TOPOLOGIE

par David Blottière, le 3 janvier 2024 à 21h12

CORRIGÉ

DM 7

Les corrigés des parties IV et V sont dus à Damien Broizat et Nicolas Basbois.

II — Propriétés topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q1. — L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est-il fermé $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

Considérons la norme $||\cdot||_\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (le choix n'importe pas car toutes les normes sont équivalentes sur ce $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie). La suite $\left(\frac{1}{k}\cdot I_n\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ converge vers la matrice non inversible $0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$ car :

$$\left|\left|\frac{1}{k}\cdot I_n - 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}\right|\right|_\infty = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est donc pas une partie fermée de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. ■

Q2. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot\prod_{k=1}^{n} [A]_{k,\sigma(k)}$$

est une expression polynomiale en les coefficients de la matrice A. L'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array} \right.$$

est donc continue. Comme l'ensemble $\mathbf{R}^*$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}$, la partie :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}\left(\mathbf{R}^*\right)$$

est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, comme préimage d'un ouvert du but d'une application continue. ■

Q3. — Soit M un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Justifier que :

$$\exists\rho>0,\quad \forall\lambda\in]0,\rho[,\quad M-\lambda\cdot I_n\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

- La partie :

$$A := \left\{x\in\mathbf{R}_{>0}\ :\ x \text{ est valeur propre de } M\right\}$$

de $\mathbf{R}$ est finie. On pose :

$$\rho := \left\{ \begin{array}{ll} \min(A) & \text{si } A\neq\emptyset \\ 1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

- Soit $\lambda \in]0,\rho[$. Comme λ n'est pas valeur propre de M :

$$\det(M-\lambda\cdot I_n)=(-1)^n\cdot\chi_M(\lambda)\neq 0$$

d'où $M-\lambda\cdot I_n\in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. ■

Q4. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Soient $M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\rho>0$ comme dans la question précédente. Pour tout $\varepsilon\in]0,\rho[$:

$$M-\frac{\varepsilon}{2}\cdot I_n\in B_\infty(M,\varepsilon)\cap\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\qquad [||I_n||_\infty=1]$$

et donc $B_\infty(M,\varepsilon)\cap\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\neq\emptyset$. ■

Q5. — Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, démontrer que les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique. À l'aide des matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

- Fixons $(\lambda,B)\in\mathbf{R}\times\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
- Pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

$$\det(AB-\lambda\cdot I_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot\prod_{k=1}^n[\lambda\cdot I_n-AB]_{k,\sigma(k)}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot\prod_{k=1}^n\left(\lambda\,\delta_{k,\sigma(k)}-\sum_{\ell=1}^n[A]_{k,\ell}[B]_{\ell,\sigma(k)}\right)$$

est une expression polynomiale en les coefficients de la matrice A. L'application :

$$f\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbf{R})&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ A&\longmapsto&\chi_{AB}(\lambda)=\det(AB-\lambda\cdot I_n)\end{array}\right.$$

est donc continue. De même, on établit la continuité de l'application :

$$g\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbf{R})&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ A&\longmapsto&\chi_{BA}(\lambda)=\det(BA-\lambda\cdot I_n)\,.\end{array}\right.$$

- Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

$$f(A)=\det(AB-\lambda\cdot I_n)=\det(A)\,\det\left(B-\lambda\cdot A^{-1}\right)=\det\left(B-\lambda\cdot A^{-1}\right)\det(A)=\det(BA-\lambda\cdot I_n)=g(A).$$

- Les applications f et g sont continues et coïncident sur la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Elles coïncident donc sur tout $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, i.e. :

$$(\star)\qquad \forall\,A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\quad \chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda).$$

- Le résultat $(\star)$ ayant été établi pour un couple $(\lambda,B)\in\mathbf{R}\times\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ quelconque, il vient :

$$\forall\,(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2,\quad\forall\,\lambda\in\mathbf{R},\quad\chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda).$$

Comme le corps $\mathbf{R}$ est infini, nous en déduisons que :

$$\forall\,(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2,\quad\chi_{AB}=\chi_{BA}\qquad[\text{identité dans }\mathbf{R}[X]]\,.$$

