Révisions d'algèbre linéaire

DM 3

par David Blottière, le 5 octobre 2023 à 05h54

Problème 1 — Carré proportionnel à l'endomorphisme

Soit E un espace vectoriel réel non réduit à $\{0_E\}$. Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2 = ku$.

Soit $u \in A_k$.

Q1. — L'endomorphisme u peut-il être inversible ? Qu'est-ce que u dans ce cas ?

Nous effectuons une disjonction de cas.

- *Cas où $k = 0$.* Si $k = 0$, alors $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc u^2 n'est pas inversible. u n'est pas inversible, car s'il l'était $u^2 = u \circ u$ le serait, ce qui n'est pas.

  $$\boxed{\text{Si } k = 0, \text{ alors } u \text{ n'est pas inversible.}}$$

- *Cas où $k \neq 0$.* Supposons u inversible. Alors en composant par u^{-1} chaque membre de l'identité $u^2 = ku$, il vient $u = k\,\mathrm{id}_E$.
  Si à présent $u = k\,\mathrm{id}_E$, alors $u \in A_k$ (clair) et :

  $$u \circ \frac{1}{k}\mathrm{id}_E = \frac{1}{k}\mathrm{id}_E \circ u = \mathrm{id}_E\,.$$

  Donc u est inversible et $u^{-1} = \dfrac{1}{k}\mathrm{id}_E\,.$

  $$\boxed{\text{Si } k \neq 0, \text{ alors } u \in A_k \text{ est inversible si et seulement si } u = k\,\mathrm{id}_E.}$$

■

Q2. — Déterminer $u(x)$, pour $x \in \mathrm{Im}(u)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $x' \in E$ tel que $x = u(x')$. Donc $u(x) = u(u(x')) = k\,u(x') = k\,x$.

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathrm{Im}(u), \text{ alors } u(x) = k\,x.}$$

■

Q3. — Démontrer que, si $k \neq 0$, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Que dire de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$, si $k = 0$?

- *Cas où $k \neq 0$.*
  - *Démonstration de $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.* Comme $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels

de E, l'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ est claire. Démontrons l'autre.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors $0 = u(x) = k\,x$, d'après la question 2. Comme $k \neq 0$, il vient $x = 0$.

– *Démonstration de Ker(u) + Im$(u) = E$.* Comme $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) \subset E$ est claire. Démontrons l'autre.
Soit $x \in E$. On cherche $x_1 \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(u)$ tels que

$$x = x_1 + x_2. \tag{1}$$

Pour cela, nous raisonnons par analyse-synthèse.

· *Analyse* Supposons qu'une telle décomposition de x existe. En appliquant u à chaque membre de (1), il vient

$$u(x) = k\,x_2$$

en utilisant à nouveau 2. Comme $k \neq 0$, nous en déduisons :

$$x_2 = \frac{1}{k}\,u(x) = u\left(\frac{1}{k}\,x\right).$$

D'après (1), $x_1 = x - u\left(\frac{1}{k}\,x\right)$.

· *Synthèse* Soient x_1 et x_2 comme en fin d'analyse. Il est clair que $x_2 \in \mathrm{Im}(u)$ et que $x_1 + x_2 = x$. Ensuite, comme :

$$u(x_1) = u\left(x - u\left(\frac{1}{k}\,x\right)\right) = u(x) - \frac{1}{k}\,u(u(x)) = u(x) - \frac{1}{k}\,k\,u(x) = 0$$

le vecteur x_1 est dans $\mathrm{Ker}(u)$.

Donc

$$\boxed{\text{si } k \neq 0, \text{ alors } E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u).}$$

- *Cas où $k = 0$.* Alors $u^2 = 0$ et on vérifie aisément que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $x' \in E$ tel que $x = u(x')$ et :

$$u(x) = u(u(x')) = 0.u(x') = 0.$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

$$\boxed{\text{Si } k = 0, \text{ alors } \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$$

■

Q4. — On suppose que E est de dimension finie Lorsque $k \neq 0$, comment doit-on choisir une base de E pour que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ? Quelle sera alors cette matrice ? Si $k = 0$, peut-on trouver une base de E telle que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ?

<u>Cas où $k \neq 0$</u>

- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit diagonale. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors il existe $\lambda_i \in \mathbf{R}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
  . Si $\lambda_i = 0$, alors $e_i \in \mathrm{Ker}(u)$.
  . Si $\lambda_i \neq 0$, alors
  $$e_i = \frac{1}{\lambda_i}\,u(e_i) = u\left(\frac{1}{\lambda_i}\,e_i\right)$$
  et donc $e_i \in \mathrm{Im}(u)$.

  Ainsi $e_i \in \mathrm{Ker}(u)$ ou $e_i \in \mathrm{Im}(u)$.
- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in \mathrm{Ker}(u)$ ou $e_i \in \mathrm{Im}(u)$. Alors pour

tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } e_i \in \mathrm{Ker}(u) \\ k\, e_i & \text{si } e_i \in \mathrm{Im}(u), \text{ d'après 1 b).} \end{cases}$$

Dans tous les cas, $u(e_i)$ est multiple de e_i, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.

