widetilde{M}$ la matrice diagonale par blocs $\widetilde{M} = \mathrm{diag}(\widetilde{M_1}, \cdots, \widetilde{M_s})$, on a $\widetilde{M}\,\mathrm{e}^{\widetilde{M}} = D$ et donc avec $B = P\widetilde{M}P^{-1}$, on obtient :
$B\mathrm{e}^B = P\widetilde{M}\,\mathrm{e}^{\widetilde{M}}P^{-1} = PDP^{-1} = A$
Finalement, on a écrit toute matrice A sous la forme $B\mathrm{e}^B$ ce qui prouve que
$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto A\mathrm{e}^A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est surjective.}}$