- Considérons les matrices diagonales par blocs :

$$A:=\mathrm{Diag}\left(E_{1,1},0_{\mathscr{M}_{n-2}(\mathbf{R})}\right)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\quad\text{et}\quad B:=\mathrm{Diag}\left(E_{2,1},0_{\mathscr{M}_{n-2}(\mathbf{R})}\right)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

Avec un calcul par blocs nous obtenons :

$$AB=0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}\quad\text{et}\quad BA=B$$

d'où $\pi_{AB}=X\neq X^2=\pi_{BA}$. ■

Q6. — Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. Comme l'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & R \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array} \right.$$

est continue (cf. question 2) :

$$I := \det(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) = \{\det(A) \,:\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\}$$

est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}$, donc un intervalle. Les matrices diagonales :

$$I_n \quad \text{et} \quad I_n - 2 \cdot E_{1,1}$$

'sont inversibles et ont pour déterminants respectifs 1 et -1. Ainsi -1 et 1 appartiennent à l'intervalle I. Par suite $0 \in I$ et donc :

$$\exists\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \quad \det(A) = 0 \qquad [\text{contradiction}].$$

■

III — Théorème de d'Alembert-Gauß

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geqslant 1$.

Q7. — Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|P(z_0)| > 0$. Démontrer que :

$$\exists\, z \in \mathbf{C}, \quad |P(z)| < |P(z_0)|.$$

• Cas où $z_0 = 0$ et $P(0) = 1$. Nous supposons que P est un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geqslant 1$ tel que $P(0) = 1$ et démontrons qu'il existe un nombre complexe z' tel que $P(z') < 1$.
Si $m \geqslant 1$ désigne la multiplicité de la racine 0 du polynôme $P - 1$ et $Q \in \mathbf{C}[X]$ désigne le quotient de la division euclidienne de $P - 1$ par X^m, nous pouvons écrire :

$$(\star) \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \quad P(z) = 1 + z^m \cdot Q(z)$$

où $Q(0) \neq 0$. Comme 0 est racine du polynôme $Q - Q(0)$, il existe $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $Q = Q(0) + X\,R$. Ainsi, l'identité $(\star)$ peut-elle se réécrire :

$$(\star\star) \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \quad P(z) = 1 + Q(0)\, z^m + z^{m+1}\, R(z).$$

Soient $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ tel que $Q(0) = r\, \mathrm{e}^{i\theta}$ et :

$$\zeta := \sqrt[m]{\frac{1}{r}}\, \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi - \theta}{m}}$$

de sorte que $Q(0)\, \zeta^m = -1$. De $(\star\star)$ on déduit alors :

$$\forall\, z \in \mathbf{C}, \quad P(z\zeta) = 1 - z^m + z^{m+1}\, \zeta^{m+1} R(\zeta\, z)$$

puis, en spécialisant à un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad |P(x\zeta)| \leqslant \left|1 - x^m\right| + \left|x^{m+1}\, \zeta^{m+1} R(\zeta\, x)\right| = 1 - x^m + x^m \left|x \zeta^{m+1} R(\zeta\, x)\right|.$$

Par continuité d'une application polynomiale en 0 :

$$x \zeta^{m+1} R(\zeta\, x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

et donc :

$$\exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}, \quad |x| \leqslant \delta \Longrightarrow \left|x \zeta^{m+1} R(\zeta\, x)\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi pour $x := \min\{1, \delta\} > 0$:

$$|P(x\zeta)| = 1 - x^m + x^m \left|x \zeta^{m+1} R(\zeta\, x)\right| \leqslant 1 - x^m + \frac{1}{2}\, x^m = 1 - \frac{1}{2}\, x^m < 1.$$

Le nombre complexe $z' := x\zeta$ convient donc.

• Cas général. Soient P un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geqslant 1$ et $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|P(z_0)| > 0$. Le polynôme :

$$Q := \frac{P(X+z_0)}{P(z_0)}$$

est un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geqslant 1$ tel que $P(0) = 1$. D'après le premier cas étudié, il existe un nombre complexe z' tel que :

$$\left|Q(z')\right| < 1$$

i.e. :

$$\left|P(z'+z_0)\right| < |P(z_0)|.$$

Le nombre complexe $z := z' + z_0$ vérifie donc $|P(z)| < |P(z_0)|$.