Si $k \neq 0$, alors $\mathscr{B}$ est une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si tout vecteur de $\mathscr{B}$ est dans $\mathrm{Ker}(u)$ ou dans $\mathrm{Im}(u)$.

Un vecteur d'une base de E ne peut être à la fois dans $\mathrm{Ker}(u)$ et dans $\mathrm{Im}(u)$, sinon il serait nul, par 1 c). Donc :

Si $k \neq 0$, alors $\mathscr{B}$ est une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si tout vecteur de $\mathscr{B}$ est soit dans $\mathrm{Ker}(u)$, soit dans $\mathrm{Im}(u)$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Nous observons que : tout vecteur de $\mathscr{B}$ est soit dans $\mathrm{Ker}(u)$, soit dans $\mathrm{Im}(u)$ si et seulement si la base $\mathscr{B}$ est adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$, à l'ordre des vecteurs près. Donc :

Si $k \neq 0$, alors $\mathscr{B}$ est une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si la base $\mathscr{B}$ est adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$, à l'ordre des vecteurs près.

En particulier, si l'on prend $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.

D'après 1 b) et ce qui précède, si $\mathscr{B}$ est une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale alors :

(α) $\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)]_{ii} = 0$ ou k

(β) la diagonale de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ contiendra $r := \mathrm{rang}(u)$ fois le nombre k et $n - r$ fois le nombre 0.

Dans le cas particulier où la base $\mathscr{B}$ est adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$ alors nous avons la description par blocs suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} k.I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Cas où $k = 0$</u>

- Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit diagonale. Notons $d_1, \ldots, d_n$ ses coefficients diagonaux, i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Alors :

$$0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^2\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)^2 = \mathrm{Diag}\left(d_1^2, \ldots, d_n^2\right).$$

  Par suite $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$ et ainsi $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- Réciproquement si $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$ est diagonale, pour toute base $\mathscr{B}$ de E.

Si $k = 0$, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

■

Soient u et v des endomorphismes de E appartenant à A_k. On suppose que $k \neq 0$.

Q5. — Démontrer que $u \circ v + v \circ u = 0$ implique $u \circ v = v \circ u = 0$.

Ici $k \neq 0$. Supposons $u \circ v + v \circ u = 0$.

- Démonstration de $v \circ u = 0$.
  Puisque $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u)$, il (faut et il) suffit de montrer que :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & v(u(x)), \text{ pour tout } x \in \operatorname{Ker}(u). \\ (\beta) & v(u(x)), \text{ pour tout } x \in \operatorname{Im}(u). \end{array}$$

  La propriété (α) est claire. Soit $x \in \operatorname{Im}(u)$. Par 1 b),

$$v(u(x)) = v(k\,x) = k\,v(x). \tag{2}$$

  Comme $u \circ v + v \circ u = 0$:

$$v(u(x)) = -u(v(x)). \tag{3}$$

  De (2) et (3), il vient : $v(x) = u\left(-\frac{1}{k}\, v(x)\right)$. Donc $v(x) \in \operatorname{Im}(u)$. Par 1 b) :

$$u(v(x)) = k\,v(x). \tag{4}$$

  De (2) et (4), on déduit $v(u(x)) = u(v(x))$, puis grâce à (3) $v(u(x)) = -v(u(x))$. Ainsi, $v(u(x)) = 0$.
- Par symétrie des rôles joués par u et v, nous déduisons de ce qui précède que $u \circ v = 0$.

Donc

$$\boxed{u \circ v + v \circ u = 0 \Longrightarrow u \circ v = v \circ u = 0.}$$

■

Q6. — À quelle condition nécessaire et suffisante $u + v$ appartient-il à A_k ? Démontrer que dans ce cas :

$$\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)\,.$$

- Nous raisonnons par équivalences.

$$\begin{array}{rcll} u+v \in A_k & \Longleftrightarrow & (u+v)^2 = k\,(u+v) & \\ & \Longleftrightarrow & u^2 + u\circ v + v \circ u + v^2 = k\,(u+v) & \\ & \Longleftrightarrow & k\,u + u \circ v + v \circ u + k\,v = k\,(u+v) & [u, v \in A_k] \\ & \Longleftrightarrow & u \circ v + v \circ u = 0 & \end{array}$$

  Donc

$$\boxed{u + v \in A_k \Longleftrightarrow u \circ v + v \circ u = 0.}$$

- Supposons que $u + v \in A_k$, i.e. que $u \circ v + v \circ u = 0$ d'après ce qui précède. Alors, par 2 a), $u \circ v = v \circ u = 0$.
  . L'inclusion $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$ est claire. Démontrons $\operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Im}(u+v)$. Soit $x \in \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que :

$$x = u(x_1) + v(x_2).$$

  Nous calculons :

$$\begin{array}{rcll} (u+v)(x) & = & u^2(x_1) + u(v(x_2)) + v(u(x_1)) + v^2(x_2) & \\ & = & k\,u(x_1) + k\,v(x_2) & [u, v \in A_k,\ uv = vu = 0] \\ & = & k\,x. & \end{array}$$

Ainsi $x = \frac{1}{k}(u+v)(x) = (u+v)\left(\frac{1}{k}x\right)$. Donc $x \in \mathrm{Im}(u+v)$.
Nous avons établi :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).}$$

