Révisions d'algèbre linéaire

DM 3

par David Blottière, le 18 septembre 2023 à 22h23

Consignes

(A) — Le devoir est à remettre le **lundi 25 septembre**.

(B) — Les étudiants de MPI traiteront le problème 1, ceux de MPI* les problèmes 1 et 2.

(C) — Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

(D) — Les copies mal présentées, manquant de soin, souffrant d'un défaut patent d'argumentation ou ne respectant pas toutes les règles énoncées en (C) ne seront pas corrigées.

Problème 1 — Carré proportionnel à l'endomorphisme

Ce sujet est issu de l'épreuve du concours de l'ESME (École Supérieure de Mécanique et d'Électricité) de 1991.

Soit E un espace vectoriel réel non réduit à $\{0_E\}$. Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2 = ku$.

Soit $u \in A_k$.

Q1. — L'endomorphisme u peut-il être inversible ? Qu'est-ce que u dans ce cas ?

Q2. — Déterminer $u(x)$, pour $x \in \mathrm{Im}(u)$.

Q3. — Démontrer que, si $k \neq 0$, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Que dire de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$, si $k = 0$?

Q4. — On suppose que E est de dimension finie Lorsque $k \neq 0$, comment doit-on choisir une base de E pour que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ? Quelle sera alors cette matrice ? Si $k = 0$, peut-on trouver une base de E telle que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ?

Soient u et v des endomorphismes de E appartenant à A_k. On suppose que $k \neq 0$.

Q5. — Démontrer que $u \circ v + v \circ u = 0$ implique $u \circ v = v \circ u = 0$.

Q6. — À quelle condition nécessaire et suffisante $u + v$ appartient-il à A_k ? Démontrer que dans ce cas :

$$\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v).$$

Q7. — Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$, $u \circ v$ appartient à un ensemble $A_{k'}$, et que dans ce cas :

$$\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$

On suppose enfin que u et v appartiennent à A_0, avec $u \neq 0$ et que $\dim(E) = 2$. Soit e_1 un vecteur de E tel que $u(e_1) = e_2 \neq 0$.

Q8. — Démontrer que (e_1, e_2) forme une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base. En déduire que dans ce cas encore

$$u \circ v + v \circ u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \circ v = v \circ u = 0.$$

Soit f un endomorphisme de E satisfaisant à la condition $f^2 - af + b\mathrm{id}_E = 0$, où a et b sont des réels donnés. On suppose f et id_E linéairement indépendants.

Q9. — À quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire a et b pour qu'il existe deux constantes réelles distinctes λ_1 et λ_2, telles que les endomorphismes $u = f - \lambda_1 \mathrm{id}_E$ et $v = f - \lambda_2 \mathrm{id}_E$ appartiennent à des ensembles A_k et $A_{k'}$? Préciser alors k et k' en fonction de λ_1 et λ_2.

Q10. — Démontrer que dans ce cas, on a $u \circ v = v \circ u = 0$. Expliquer ce résultat, en considérant l'endomorphisme $u - v$.

Q11. — Calculer, pour p entier naturel, l'endomorphisme f^p en fonction de u et v.

Q12. — À quelle condition nécessaire et suffisante, l'endomorphisme f est-t-il inversible ? Quel est alors son inverse ?

Soit g un endomorphisme de E de rang 1.

Q13. — Démontrer qu'il existe un réel k tel que $g \in A_k$. On montrera que si $\mathrm{Im}(g)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(g)$, alors $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Q14. — On suppose que E est de dimension finie. Soit M la matrice associée à g dans une base de E. Démontrer que $k = \mathrm{Tr}(M)$.

On prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;\,1]$, à valeurs réelles. Soit F une fonction non nulle donnée appartenant à E, et u l'application qui à toute fonction G appartenant à E fait correspondre la fonction H définie par :

$$\forall x \in [0,1], \qquad H(x) = \int_0^1 F(x) \cdot t \cdot G(t)\, dt.$$

Q15. — Démontrer que u est un endomorphisme de E.

Q16. — Démontrer que u est de rang 1. Quel est l'espace image de u ?

Q17. — Démontrer qu'il existe un réel k tel que $u^2 = ku$, et donner une expression de k au moyen d'une intégrale.

Q18. — Calculer k lorsque pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

Soit $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, admettant des dérivées à tous les ordres sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et u l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui, à toute fonction f appartenant à $\mathscr{C}$ fait correspondre la fonction g définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad g(x) = x \cdot f'(x).$$

Q19. — Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{C}$.

Q20. — On se donne le réel k. Démontrer qu'il existe un plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel E de $\mathscr{C}$ tel que :

- E est stable par u ;
- la restriction de u à E, que l'on notera v, est un endomorphisme de E satisfaisant la condition $v^2 = kv$.

Donner la dimension et une base $\mathscr{B}$ de E en distinguant le cas $k = 0$ et le cas $k \neq 0$.

Q21. — Déterminer dans chacun de ces deux cas la matrice associée à v dans la base $\mathscr{B}$. Quel est le rang de v ?

Problème 2 — Le groupe $\left(\mathbb{F}_p^*, \times\right)$ est cyclique

Soit p un nombre premier.

Q22. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

On pourra dans un premier temps étudier les sous-groupes de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$.

Pour tout d diviseur positif de $p-1$, on note :

$$N(d) := \operatorname{Card}\left(\left\{x \in \mathbb{F}_p^* \,:\, \operatorname{ord}(x) = d\right\}\right).$$

Q23. — Soit d un diviseur positif de $p-1$ tel que $N(d) \geqslant 1$. Démontrer que :

$$N(d) = \varphi(d).$$

Q24. — En déduire que, pour tout d diviseur positif de $p-1$, $N(d) = \varphi(d)$.

Q25. — Conclure alors au caractère cyclique du groupe $\left(\mathbb{F}_p^*, \times\right)$.