Cette inégalité est attribuée à Argand (1768–1822), qui l'établit par voie géométrique cf. [PDF]. ■

Q8. — Démontrer que :

$$\forall\, R > 0, \quad \exists\, r > 0, \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \quad |z| > r \implies |P(z)| > R.$$

Soit $R > 0$. Si, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, a_k est le coefficient de degré k de P, alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$|P(z)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k\, z^k\right| \geqslant |a_d|\,|z|^d - \left|\sum_{k=0}^{d-1} a_k\, z^k\right| \geqslant |a_d|\,|z|^d - \left(\sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\,|z|^k\right) = Q(|z|)$$

où $Q := |a_d|\,X^d - \left(\sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\,X^k\right) \in \mathbf{R}[X]$. Comme :

$$Q(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} |a_d|\,x^d \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad x > r \Longrightarrow Q(x) > R.$$

Si $z \in \mathbf{C}$ vérifie $|z| > r$, alors :

$$|P(z)| \geqslant Q(|z|) > r.$$

■

Q9. — Démontrer que :

$$\exists\, z_m \in \mathbf{C}, \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \quad |P(z_m)| \leqslant |P(z)|.$$

Comme P n'est pas un polynôme constant, il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$. En appliquant le résultat précédent avec $R \leftarrow |P(z_0)| > 0$, nous obtenons :

$$\exists\, r > 0, \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \quad |z| > r \Longrightarrow |P(z)| > |P(z_0)|$$

et remarquons que $|z_0| \leqslant r$. L'ensemble :

$$\overline{D(0,r)} := \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| \leqslant r\}$$

est fermé, borné donc compact et l'application :

$$\left|\begin{array}{ccc} \overline{D(0,r)} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ z & \longmapsto & |P(z)| \end{array}\right.$$

est continue, puis que le polynôme P et l'application « module » le sont). D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $z_m \in \overline{D(0,r)}$ tel que :

$$(\star) \quad \forall\, z \in \overline{D(0,r)}, \quad |P(z_m)| \leqslant |P(z)|.$$

D'autre part, comme $z_0 \in \overline{D(0,r)}$:

$$(\star\star) \quad \forall\, z \in \mathbf{C} \setminus \overline{D(0,r)}, \quad |P(z_m)| \leqslant |P(z_0)| < |P(z)|.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons que :

$$\forall\, z \in \mathbf{C}, \quad |P(z_m)| \leqslant |P(z)|.$$

■

Q10. — Déduire de ce qui précède que la polynôme P possède une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauß).

Nous raisonnons par l'absurde et supposons que :

$$(\star) \quad \forall\, z' \in \mathbf{C}, \quad P(z') \neq 0.$$

La question précédente livre un nombre complexe z_m tel que :

$$\forall\, z \in \mathbf{C}, \quad |P(z_m)| \leqslant |P(z)|.$$

Puisque $|P(z_m)| > 0$ (cf. $(\star)$), l'inégalité d'Argand nous apprend qu'il existe un nombre complexe z_1 tel que $|P(z_1)| < |P(z_m)|$. Il vient ainsi :

$$|P(z_1)| < |P(z_m)| \leqslant |P(z_1)| \qquad [\text{contradiction}].$$

■

IV — Théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ est muni de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}), \quad ||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x)\right|.$$

Le symbole $\mathscr{P}$ désigne la sous-$\mathbf{R}$-algèbre de $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ formée des fonctions polynomiales. Nous nous proposons de donner une démonstration probabiliste du théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß énoncé ci-dessous.

