IDÉAUX DE $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

CORRIGÉ DM 2

par David Blottière, le 13 septembre 2023 à 21h06

Cette correction est adaptée d'un texte de Daniel Genoud, enseignant de CPGE.

I — Notations et définitions

Étant donnés n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.

A étant un élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, on appelle noyau de A, noté $\operatorname{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \; : \; AX = 0\right\}.$$

On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{R})$, noté $\operatorname{Im}(A)$:

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{AX, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})\right\}.$$

Un sous-groupe J de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), +)$ est appelé un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall M \in J, \quad MA \in J.$$

Un sous-groupe J de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall M \in J, \quad AM \in J.$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre n.

II — Résultats préliminaires

Soit A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose A de rang r.

Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Q1. — Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ une base du noyau de u. Démontrer l'existence d'une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ telle que $(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathbf{R}^n$.

- On sait que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) = r$ supposé supérieur ou égal à 1. D'après le théorème du rang, $\operatorname{Ker}(u)$ est de dimension $n - r$. Il est donc légitime de considérer une base de $\operatorname{Ker}(u)$ notée $(e_{r+1}, \dots, e_n)$.
- Cette famille étant libre dans $\mathbf{R}^n$, on sait qu'on peut la compléter en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$. ■

Q2. — Démontrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$.

D'après le cours, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, alors en notant $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, on sait que $\mathbf{R}^n = F \oplus \mathrm{Ker}(u)$, ce qui exprime que F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$. ■

Q3. — En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$.

- Considérons l'application :

$$\tilde{u} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

qui est linéaire, comme restriction et corestriction d'une application linéaire.
- Comme $\mathrm{Ker}(\tilde{u}) = \mathrm{Ker}(u) \cap F = \{0\}$, l'application $\tilde{u}$ est injective.
- Comme F et $\mathrm{Im}(u)$ ont même dimension finie r, l'application $\tilde{u}$ est bijective.
- Ainsi $\tilde{u}$ est un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}(u)$. ■

Q4. — En déduire que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

- D'après la question précédente, l'image par $\tilde{u}$ de la base $(e_1, \dots, e_r)$ de F est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.
- Comme, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in F$ on a $\tilde{u}(e_i) = u(e_i)$. Ainsi $\big(u(e_1), \dots, u(e_r)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. ■

Q5. — Peut-on compléter la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ en une base de $\mathbf{R}^n$?

La famille $\big(u(e_1), \dots, u(e_r)\big)$ étant libre dans $\mathbf{R}^n$, on sait qu'on peut la compléter en une base $\mathscr{C} = \big(u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n\big)$ de $\mathbf{R}^n$. ■

Q6. — En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.

- Notons $\mathscr{E}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{B}$, Q la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{C}$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Puisque $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$, le théorème de changement de base livre $A = QBP^{-1}$.
- D'autre part, par construction des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^n$, la matrice B est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice diagonale notée D_r.
- Ainsi A est équivalente à D_r. ■

Q7. — Soit D une matrice diagonale d'ordre n telle que r éléments de la diagonale sont égaux à 1, les $n - r$ autres sont nuls. Démontrer que A est équivalente à D.

- La matrice D est de rang r. D'aprés la question précédente, elle est aussi équivalente à D_r.
- La relation d'équivalence des matrices d'ordre n étant symétrique et transitive, on obtient que A est semblable à toutes les matrices du type de D. ■

III — Applications

On considère une application f de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad f(AB) = f(A) f(B).$$

Q8. — Démontrer que pour toute matrice inversible A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $f(A)$ est non nul.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Si $f(A) = 0$ alors pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

$$f(B) = f\left(BA^{-1}A\right) = f\left(BA^{-1}\right) f(A) = 0$$

ce qui contredit que $f \neq 0$. Donc $f(A) \neq 0$. ■

Soit A une matrice de rang r, strictement inférieur à n.

Q9. — Démontrer l'existence de $r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \ldots A_{r+1}$ soit nul.