. L'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u+v)$ est claire. Démontrons $\mathrm{Ker}(u+v) \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u+v)$.
Comme $(u+v)(x) = 0$:

$$u(x) = -v(x). \tag{5}$$

Nous calculons :

$$k\,u(x) = u(u(x)) = u(-v(x)) = -uv(x) = 0 \qquad [u \in A_k,\ uv = 0].$$

Comme $k \neq 0$, $u(x) = 0$. Par (5), il vient $v(x) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. Nous avons établi :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v).}$$

■

Q7. — Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$, $u \circ v$ appartient à un ensemble $A_{k'}$, et que dans ce cas :

$$\mathrm{Im}\,(u \circ v) = \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\,(u \circ v) = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(v).$$

Supposons $u \circ v = v \circ u$.

- Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
(u \circ v)^2(x) &= u \circ v \circ u \circ v(x) \\
&= u \circ u \circ v \circ v(x) \qquad [u \circ v = v \circ u] \\
&= u^2(v^2(x)) \\
&= u^2(k\,v(x)) \qquad [v \in A_k] \\
&= k\,u(k\,v(x)) \qquad [u \in A_k] \\
&= k^2\,uv(x).
\end{aligned}$$

  Donc :

$$\boxed{u \circ v \in A_{k^2}.}$$

- L'inclusion $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ est claire, car $uv = vu$.
  Démontrons $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u \circ v)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que :

$$x = u(x_1) = v(x_2).$$

  Comme $u \in A_k$:

$$u(x) = u^2(x_1) = k\,u(x_1) = k\,x$$

  donc

$$x = \frac{1}{k}u(x) = u\left(\frac{1}{k}x\right) \in \mathrm{Im}(u).$$

  Comme $v \in A_k$:

$$v(x) = v^2(x_2) = k\,v(x_2) = k\,x$$

  donc

$$x = \frac{1}{k}v(x) = v\left(\frac{1}{k}x\right) \in \mathrm{Im}(v).$$

  Par suite $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$.
  Nous avons établi :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v).}$$

- L'inclusion $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$ est claire, car $u \circ v = v \circ u$.
  Démontrons $\mathrm{Ker}(u \circ v) \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$. Comme $u \in A_k$, $u(u(x)) = k\,u(x) = u(k\,x)$ et donc :
  $$u(u(x) - k\,x) = 0$$
  et par suite $x' := u(x) - k\,x \in \mathrm{Ker}(u)$. Par définition même de x', il vient :
  $$x = -\frac{1}{k}\,x' + \frac{1}{k}\,u(x).$$
  Comme $x' \in \mathrm{Ker}(u)$, $-\dfrac{1}{k}\,x' \in \mathrm{Ker}(u)$.
  $$v\left(\frac{1}{k}\,u(x)\right) = \frac{1}{k}\,v(u(x)) = \frac{1}{k}\,u(v(x)) = 0$$
  car $x \in \mathrm{Ker}(uv)$. Donc $\dfrac{1}{k}\,u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$. De ce qui précède, nous déduisons x s'écrit comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(u)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(v)$.
  Nous avons établi :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).}$$

■

On suppose enfin que u et v appartiennent à A_0, avec $u \neq 0$ et que $\dim(E) = 2$. *Soit e_1 un vecteur de E tel que* $u(e_1) = e_2 \neq 0$.

Q8. — Démontrer que (e_1, e_2) forme une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base. En déduire que dans ce cas encore
$$u \circ v + v \circ u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \circ v = v \circ u = 0.$$

- Notons que comme $u \neq 0$, il existe bien un vecteur e_1 de E tel que $u(e_1) \neq 0$.
  Comme E est de dimension 2 et que la famille (e_1, e_2) comporte deux vecteurs, pour prouver que (e_1, e_2) est une base de E, il (faut et il) suffit de prouver que la famille (e_1, e_2) est libre.
  Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1\,e_1 + \lambda_2\,e_2 = 0$, i.e. tels que :
  $$\lambda_1\,e_1 + \lambda_2\,u(e_1) = 0. \tag{6}$$
  En appliquant u à chaque membre de la précédente identité et $u^2 = 0$, nous obtenons : $\lambda_1\,u(e_1) = 0$. Comme $u(e_1) \neq 0$, il vient $\lambda_1 = 0$. L'identité (6) se réécrit alors $\lambda_2\,u(e_1) = 0$. Comme $u(e_1) \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. La famille (e_1, e_2) est donc libre. Donc :

$$\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } E.}$$

- Comme $e_2 = u(e_1)$, $u(e_1) = e_2 = 0.e_1 + 1.e_2$ et $u(e_2) = 0 = 0.e_1 + 0.e_2$ (cf. $u^2 = 0$). Nous en déduisons :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(e_1, e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- Supposons $u \circ v + v \circ u = 0$. Nous commençons par étudier la matrice $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(v)$.
  Le vecteur $v(e_1)$ est un vecteur de E, dont (e_1, e_2) est une famille génératrice. Donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que :

$$v(e_1) = \lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 = \lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, u(e_1). \tag{7}$$