Théorème (Weierstraß) — *L'ensemble $\mathscr{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$, i.e. :*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}), \quad \exists\, (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{P}^{\mathbf{N}}, \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} f.$$

Nous notons $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$. Nous posons :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \qquad \left[\textit{polynôme de Bernstein}\right].$$

Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

Q11. — Démontrer que :

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \mathbf{P}\left(|S_n - nx| > n\alpha\right) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

Puisque S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$, l'espérance de S_n est $E(S_n) = nx$ et sa variance est $V(S_n) = nx(1-x)$. Appliquons alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall\, \beta > 0, \quad P\left(|S_n - E(S_n)| > \beta\right) \leqslant \frac{V(S_n)}{\beta^2}$$

En choisissant $\beta = n\alpha$ (avec $\alpha > 0$), on obtient ainsi :

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$$

Mais le polynôme $x \longmapsto x(1-x)$, qui a pour racines 0 et 1 , atteint son maximum en $x = 1/2$, et ce maximum vaut $1/4$. On a donc la majoration :

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

■

Q12. — Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$. Démontrer que son espérance vérifie :

$$\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x).$$

D'après la formule de transfert, on a, puisque $S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$:

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)\, f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Mais par définition de la loi binomiale, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, donc :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(f)(x)$$

■

Q13. — Soit $\varepsilon > 0$. Justifier simplement que :

$$\exists\, \alpha > 0, \quad \forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |a-b| \leqslant \alpha \implies \left|f(a) - f(b)\right| < \varepsilon$$

puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha$.

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[0,1]$, donc uniformément continue (c'est le théorème de Heine). Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |a-b| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$$

Pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, on a alors $0 \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 1$, donc en utilisant l'implication précédente avec $a = \frac{k}{n}$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

■

Q14. — Justifier que :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k)\right| \leqslant 2\,||f||_\infty\, \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right| &\leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P(S_n=k)\\ &\leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} 2\|f\|_\infty P(S_n=k)\\ &= 2\|f\|_\infty\times P\left(\bigsqcup_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}(S_n=k)\right),\end{aligned}$$

la réunion étant disjointe. Mais pour tout $\omega\in\Omega$, on a :

$$\begin{aligned}\omega\in\bigsqcup_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}(S_n=k) &\iff \exists k\in\{0,\cdots,n\},\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha \text{ et } S_n(\omega)=k\\ &\iff \left|\frac{S_n(\omega)}{n}-x\right|>\alpha\\ &\iff \omega\in\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right),\end{aligned}$$

ce qui fait que $P\left(\bigsqcup_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}(S_n=k)\right)=P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$.
La majoration de la somme étudiée se réécrit donc :

$$\left|\sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leqslant 2\|f\|_\infty\times P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$$

■

Q15. — Démontrer que :

$$\exists\, n_0\in\mathbf{N},\quad \forall\, n\geqslant n_0,\quad \forall\, x\in[0,1],\quad \left|B_n(f)(x)-f(x)\right|<2\varepsilon$$

puis conclure.

• Démonstration du théorème de Weierstraß pour une fonction continue sur $[0,1]$.
Soit $\varepsilon>0$. Considérons le réel $\alpha>0$ introduit dans la question 13.
Fixons $x\in[0,1]$. Pour estimer la différence $\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|$, il suffit de réécrire $f(x)$ sous la forme d'une somme :

$$\forall x\in[0,1],\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(x)\qquad\text{[formule du binôme]}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(x)\right|\\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|.\end{aligned}$$

Décomposons alors cette somme suivant les indices $k\in[\![0,n]\!]$ tels que $\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$ et suivant ceux tels que $\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha$:

$$\begin{aligned}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\\ &\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P(S_n=k)+\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|.\end{aligned}$$

D'après la question 13, on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon$ pour tous les k tels que $\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$. On en déduit une majoration de la première somme :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P(S_n=k)\leqslant\varepsilon\times\underbrace{\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}P(S_n=k)}_{\leqslant P(\Omega)}\leqslant\varepsilon.$$

Quant à la deuxième somme, on peut la majorer en utilisant le résultat de la question 14 :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leqslant 2\|f\|_\infty\times P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$$

Or $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=P(|S_n-nx|>n\alpha)\leqslant\frac{1}{4n\alpha^2}$ (d'après la question 11), donc :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

A ce stade, on a montré :

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad\exists\,\alpha>0,\quad\forall\,n\in\mathbb{N},\quad\forall\,x\in[0,1],\quad\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

Reste à choisir n « suffisamment grand ». En posant $n_0=E\left(\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2}\right)+1$, on a :

$$\forall\,n\geqslant n_0,\quad\forall\,x\in[0,1],\quad\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\leqslant 2\varepsilon.$$

Finalement, on a établi que :

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad\exists\,n_0\in\mathbb{N},\quad\forall\,n\geqslant n_0,\quad\forall\,x\in[0,1],\quad\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\leqslant 2\varepsilon.$$

ce qui signifie exactement que la suite des polynômes de Bernstein $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. La fonction f étant une quelconque fonction continue de $[0,1]$, on a démontré le théorème de Weierstraß sur $[0,1]$.

