TOPOLOGIE

par David Blottière, le 2 janvier 2024 à 09h58

DM 7

I — Consignes

(C1) — Le devoir est à remettre le **mardi 28 novembre**.

(C2) — Les étudiants de MPI traiteront les parties II, III, IV et V, ceux de MPI* les parties II, III, IV, V et VI.

(C3) — Vous attacherez la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la rédaction.

(C4) — Les copies mal présentées, manquant de soin ou souffrant d'un défaut patent d'argumentation ou ne respectant pas toutes les règles énoncées en (C3) ne seront pas corrigées.

II — Propriétés topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q1. — L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est-il fermé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

Q2. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q3. — Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Justifier que :

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

Q4. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q5. — Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, démontrer que les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique. À l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

Q6. — Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

III — Théorème de d'Alembert-Gauß

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geqslant 1$.

Q7. — Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|P(z_0)| > 0$. Démontrer que :

$$\exists z \in \mathbf{C}, \quad |P(z)| < |P(z_0)|.$$

Q8. — Démontrer que :

$$\forall R > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad |z| > r \implies |P(z)| > R.$$

Q9. — Démontrer que :

$$\exists z_m \in \mathbf{C}, \quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad |P(z_m)| \leqslant |P(z)|.$$

Q10. — Déduire de ce qui précède que la polynôme P possède une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauß).

IV — Théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ est muni de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}), \quad ||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Le symbole $\mathscr{P}$ désigne la sous-$\mathbf{R}$-algèbre de $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ formée des fonctions polynomiales. Nous nous proposons de donner une démonstration probabiliste du théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß énoncé ci-dessous.

Théorème (Weierstraß) — *L'ensemble $\mathscr{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}),||\cdot||_\infty)$, i.e. :*

$$\forall f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}), \quad \exists (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{P}^{\mathbf{N}}, \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} f.$$

Nous notons $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$. Nous posons :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \qquad [\textit{polynôme de Bernstein}].$$

Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

Q11. — Démontrer que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

Q12. — Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$. Démontrer que son espérance vérifie :

$$\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x).$$

Q13. — Soit $\varepsilon > 0$. Justifier simplement que :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |a-b| \leqslant \alpha \implies |f(a) - f(b)| < \varepsilon$$

puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha$.

Q14. — Justifier que :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k)\right| \leqslant 2\,||f||_\infty\, \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

Q15. — Démontrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \forall x \in [0,1], \quad |B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

puis conclure.

V — Une application du théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß

Soit $\mathbf{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbf{R}[X]$ par :

$$N_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \longmapsto & \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad N_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \longmapsto & \sup_{x\in[1,2]} |P(x)| \end{array} \right. .$$

Q16. — Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbf{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-2,2] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \textit{si } x \in [-2,-1] \\ 1 & \textit{si } x \in]-1,1[\\ x^3 & \textit{si } x \in [1,2]. \end{cases} \end{array} \right.$$

Q17. — Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.

Q18. — Démontrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers X^2 dans $(\mathbf{R}[X], N_1)$.

Q19. — Étudier la convergence de la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $(\mathbf{R}[X], N_2)$.

VI — Intérieur de l'ensemble des matrices réelles diagonalisables

Soient un entier $n \geqslant 2$.

Q20. — Démontrer que :

$$\Omega_n := \left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \;:\; P \text{ est non nul et possède } n \text{ racines réelles distinctes}\right\}$$

est un ouvert de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q21. — Démontrer que :

$$\mathscr{U}_n := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; A \text{ possède } n \text{ valeurs propres réelles distinctes}\right\}$$

est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q22. — Démontrer que $\mathscr{U}_n$ est l'intérieur de :

$$\mathscr{D}'_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; A \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\right\}.$$