En appliquant v à chaque membre de (7), et en utilisant $v^2 = 0$, il vient :

$$0 = \lambda_1\, v(e_1) + \lambda_2\, v(u(e_1)). \tag{8}$$

Nous calculons, en utilisant (7) et $u^2 = 0$:

$$v(u(e_1)) = -u(v(e_1)) = -\lambda_1\, u(e_1). \tag{9}$$

En injectant dans (8), les expressions de $v(e_1)$ et $v(u(e_1))$ données par (7) et (9), nous obtenons :

$$0 = \lambda_1(\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, u(e_1)) + \lambda_2\,(-\lambda_1\, u(e_1)) = \lambda_1^2\, e_1.$$

Ainsi avons nous $\lambda_1 = 0$, et par suite : $v(e_1) = \lambda_2\, u(e_1)$, et $v(u(e_1) = 0$ d'après (9). Donc :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons $v = \lambda_2\, u$. Comme $u^2 = 0$, il en résulte $uv = vu = 0$.
Nous avons établi :

$$\boxed{u \circ v + v \circ u = 0 \Longrightarrow u \circ v = v \circ u = 0.}$$

■

Soit f un endomorphisme de E satisfaisant à la condition $f^2 - af + b\,\mathrm{id}_E = 0$, où a et b sont des réels donnés. On suppose f et id_E linéairement indépendants.

Q9. — À quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire a et b pour qu'il existe deux constantes réelles distinctes λ_1 et λ_2, telles que les endomorphismes $u = f - \lambda_1\,\mathrm{id}_E$ et $v = f - \lambda_2\,\mathrm{id}_E$ appartiennent à des ensembles A_k et $A_{k'}$? Préciser alors k et k' en fonction de λ_1 et λ_2.

- Supposons qu'il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & \lambda_1 \neq \lambda_2\,; \\ (\beta) & f - \lambda_1\,\mathrm{id}_E \in A_k, \text{ pour un certain } k \text{ réel}; \\ (\gamma) & f - \lambda_2\,\mathrm{id}_E \in A_{k'}, \text{ pour un certain } k \text{ réel}. \end{array}$$

D'après (β)

$$k(f - \lambda_1\,\mathrm{id}_E) = (f - \lambda_1\,\mathrm{id}_E)^2 = f^2 - 2\lambda_1 f + \lambda_1^2\,\mathrm{id}_E.$$

et donc :

$$f^2 = (k + 2\lambda_1) f - \lambda_1(k + \lambda_1) Id_2.$$

Or $f^2 = af - b\,\mathrm{id}_E$ et (f, id_E) est une famille libre. Nous en déduisons :

$$k + 2\lambda_1 = a \quad \text{et} \quad \lambda_1(k + \lambda_1) = b. \tag{10}$$

Grâce à (γ), nous obtenons de même :

$$k' + 2\lambda_2 = a \quad \text{et} \quad \lambda_2(k' + \lambda_2) = b. \tag{11}$$

Des deux équations (10), puis des deux équations (11), nous déduisons :

$$\lambda_1^2 - \lambda_1 a + b = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2^2 - \lambda_2 a + b = 0.$$

Ainsi λ_1 et λ_2 sont deux racines distinctes (cf. (α)) de $P := X^2 - aX + b$.
Dressons le bilan de cette étude. Si λ_1 et λ_2 vérifiant (α), (β), (γ) existent, alors P possède deux racines réelles distinctes, i.e. :

$$a^2 - 4b > 0.$$

- Supposons que $a^2 - 4b > 0$, i.e. que P possède deux racines réelles distinctes, que nous notons λ_1 et λ_2. La condition (α) est vérifiée. Vérifions la condition (β).

$$\begin{array}{rcll} (f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 & = & f^2 - 2\lambda_1 f + \lambda_1^2 \mathrm{id}_E & \\ & = & (a - 2\lambda_1) f + (\lambda_1^2 - b)\mathrm{id}_E & \quad [f^2 = af - b\mathrm{id}_E] \end{array}$$

À ce stade, nous nous appuyons sur le début de notre étude, grâce auquel nous savons que si k existe, alors il est égal à $a - 2\lambda_1$. Pour conclure à (β), il nous reste à voir que :

$$\lambda_1^2 - b = -\lambda_1(a - 2\lambda_1)$$

ce qui découle du fait que λ_1 est racine de P. Ainsi, si on pose $k := a - 2\lambda_1$:

$$(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 = k(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E).$$

La condition (γ) se vérifie de même, et conduit à poser $k' := a - 2\lambda_2$.

$$(f - \lambda_1)^2 = f^2 - 2\lambda_1 f + \lambda_1^2 \mathrm{id}_E = (a - 2\lambda_1) f + (\lambda_1^2$$

Or λ_1 est racine de P, donc il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\lambda_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe des réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ vérifiant } (\alpha), (\beta), (\gamma) \text{ si et seulement si } a^2 - 4b > 0.}$$

De plus :

$$\boxed{\text{si de tels réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ existent alors } k := a - 2\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 \text{ et } k' := a - 2\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2.}$$

Ici nous avons utilisé une relation coefficients/racines. En effet, puisque λ_1 et λ_2 sont les racines réelles de $X^2 - aX + b$ on a :

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad b = \lambda_1\lambda_2.$$

■

Q10. — Démontrer que dans ce cas, on a $u \circ v = v \circ u = 0$. Expliquer ce résultat, en considérant l'endomorphisme $u - v$.