- Démonstration du théorème de Weierstraß pour une fonction continue sur un segment $[a,b]$ quelconque.

Soient a,b des réels tels que $a<b$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction continue.
Les applications :

$$\varphi\left|\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & [a,b]\\ x & \longmapsto & a+x(b-a)\end{array}\right.\quad\text{et}\quad\psi\left|\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & [0,1]\\ x & \longmapsto & \frac{x-a}{b-a}\end{array}\right.$$

sont bien définies, polynomiales (donc continues) et réciproques l'une de l'autre.
La fonction $f\circ\varphi$ est continue sur $[0,1]$. D'après le premier cas démontré :

$$(\star)\quad\underbrace{\sup\left\{B_n(f\circ\varphi)(x)-f(\varphi(x))\ :\ x\in[0,1]\right\}}_{||B_n(f\circ\varphi)-f\circ\varphi||_{\infty,[0,1]}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Comme :

$$\forall\,n\in\mathbf{N},\quad\forall\,x\in[0,1],\quad B_n(f\circ\varphi)(x)-f(\varphi(x))=B_n(f\circ\varphi)(\psi(\varphi(x)))-f(\varphi(x))$$

et φ est surjective, il vient :

$$\left\{B_n(f\circ\varphi)(x)-f(\varphi(x))\ :\ x\in[0,1]\right\}=\left\{B_n(f\circ\varphi)(\psi(u))-f(u)\ :\ u\in[a,b]\right\}$$

puis :

$$\underbrace{\sup\left\{B_n(f\circ\varphi)(x)-f(\varphi(x))\ :\ x\in[0,1]\right\}}_{||B_n(f\circ\varphi)-f\circ\varphi||_{\infty,[0,1]}}=\underbrace{\sup\left\{B_n(f\circ\varphi)(\psi(u))-f(u)\ :\ u\in[a,b]\right\}}_{||B_n(f\circ\varphi)\circ\psi-f||_{\infty,[a,b]}}.$$

D'après ($\star$), la suite de fonctions $\left(B_n(f\circ\varphi)\circ\psi\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$. Comme pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction $B_n(f\circ\varphi)\circ\psi$ est polynomiale (composée des deux fonctions polynomiales $B_n(f\circ\varphi)$ et ψ), le théorème de Weierstraß est démontré.

■

V — Une application du théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß

Soit $\mathbf{R}[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient* N_1 *et* N_2 *deux applications définies sur* $\mathbf{R}[X]$ *par :*

$$N_1\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+\\ P & \longmapsto & \displaystyle\sup_{x\in[-2,-1]}|P(x)|\end{array}\right.\qquad \textit{et}\qquad N_1\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+\\ P & \longmapsto & \displaystyle\sup_{x\in[1,2]}|P(x)|\end{array}\right..$$

Q16. — Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbf{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

- L'application N_1 est bien définie (car tout polynôme $P\in\mathbf{R}[X]$ est continu, donc borné sur le segment $[-2,-1]$) et clairement positive.
- Si $N_1(P)=0$, alors $\sup_{[-2,-1]}|P|=0$, ce qui signifie que la fonction positive $|P|$ est nulle sur le segment $[-2,-1]$. Le polynôme P possède alors une infinité de racines, ce qui entraîne $P=0$.
- Pour tout $(\lambda,P)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}[X]$, on a :

$$N_1(\lambda P)=\sup_{x\in[-2,-1]}|\lambda P|(x)=\sup_{x\in[-2,-1]}|\lambda||P(x)|=|\lambda|\times\sup_{x\in[-2,-1]}|P(x)|$$