- Posons $A_{r+1} = D_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $k \in [\![1, r]\!]$, on choisit A_k diagonale avec r coefficients diagonaux égaux à 1 les $n-r$ autres étant égaux à 0 dont celui d'indice (k,k).
- Toutes les A_k pour $k \in [\![1, r+1]\!]$ sont équivalentes à A d'après la question 7.
- Leur produit B est une matrice diagonale.
  - Si $1 \leqslant k \leqslant r$, alors $[B]_{k,k} = 0$ car $[A_k]_{k,k} = 0$.
  - Si $r+1 \leqslant k \leqslant n$, alors $[B]_{k,k} = 0$ car $[A_{r+1}]_{k,k} = 0$.

Ainsi $B = A_1\,A_2 \ldots A_{r+1} = 0_n$, où 0_n désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. ■

Q10. — En déduire que $f(A) = 0$.

- Comme :

$$f(0_n) = f(0_n \times 0_n) = f(0_n) \times f(0_n)$$

il vient $f(0_n) = 0$ ou 1.
- Si on avait $f(0_n) = 1$, alors on aurait, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

$$1 = f(0_n) = f(0_n \times B) = f(0_n)\,f(B) = f(B)$$

ce qui contredit que $f \neq 1$. Donc $f(0_n) = 0$.
- Nous en déduisons que :

$$f(A_1)\,f(A_2) \ldots f(A_{r+1}) = f(A_1\,A_2 \ldots A_{r+1}) = 0$$

donc un des réels $f(A_k)$ est nul.
- Comme la matrice A_k est équivalente à A, il existe deux matrices inversibles P_k et Q_k telles que $A_k = Q_k^{-1} A P_k$. Donc

$$f\left(Q_k^{-1}\right) f(A)\,f(P_k) = 0.$$

Mais $f\left(Q_k^{-1}\right)$ et $f(P_k)$ sont non nuls d'après la question 8. Donc $f(A) = 0$. ■

Q11. — Que peut-on en conclure pour l'application f ?

- D'après ce qui précède, nous pouvons conclure que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad f(A) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

- De plus, f induit un morphisme de groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ vers le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$. En particulier, $f(I) = 1$. ■

Q12. — Donner un exemple d'une telle application.

Un exemple de telle application est l'application déterminant de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$. ■

IV — Idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

Soit J un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q13. — Démontrer que si $I \in J$, alors $J = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

- Si $I \in J$ alors, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:
$$A = AI \in J.$$
- Nous en déduisons $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \subset J$ et par suite $J = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. ∎

Q14. — Démontrer que si J contient une matrice inversible alors $J = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Si J contient une matrice inversible A, alors :
$$I = A^{-1}A \in J$$
donc $J = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, d'après la question précédente. ∎

On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J.

Q15. — Démontrer que J contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- On a vu à la question 6 que A est équivalente à D_r. Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que $D_r = Q^{-1}AP$.
- J étant idéal à droite, $AP \in J$, puis étant idéal à gauche, $D_r = Q^{-1}(AP) \in J$. ∎

Q16. — Démontrer l'existence de $n-r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \ldots, A_{n-r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

- Pour $k \in [\![1, n-r+1]\!]$, on pose :
$$A_k = \mathrm{Diag}(0,\ldots,0,1,\ldots,1,0,\ldots,0)$$
où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
$$[A_k]_{i,i} = 1 \iff k \leqslant i \leqslant k+r-1$$
ce qui est possible car $k+r-1 \leqslant (n-r+1)+r-1 = n$ (point essentiel).
- Toutes les A_k sont équivalentes à A d'après la question 7, donc sont toutes dans J d'après la solution apportée à la question précédente.
- On constate que $C = A_1 + \cdots A_{n-r+1}$ est diagonale et que ses éléments diagonaux sont tous des entiers supérieurs ou égaux à 1.
- Nous en déduisons que C est inversible et $C \in J$, car J est stable pour l'addition comme sous-groupe de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. ∎

Q17. — Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

- Puisque $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $C \in J$, on a $J = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, d'après la question 14.
- Ainsi le seul idéal bilatère non nul de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
- Les seuls idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont $\{0_n\}$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. ∎

V — Idéaux à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

$$J_E = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \,:\, E \textit{ contient } \operatorname{Im}(A)\}.$$

Q18. — Démontrer que J_E est un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

- J_E est non vide car contient 0_n.
- Si A et B sont deux éléments de J_E, alors $A - B \in J_E$ car $\operatorname{Im}(A-B) \subset \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B) \subset E + E \subset E$.
- D'autre part, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $A \in J_E$, alors $AM \in J_E$ car $\operatorname{Im}(AM) \subset \operatorname{Im}(A) \subset E$.
- Nous avons démontré que J_E est un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. ■

Soit A un élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et B un élément de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{R})$. On suppose que $\operatorname{Im}(B)$ est contenue dans $\operatorname{Im}(A)$. On veut montrer qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ telle que $B = AC$.

