DES SOUS-GROUPES DU GROUPE LINÉAIRE

DM* 6

par David Blottière, le 1er novembre 2023 à 20h17

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbf{K}$ un corps.

I — LES GROUPES $(\mathbf{K}^*, \times)$ ET $(\mathbf{K}, +)$ APPARAISSENT DANS $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$

Q1. — Donner un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$ isomorphe au groupe $(\mathbf{K}^*, \times)$.

Q2. — Donner un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$ isomorphe au groupe $(\mathbf{K}, +)$.

II — TOUT GROUPE DE CARDINAL n APPARAÎT DANS $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$

Q3. — Soit un groupe $(G, *)$. Démontrer que $(G, *)$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe $(S_G, \circ)$ des permutations de l'ensemble G (Arthur Cayley, 1854). On pourra considérer, pour tout $g \in G$, la translation à gauche :

$$\tau_g \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & g * h. \end{array} \right.$$

Q4. — Soit $(G, *)$ un groupe fini de cardinal n. Démontrer que $(G, *)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$.

III — LES SOUS-GROUPES ABÉLIENS FINIS DE $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \times)$

Q5. — Démontrer que les sous-groupes finis de $(\mathbf{C}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbf{C}), \times)$ sont les $\mathbf{U}_d := \{z \in \mathbf{C} : z^d = 1\}$, où $d \in \mathbf{N}^*$.

Q6. — Soient un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, un entier $p \geqslant 2$ et des endomorphismes $u_1, \ldots, u_p$ de E qui sont diagonalisables et commutent deux-à-deux. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que toutes les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_p)$ sont diagonales.

Q7. — Énoncer l'incarnation matricielle du résultat de la question précédente.

Soit G un sous-groupe abélien fini de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \times)$ dont nous noterons m le cardinal.

Q8. — Démontrer que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe produit $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^n$.

La théorie des groupes abéliens (appelés également $\mathbf{Z}$-modules) de type fini, qui est une variante de celle des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, permet de démontrer que tout sous-groupe de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^n$ est le produit de $r \in [\![1, n]\!]$ groupes cycliques. Ainsi, de la question 8, nous pouvons déduire qu'il existe $r \in [\![1, n]\!]$ et des entiers $d_1 \geqslant 1, \ldots, d_r \geqslant 1$ tels que :

$$G \simeq \mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \times \ldots \times \mathbf{Z}/d_r\mathbf{Z} \qquad [\textit{produit de } r \textit{ groupes cycliques}].$$

Q9. — Soient des entiers $m_1 \geqslant 2$ et $m_2 \geqslant 2$. Démontrer que si les groupes $(\mathrm{GL}_{m_1}(\mathbf{C}), \times)$ et $(\mathrm{GL}_{m_2}(\mathbf{C}), \times)$ sont isomorphes, alors $m_1 = m_2$.

IV — SOUS-GROUPE D'EXPOSANT FINI DE $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$.

Un groupe $(G, *)$, de neutre noté e, est dit d'exposant fini si :

$$\exists k \in \mathbf{N}^*, \quad \forall g \in G, \quad g^k = e.$$

Q10. — Soit un nombre premier p. Démontrer que $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p(X)), \times)$ contient un sous-groupe infini, d'exposant fini.

Nous voulons établir que, tout sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \times)$ *d'exposant fini est fini (William Burnside, 1905).*

Q11. — Soient des nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$, tous de module 1, tels que $\sum_{i=1}^{n} z_i = n$. Démontrer que :

$$z_1 = \ldots = z_n = 1.$$

Soit G *un sous-groupe de* $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \times)$ *d'exposant fini.*

Q12. — Justifier que l'ensemble :

$$T := \left\{\mathrm{Tr}\left(g\right) \,:\, g \in G\right\}$$

est fini.

Soit $(g_1, \ldots, g_d)$ *une famille génératrice finie du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(G)$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. *Nous considérons l'application :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & T^d \\ g & \longmapsto & \left(\mathrm{Tr}\left(gg_1\right), \ldots, \mathrm{Tr}\left(gg_d\right)\right). \end{array} \right.$$

Q13. — Démontrer que l'application f est injective et conclure.

Q14. — Soit p un nombre premier. Les groupes $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \times)$ et $\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbf{F}_p(X)\right), \times\right)$ sont-ils isomorphes?

V — MAJORATION DU CARDINAL D'UN SOUS-GROUPE FINI DE $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}), \times)$.

On pose :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) := \left\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \,:\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) \text{ et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})\right\}.$$

Q15. — Démontrer que :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) \,:\, \mathrm{Det}(M) \in \{-1, 1\}\}.$$

Q16. — Justifier que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \times)$.

Soient un nombre premier $p \geqslant 3$ *et l'application :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ \left(a_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} & \longmapsto & \left(\overline{a_{i,j}}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}. \end{array} \right.$$

Q17. — Justifier que l'application f est bien définie.

Nous cherchons à démontrer que la restriction de f *à un sous-groupe fini de* $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}), \times)$ *est injective (Jean-Pierre Serre).*

Nous considérons un sous-groupe fini G *de* $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}), \times)$ *et* $g \in G \cap \mathrm{Ker}\left(f\right)$. *Ainsi :*

$$\exists\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}), \quad g = I_n + p \cdot M.$$

Q18. — Vérifier que :

$$\chi_g(X) = p^n \cdot \chi_M\left(\frac{X-1}{p}\right).$$

Q19. — Justifier que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}\left(\chi_g\right) \subset \mathbf{U}$.

Q20. — Démontrer que :

$$\chi_g(1) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(\chi_g)} (1-\lambda)^{m_\lambda}$$

est un nombre entier multiple de p^n et en déduire que 1 est racine de χ_g.

Q21. — Démontrer que $\chi_g = (X-1)^n$ et conclure.

Q22. — En déduire que :

$$\mathrm{Card}(G) \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \left(3^n - 3^k\right).$$

Nous déduisons de cette étude que tout sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}), \times)$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_3), \times)$ *ces derniers étant en nombre fini.*