(car la constante $|\lambda|$ est positive). Donc $N_1(\lambda P)=|\lambda|N_1(P)$.
- Pour tous polynômes P,Q de $\mathbf{R}[X]$ et pour tout $x\in[-2,-1]$, on a :

$$|P+Q|(x)=|P(x)+Q(x)|\leqslant|P(x)|+|Q(x)|\leqslant N_1(P)+N_1(Q),$$

puisque $|P(x)|\leqslant N_1(P)$ et $|Q(x)|\leqslant N_1(Q)$.
Le réel $N_1(P)+N_1(Q)$ est un majorant de l'ensemble $\{|P+Q|(x),x\in[-2,-1]\}$. Il est donc plus grand que la borne supérieure de cet ensemble, i.e. :

$$N_1(P)+N_1(Q)\geqslant\sup\{|P+Q|(x),x\in[-2,-1]\}=N_1(P+Q)$$

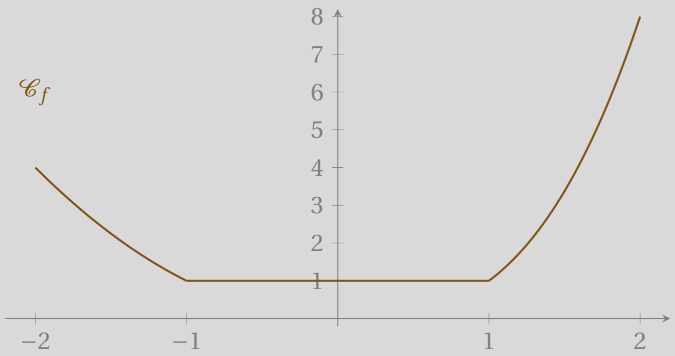
■

On note f *la fonction définie sur l'intervalle* $[-2,2]$ *par :*

$$f\left|\begin{array}{ccc}[-2,2] & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases}x^2 & \textit{si } x\in[-2,-1]\\ 1 & \textit{si } x\in]-1,1[\\ x^3 & \textit{si } x\in[1,2].\end{cases}\end{array}\right.$$

Q17. — Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.

Nous donnons tout d'abord l'allure de la représentation graphique de la fonction f.



La fonction f étant clairement continue sur $[-2,2]$. Il existe donc, d'après le théorème de Weierstrass, une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[-2,2]$.
Cela signifie que :

$$\sup_{x\in[-2,2]} \left|P_n(x) - f(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

Q18. — Démontrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers X^2 dans $(\mathbf{R}[X], N_1)$.

Comme f coïncide avec la fonction polynomiale $x \longmapsto x^2$ sur $[-2,-1]$, on a :

$$0 \leqslant N_1\left(P_n - X^2\right) := \sup_{x\in[-2,-1]} \left|P_n(x) - x^2\right| = \sup_{x\in[-2,-1]} \left|P_n(x) - f(x)\right| \leqslant \sup_{x\in[-2,2]} \left|P_n(x) - f(x)\right|.$$

Par théorème d'encadrement :

$$N_1\left(P_n - f_1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui prouve que, dans l'espace normé $(\mathbf{R}[X], N_1)$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le polynôme X^2. ■

Q19. — Étudier la convergence de la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $(\mathbf{R}[X], N_2)$.

De manière analogue, dans l'espace normé $(\mathbf{R}[X], N_2)$, la même suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le polynôme X^3, puisque f coïncide avec la fonction polynomiale $x \longmapsto x^3$ sur $[1,2]$. ■

VI — Intérieur de l'ensemble des matrices réelles diagonalisables

Soient un entier $n \geqslant 2$.

Q20. — Démontrer que :

$$\Omega_n := \left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \;:\; P \text{ est non nul et possède } n \text{ racines réelles distinctes}\right\}$$

est un ouvert de $\mathbf{R}_n[X]$.