- Par relations coefficients/racines, nous avons :

$$u \circ v = (f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) = f^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) f + \lambda_1\lambda_2 \mathrm{id}_E = f^2 - af + b\mathrm{id}_E = 0.$$

De même, nous établissons $v \circ u = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{s'il existe des réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ vérifiant } (\alpha), (\beta), (\gamma), \text{ alors } u \circ v = v \circ u = 0.}$$

- Les endomorphisme u et v commutent (ce sont des polynômes de l'endomorphisme f). Donc

$$\begin{array}{rcl}(u-v)^2 & = & u^2-2u\circ v+v^2 \\ & = & ku-2u\circ v+k'v \\ & = & -2u\circ v+(k+k')f-(k\lambda_1+k'\lambda_2)\,\mathrm{id}_E\end{array}$$

Or :

$$k+k'=\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1-\lambda_2=0$$
$$k\lambda_1+k'\lambda_2=\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)+\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)=-(\lambda_2-\lambda_1)^2.$$

Il résulte de cette étude que :

$$(u-v)^2=-2u\circ v+(\lambda_2-\lambda_1)^2\,\mathrm{id}_E \tag{12}$$

Or $u-v=(\lambda_2-\lambda_1)\,\mathrm{id}_E$ et donc $(u-v)^2=(\lambda_2-\lambda_1)^2\,\mathrm{id}_E$. En comparant cette dernière identité à (12), il vient $u\circ v=0$.

■

Q11. — Calculer, pour p entier naturel, l'endomorphisme f^p en fonction de u et v.

- Des définitions de u et v il ressort : $f=u+\lambda_1\,\mathrm{id}_E$ et $f=v+\lambda_2\,\mathrm{id}_E$, d'où :

$$\lambda_2 f=\lambda_2 u+\lambda_1\lambda_2 Id_2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 f=\lambda_1 v+\lambda_1\lambda_2\,\mathrm{id}_E\,.$$

En soustrayant membre à membre ces deux identités, il vient : $(\lambda_2-\lambda_1)f=\lambda_2 u-\lambda_1 v$ puis, comme $\lambda_1\neq\lambda_2$:

$$f=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}u-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}v.$$

- Soit $p\geq 2$ un entier naturel. Nous avons déjà remarqué que u et v commutent. La formule du binôme de Newton s'applique donc.

$$f^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{\lambda_2^k(-\lambda_1)^{p-k}}{(\lambda_2-\lambda_1)^p}u^k\circ v^{p-k}. \tag{13}$$

Puisque $u\circ v=0$, d'après 3 b), nous avons, pour tout $p\in[\![1,p-1]\!]$:

$$u^k\circ v^{p-k}=0.$$

L'identité (13) se réécrit donc :

$$f^p:=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^p}\left(\lambda_2^p u^p+(-\lambda_1)^p v^p\right). \tag{14}$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, on déduit de $u^2=ku=(\lambda_2-\lambda_1)u$ et $v^2=k'v=(\lambda_1-\lambda_2)v$ que :

$$u^p=(\lambda_2-\lambda_1)^{p-1}u \qquad \text{et} \qquad v^p=(\lambda_1-\lambda_2)^{p-1}v.$$

Ainsi (14) se réécrit :

$$\boxed{f^p=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\lambda_2^p u-\lambda_1^p v\right).}$$

Soulignons que la précédente formule vaut également pour $p=0$ et $p=1$.

■

Q12. — À quelle condition nécessaire et suffisante, l'endomorphisme f est-t-il inversible ? Quel est alors son inverse ?

Nous démontrons que f est inversible si et seulement si $b \neq 0$.

- Supposons f inversible. Montrons que $b \neq 0$ par l'absurde. Si $b = 0$, alors $f^2 - af = 0$ et donc $f(f - a\,\mathrm{id}_E) = 0$. En composant cette dernière identité par f^{-1} à gauche, il vient : $f - a\,\mathrm{id}_E = 0$. Donc (f, id_E) est liée, ce qui est contraire à une des hypothèses initiales.
- Supposons $b \neq 0$. Alors de $f^2 - af + bId_E = 0$, nous déduisons :

$$f\left(\frac{a}{b}\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f\right) = \left(\frac{a}{b}\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f\right)f = \mathrm{id}_E.$$

  Nous en déduisons que f est inversible et que $f^{-1} = \frac{a}{b}\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f$.

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est inversible si et seulement si } b \neq 0, \text{ et si } f \text{ est inversible alors } f^{-1} = \frac{a}{b}\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f.}$$

■

Soit g un endomorphisme de E de rang 1.

Q13. — Démontrer qu'il existe un réel k tel que $g \in A_k$. On montrera que si $\mathrm{Im}(g)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(g)$, alors $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Cas où $\mathrm{Im}(g)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(g)$

Si $\mathrm{Im}(g)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(g)$, alors $g^2 = 0$ et donc $g \in A_k$, pour $k = 0$.