Soit $P \in \Omega_n$ de coefficient dominant noté c. Alors, il existe des réels $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ tels que :

$$(\star) \quad P = c \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

• Analyse du signe du polynôme P. Grâce à l'identité $(\star)$, nous pouvons établir que le signe de P est :

— $\operatorname{sgn}(c\cdot(-1)^n)$ sur $]-\infty, \alpha_1[$;

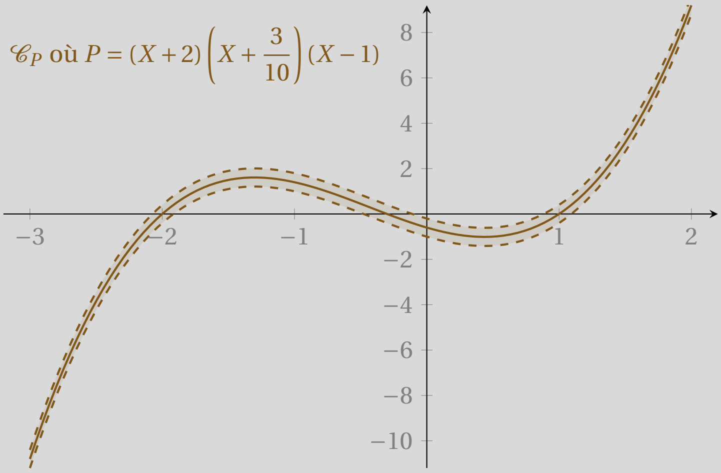
— $\operatorname{sgn}\left(c\cdot(-1)^{n-k}\right)$ sur $]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$, pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$;
— $\operatorname{sgn}(c)$ sur $]\alpha_n,+\infty[$.

Le signe de P change donc en chacune de ses racines.

• Choix d'une norme sur $\mathbf{R}_n[X]$ adaptée au polynôme P. Nous munissons $\mathbf{R}_n[X]$ de la norme :

$$N \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ Q & \longmapsto & \sup\left\{|Q(x)|\ :\ x\in[\alpha_1-1,\alpha_n+1]\right\} \end{array}\right.$$

• Heuristique La norme N est la norme de la convergence uniforme sur le segment $[\alpha_1-1,\alpha_n+1]$. Soit $Q\in\mathbf{R}_n[X]$. Alors Q est « proche » de P pour la norme N si et seulement si $\mathscr{C}_Q$ est située dans un tube « mince » autour de $\mathscr{C}_P$ au-dessus du segment $[\alpha_1-1,\alpha_n+1]$. On conjecture que, si $\mathscr{C}_Q$ est dans un tube « suffisamment mince » autour de $\mathscr{C}_P$ au-dessus du segment $[\alpha_1-1,\alpha_n+1]$, alors Q changera suffisamment de fois de signe, pour avoir n racines réelles distinctes (théorème des valeurs intermédiaires). Nous quantifions à présent cette approche qualitative.



• Choix du rayon de la boule centrée en P pour la norme N. Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, soit $\beta_k\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$ tel que :

$$\left|P(\beta_k)\right|=\sup\{|P(x)|\ :\ x\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]\}>0 \qquad \text{[théorème des bornes atteintes]}.$$

On pose également $\beta_0=\alpha_1-1$ et $\beta_n=\alpha_n+1$ afin d'homogénéiser les notations. Nous introduisons alors

$$\varepsilon:=\min\left\{\left|P(\beta_0)\right|,\left|P(\beta_1)\right|,\ldots,\left|P(\beta_{n-1})\right|,\left|P(\beta_n)\right|\right\}>0$$

de sorte que :

$$\forall\,k\in[\![0,n]\!],\quad \begin{cases} P(\beta_k)\geqslant\varepsilon & \text{si } P(\beta_k)>0\\ -P(\beta_k)\geqslant\varepsilon & \text{si } P(\beta_k)<0.\end{cases}$$

Nous démontrons que :

$$\mathscr{V}_P:=\left\{Q\in\mathbf{R}_n[X]\ :\ N(Q-P)<\varepsilon\right\} \qquad \left[\text{ouvert de } \mathbf{R}_n[X] \text{ car boule ouverte pour la norme } N\right]$$

vérifie $\mathscr{V}_P\subset\Omega_n$.

• L'inclusion $\mathscr{V}_P\subset\Omega_n$. Soit $Q\in\mathscr{V}_P$. Alors $Q\in\mathbf{R}_n[X]$ et :

$$\forall\,x\in[\beta_0,\beta_n],\quad |Q(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

En particulier :

$$\forall\,k\in[\![0,n]\!],\quad P(\beta_k)-\varepsilon<Q(\beta_k)<P(\beta_k)+\varepsilon.$$

Nous en déduisons que :

$$\forall\,k\in[\![0,n]\!],\quad \begin{cases} Q(\beta_k)>P(\beta_k)-\varepsilon\geqslant 0 & \text{si } P(\beta_k)>0\\ Q(\beta_k)<P(\beta_k)+\varepsilon\leqslant 0 & \text{si } P(\beta_k)<0.\end{cases}$$

Nous en déduisons que le polynôme Q est non nul et que, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, les nombres $P(\beta_k)$ et $Q(\beta_k)$ ont même signe. D'après l'étude du signe de P, nous savons alors que :

$$\forall\,k\in[\![0,n-1]\!],\quad Q(\beta_k)\,Q(\beta_{k+1})<0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer que le polynôme Q s'annule (au moins) une fois sur l'intervalle $]\beta_k,\beta_{k+1}[$, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. Le polynôme Q, que nous savions déjà non nul, s'annule en n points réels distincts. Il appartient donc à Ω_n.

• Conclusion. D'après ce qui précède, $\displaystyle\bigcup_{P\in\Omega_n}\mathscr{V}_P\subset\Omega_n$. Comme, pour tout $P\in\Omega_n$, $P\in\mathscr{V}_P$, l'inclusion réciproque est claire. Ainsi :

$$\Omega_n=\bigcup_{P\in\Omega_n}\mathscr{V}_P$$

est un ouvert de $\mathbf{R}_n[X]$, comme réunion d'un nombre quelconque d'ouverts de $\mathbf{R}_n[X]$. ■

Q21. — Démontrer que :

$$\mathscr{U}_n := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A \text{ possède } n \text{ valeurs propres réelles distinctes}\}$$

est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

L'application :

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array} \right.$$

est bien définie. Elle est en outre continue, puisque pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, les coefficients du polynôme χ_A sont des polynômes en les coefficients de la matrice A. D'après la question précédente :

$$\mathscr{U}_n = \chi^{-1}(\Omega_n)$$

est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. ■

Q22. — Démontrer que $\mathscr{U}_n$ est l'intérieur de :

$$\mathscr{D}'_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\}.$$

- L'intérieur $\overset{\circ}{\widehat{\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})}}$ de $\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})$ est le plus grand ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ inclus dans $\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})$.
- Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ possédant n valeurs propres réelles distinctes est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ d'après le cours. Ainsi $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{D}'_n(\mathbf{R})$. D'après la question précédente, nous en déduisons :

$$(\star) \quad \mathscr{U}_n \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})}}.$$

- Nous démontrons que l'inclusion $(\star)$ est une égalité, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une matrice $A \in \overset{\circ}{\widehat{\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})}}$ qui possède une valeur propre réelle de multiplicité au moins 2. Soient λ une telle valeur propre de A et $m \geqslant 2$ sa multiplicité. Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et des réels $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ distincts de λ tels que :

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)\, P^{-1}.$$

L'application :

$$N \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ M & \longmapsto & \sup\left\{ \left[P^{-1} M P\right]_{i,j} \ : \ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \right\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Comme $A \in \overset{\circ}{\widehat{\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})}}$:

$$(\star\star) \quad \exists r > 0, \quad B_N(A,r) \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})}} \subset \mathscr{D}'_n(\mathbf{R}).$$

La matrice :

$$B := P \underbrace{\left(\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n) + \frac{r}{2} \cdot E_{1,2}\right)}_{T} P^{-1}$$

vérifie $N(B-A) = \dfrac{r}{2} < r$ donc appartient à $B_N(A,r)$. D'après $(\star\star)$, la matrice B est alors diagonalisable sur $\mathbf{R}$. La matrice T, semblable à B, est donc également diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Or λ est valeur propre de T, de multiplicité m et :

$$\dim(E_\lambda(T)) = m - 1 \qquad [\text{contradiction}].$$

■