Cas où $\mathrm{Im}(g)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(g)$

Nous supposons ici que $\mathrm{Im}(g)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(g)$. Par hypothèse, $\mathrm{Im}(g)$ est de dimension 1. Soit x_0 un vecteur de base de $\mathrm{Im}(g)$.

- Démonstration de $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$ – *inutile pour l'objectif, ici*
  Soit $x \in \mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda x_0$. Démontrons que $\lambda = 0$, par l'absurde. Si $\lambda \neq 0$, alors comme $x \in \mathrm{Ker}(g)$ et comme $\mathrm{Ker}(g)$ est un sous-espace vectoriel de E, $x_0 = \frac{1}{\lambda}x \in \mathrm{Ker}(g)$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(x_0) \subset \mathrm{Ker}(g)$, ce qui contredit l'hypothèse additionnelle. Donc $\lambda = 0$ et $x = 0$.
- Étude de $g(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}(g)$ – *décisif pour l'objectif, ici*
  . Le vecteur $g(x_0)$ est dans l'image de g, dont (x_0) est une base. Il existe donc un scalaire k tel que $g(x_0) = kx_0$.
  . Soit $x \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda x_0$. Nous calculons :

$$g(x) = \lambda g(x_0) = \lambda k x_0 = kx.$$

  . Si $k = 0$, alors $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(g)$ et donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g)$, ce qui est contraire à l'hypothèse additionnelle. Donc $k \neq 0$.

  Nous avons démontré :

$$\boxed{\text{il existe } k \in \mathbf{R}^* \text{ tel que pour tout } x \in \mathrm{Im}(g),\ g(x) = kx.}$$

- Démonstration de $E = \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(g)$ – *inutile pour l'objectif, ici*
  L'inclusion $\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(g) \subset E$ est claire. Démontrons l'autre. Soit $x \in E$. On cherche $x_1 \in \mathrm{Ker}(g)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(g)$ tels que

$$x = x_1 + x_2. \tag{15}$$

  Pour cela, nous raisonnons par analyse-synthèse.

. *Analyse*
Supposons qu'une telle décomposition de x existe. En appliquant g à chaque membre de (15), il vient

$$g(x) = g(x_2) = kx_2.$$

k étant non nul, il vient :

$$x_2 = \frac{1}{k}g(x) = g\left(\frac{1}{k}x\right) \qquad \text{et} \qquad x_1 = x - x_2 = x - g\left(\frac{1}{k}x\right).$$

. *Synthèse*
Soient x_1 et x_2 comme en fin d'analyse. Il est clair que $x_2 \in \mathrm{Im}(u)$ et que $x_1 + x_2 = x$. Calculons $g(x_1)$.

$$g(x_1) = g(x - x_2) = g(x) - g(x_2) = g(x) - kx_2 = g(x) - k\frac{1}{k}g(x) = 0.$$

Le vecteur x_1 est donc dans $\mathrm{Ker}(g)$.

Donc :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g).}$$

Soit $x \in E$. Puisque $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$: $g(g(x)) = kg(x)$. Donc :

$$\boxed{g^2 = kg \text{ et } g \in A_k.}$$

Observons que nous n'avons pas utilisé $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$, pour établir la précédente identité (...). ■

Q14. — On suppose que E est de dimension finie. Soit M la matrice associée à g dans une base de E. Démontrer que $k = \mathrm{Tr}(M)$.

Cas où $k \neq 0$
Notons n la dimension de E. Nous considérons la base (x_0) de E précédemment considérée et rappelons que $g(x_0) = kx_0$ (par définition même de k). Par le théorème du rang (ou par ce qui précède), $\dim(()\,\mathrm{Ker}(g)) = n-1$. Soit $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ une base de E. Comme $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$, la famille $\mathscr{B} := (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une base de E, adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$. Bien sûr, $g(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Nous en déduisons :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{Diag}(k, 0, \ldots, 0).$$

Donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)) = k$. La trace étant un invariant de similitude, nous obtenons :

$$\boxed{\text{Si } k \neq 0, \text{ alors pour toute base } \mathscr{C} \text{ de } E,\ \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)) = k.}$$

Cas où $k = 0$
Par le théorème du rang, $\dim(()\,\mathrm{Ker}(g)) = n-1$. Soit $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(g)$ que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de E. On écrit

$$g(x_n) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_n x_n$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \in \mathbf{R}$. Alors

$$0 = g(g(x_n)) = \lambda_n g(x_n).$$

Comme $g(x_n) \neq 0$ (sinon $x_n \in \mathrm{Ker}(g)$ et la famille $\mathscr{B}$ n'est pas libre), il vient $\lambda_n = 0$. On en déduit que tous les coefficients diagonaux de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ sont nuls et donc que $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)) = 0$. La trace étant un invariant de similitude, nous obtenons :

$$\boxed{\text{Si } k=0\text{, alors pour toute base } \mathscr{C} \text{ de } E,\ \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)) = 0.}$$

■

On prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;\,1]$*, à valeurs réelles. Soit F une fonction non nulle donnée appartenant à E, et u l'application qui à toute fonction G appartenant à E fait correspondre la fonction H définie par :*

$$\forall x \in [0,1], \qquad H(x) = \int_0^1 F(x)\cdot t \cdot G(t)\, dt.$$

Q15. — Démontrer que u est un endomorphisme de E.

- Soit $G \in E$. La fonction $u(G)$ est définie par :

$$\forall x \in [0,1] \qquad u(G)(x) = \int_0^1 F(x)tG(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 tG(t)\,\mathrm{d}t\right)F(x).$$

  Si on pose

$$\lambda_G := \int_0^1 tG(t)\,\mathrm{d}t$$

  qui est un scalaire indépendant de x, on a donc :

$$\forall x \in [0,1] \qquad u(G)(x) = \lambda_G F(x).$$

  Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u(G)(x) = \lambda_G F(x)$ et que les applications $u(G)$ et $\lambda_G F$ ont mêmes ensembles de départ ($[0,1]$) et d'arrivée ($\mathbf{R}$) :

$$\boxed{u(G) = \lambda_G F, \text{ où } \lambda_G \text{ est le scalaire } \int_0^1 tG(t)\,\mathrm{d}t.}$$

  La fonction F étant continue sur $[0,1]$, il en est donc de même de $u(G)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{si } G \in E \text{ alors } u(G) \in E.}$$

- Soit $G_1, G_2 \in E$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Les applications $u(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2)$ et $\lambda_1 u(G_1) + \lambda_2 u(G_2)$ ont même ensemble de départ ($[0,1]$), et même ensemble d'arrivée ($\mathbf{R}$). Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
u(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2)(x) &= \int_0^1 F(x)t(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 F(x)t(\lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \lambda_1 F(x)tG_1(t) + \lambda_2 F(x)tG_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \int_0^1 F(x)tG_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_0^1 F(x)tG_2(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left[\text{linéarité de } \int\right] \\
&= \lambda_1 u(G_1)(x) + \lambda_2 u(G_2)(x) \\
&= (\lambda_1 u(G_1) + \lambda_2 u(G_2))(x)
\end{aligned}$$

  Ainsi :

$$\boxed{u(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2) = \lambda_1 u(G_1) + \lambda_2 u(G_2).}$$

■

Q16. — Démontrer que u est de rang 1. Quel est l'espace image de u?

- Soit $H \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $G \in E$ tel que $H = u(G)$. D'après l'étude faite au début de 5 a), $H = u(G) = \lambda_G F$, où λ_G est le scalaire définie par $\lambda_G := \int_0^1 tG(t)\,\mathrm{d}t$. Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(F)$.
- La fonction $G\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ t \mapsto 2$ appartient à E. Alors :

$$\lambda_G = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^1 = 1$$

  nous obtenons $u(G) = F$. Ainsi $F \in \mathrm{Im}(u)$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, $\mathrm{Vect}(F) \subset \mathrm{Im}(u)$.
- Des deux points précédents, on déduit $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(F)$. Comme $F \neq 0$, nous en déduisons que (F) est une base de $\mathrm{Im}(u)$ et donc que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 1.
  Donc :

$$\boxed{\mathrm{rang}(u) = 1.}$$

■

Q17. — Démontrer qu'il existe un réel k tel que $u^2 = ku$, et donner une expression de k au moyen d'une intégrale.

L'existence d'un réel k tel que $u^2 = ku$ découle des questions 13 et 16. En reprenant l'étude faire en 13, et en choisissant $x_0 = F$ (ce qui est possible car (F) est une base $\mathrm{Im}(u)$), nous observons que k est le scalaire tel que :

$$u(F) = kF.$$

Avec la notation introduite en 17, nous avons :

$$\boxed{k = \lambda_F = \int_0^1 tF(t)\,\mathrm{d}t.}$$

■

Q18. — Calculer k lorsque pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

Il s'agit ici de calculer $\int_0^1 t\,\mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t$. Nous allons procéder par intégrations par parties, mais Arcsin n'étant pas dérivable en 1, il faut prendre quelques précautions. Soit $A \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A t\,\mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\mathrm{Arcsin}(t)\right]_0^A - \int_0^A \frac{t^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{[IPP]}\\
&= \frac{A^2}{2}\mathrm{Arcsin}(A) + \frac{1}{2}\left(\int_0^A \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{A^2}{2}\mathrm{Arcsin}(A) + \frac{1}{2}\int_0^A \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(A)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{Arccos}(A)}^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left[\text{changement de variable } t=\cos(x)\right]\\
&= \int_{\mathrm{Arccos}(A)}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{\mathrm{Arccos}(A)}^{\pi/2}\\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{Arccos}(A) + \frac{1}{4}\sin(2\mathrm{Arccos}(A)).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\int_0^A t\,\mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\mathrm{Arcsin}(A) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\mathrm{Arccos}(A) + \frac{1}{8}\sin(2\mathrm{Arccos}(A)) - \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(A).$$

En faisant tendre A vers 1, il vient :

$$\boxed{k = \int_0^1 t\mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}.}$$

■

Soit $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, admettant des dérivées à tous les ordres sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et u l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui, à toute fonction f appartenant à $\mathscr{C}$ fait correspondre la fonction g définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad g(x) = x \cdot f'(x).$$

Q19. — Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{C}$.

- Soit $f \in \mathscr{C}$. Alors f' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. La fonction $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\,;\ x \longmapsto x$ est également de classe $\mathscr{C}^\infty$. Un produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ étant $\mathscr{C}^\infty$, la fonction $u(f) :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\ :\ x \longmapsto x f'(x)$ est également $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\text{si } f \in \mathscr{C} \text{ alors } u(f) \in \mathscr{C}.}$$

- Soit $f_1, f_2 \in \mathscr{C}$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Les fonctions $u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ et $\lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2)$ ont même ensemble de départ ($]0,+\infty[$) et même ensemble d'arrivée ($\mathbf{R}$). Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) & = & x\,(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) & \\ & = & x(\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x) & \text{[linéarité de la dérivation]} \\ & = & x(\lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x)) & \\ & = & \lambda_1 x f_1'(x) + \lambda_2 x f_2'(x) & \\ & = & \lambda_1 u(f_1)(x) + \lambda_2 u(f_2)(x) & \\ & = & (\lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2))(x) & \end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2).}$$

■

Q20. — On se donne le réel k. Démontrer qu'il existe un plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel E de $\mathscr{C}$ tel que :

- E est stable par u ;
- la restriction de u à E, que l'on notera v, est un endomorphisme de E satisfaisant la condition $v^2 = kv$.

Donner la dimension et une base $\mathscr{B}$ de E en distinguant le cas $k = 0$ et le cas $k \neq 0$.

Soit $k \in \mathbf{R}$.

- . Considérons

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E & := & \left\{ f \in \mathscr{C} \; ; \; u^2(f) = ku(f) \right\} \\ & = & \mathrm{Ker}(u^2 - ku) \\ & = & \{ f \in \mathscr{C} \; : \; \forall x \in]0,+\infty[\quad x f'(x) + x^2 f''(x) = k x f'(x) \} \\ & = & \left\{ f \in \mathscr{C} \; : \; \forall x \in]0,+\infty[\quad f''(x) = \dfrac{k-1}{x} f'(x) \right\}. \end{array}}$$

  . Comme E est le noyau de l'endomorphisme $u^2 - ku$ de $\mathscr{C}$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$.

  . Soit $f \in E$. Vérifions que $u(f) \in E$.

$$u^2(u(f)) - ku(u(f)) = u(u^2(f)) - u(ku(f)) = u(u^2(f) - kf) = u(0) = 0.$$

  Donc $u \in \mathrm{Ker}(u^2 - ku) = E$. Ainsi E est stable par u.

  . Par construction même, E est le plus grand sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ satisfaisant les deux conditions demandées.

- Soit $f \in \mathscr{C}$.

$$\begin{array}{rlll} f \in E & \Longleftrightarrow & \forall x > 0 \quad f''(x) = \dfrac{k-1}{x} f'(x) & \\ & \Longleftrightarrow & \forall x > 0 \quad (f')'(x) = \dfrac{k-1}{x} f'(x) & \\ & \Longleftrightarrow & \exists A_1 \in \mathbf{R} \quad \forall x > 0 \quad f'(x) = A_1 x^{k-1} & \text{[cf. cours sur les EDL1]} \\ & \Longleftrightarrow & \exists (A_1, A_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall x > 0 \quad f(x) = \left| \begin{array}{ll} A_1 \ln(x) + A_2 & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{A_1}{k} x^k + A_2 & \text{si } k \neq 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

Cas où $k = 0$

On pose $f_1 := \ln$ et $f_2 :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\,;\ x \longmapsto 1$. D'après ce qui précède, $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Il est par ailleurs clair que la famille (f_1, f_2) est libre. Donc (f_1, f_2) est une base de E et $\dim(E) = 2$.

Cas où $k \neq 0$

On pose $g_1 :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\,;\ x \longmapsto x^k$. D'après ce qui précède, $E = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{k} g_1, f_2\right) = \mathrm{Vect}(g_1, f_2)$. Il est par ailleurs clair que la famille (g_1, f_2) est libre. Donc (g_1, f_2) est une base de E et $\dim(E) = 2$.

■

Q21. — Déterminer dans chacun de ces deux cas la matrice associée à v dans la base $\mathscr{B}$. Quel est le rang de v ?

Soit $k \in \mathbf{R}$. On pose $v := u_{|E}^{|E}$.

Cas où $k = 0$

- Soit $x > 0$.
$$u(f_1)(x) = x \times \frac{1}{x} = 1 = f_2(x).$$
Donc $u(f_1) = f_2 = 0.f_1 + 1.f_2$.
- Soit $x > 0$. $u(f_2)(x) = 0 = 0.f_1 + 0.f_2$.
- La matrice de v dans la base (f_1, f_2) est donc :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
qui est de rang 1. Donc $\mathrm{rang}(v) = 1$.

Cas où $k \neq 0$

- Soit $x > 0$.
$$u(g_1)(x) = x \times k x^{k-1} = k x^k.$$
Donc $u(g_1) = k g_1 = k.g_1 + 0.f_2$.
- Soit $x > 0$. $u(f_2)(x) = 0 = 0.g_1 + 0.f_2$.
- La matrice de v dans la base (g_1, f_2) est donc :
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
qui est de rang 1. Donc $\mathrm{rang}(v) = 1$.

■