On fixe un supplémentaire S de $\operatorname{Ker}(A)$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.

Q19. — Justifier que l'application ϕ définie par $X \longmapsto AX$ définit un isomorphisme de S dans $\operatorname{Im}(A)$.

- Il est clair que :

$$\phi \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im}(A) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

est linéaire et à valeurs dans $\operatorname{Im}(A)$.
- L'application ϕ est injective car si $X \in \operatorname{Ker}(\phi)$, alors $X \in S$ et $AX = 0$, donc $X \in S \cap \operatorname{Ker}(A) = \{0\}$.
- L'application ϕ est est surjective. En effet, soit $Y \in \operatorname{Im}(A)$. Il existe donc $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ tel que $Y = AX$. Le vecteur X se décompose sous la forme :

$$X = X_1 + X_2 \text{ où } X_1 \in S \text{ et } X_2 \in \operatorname{Ker}(A).$$

Alors $Y = AX_1 + AX_2 = AX_1 = \phi(X_1)$. Ainsi il existe $X_1 \in S$ tel que $Y = \phi(X_1)$.
- En résumé, ϕ définit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(A)$. ■

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbf{R})$.

Q20. — Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q, d'un unique élément ε_i de S tel que :

$$A\varepsilon_i = Be_i.$$

Soit $i \in [\![1, q]\!]$. Alors :

$$Be_i \in \operatorname{Im}(B) \subset \operatorname{Im}(A).$$

D'après la question précédente, il existe $\varepsilon_i \in S$ tel que :

$$Be_i = \phi(\varepsilon_i)$$

c'est à dire $A\varepsilon_i = Be_i$. ■

Soit C l'élément de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$:

$$C = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_q].$$

Q21. — Démontrer que $B = AC$.

- On a $C = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_q]$, donc :

$$AC = [A\varepsilon_1 \quad \dots \quad A\varepsilon_q] = [Be_1 \quad \dots \quad Be_q] = B$$

puisque Be_j représente la j-ième colonne de $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{R})$. ■

Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)$ *contient* $\operatorname{Im}(C)$.

On désigne par $D = (A, B)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,2n}(\mathbf{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B, c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B.

Q22. — Démontrer que $\operatorname{Im}(D) = \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)$.

- Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

$$Y \in \operatorname{Im}(D) \iff \exists X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbf{R}) \quad Y = DX.$$

Or X peut s'écrire :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

avec X_1 et X_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Y \in \operatorname{Im}(D) &\iff \exists (X_1, X_2) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\big)^2 \quad Y = (A, B)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = AX_1 + BX_2 \\ &\iff Y \in \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B). \end{aligned}$$

■

Q23. — En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathcal{M}_{2n,n}(\mathbf{R})$ telle que : $C = DW$.

D'après le résultat de la question 21, spécialisé à :

$$A \leftarrow D \qquad B \leftarrow C \qquad p \leftarrow 2n \qquad q \leftarrow n$$

il existe $W \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbf{R})$ tel que $C = DW$. ■

Q24. — En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $C = AU + BV$.

La matrice W peut s'écrire :

$$W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Ainsi :

$$C = (A, B)\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = AU + BV.$$

■

Soit J un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q25. — Démontrer qu'il existe un entier naturel r tel que :

$$\big(\forall M \in J, \quad \operatorname{rg}(M) \leqslant r\big) \quad \text{et} \quad \big(\exists M_0 \in J, \quad \operatorname{rg}(M_0) = r\big).$$

Notons :

$$X := \{\text{rg}(M) \;:\; M \in J\}.$$

Il s'agit d'une partie non vide de $\mathbf{N}$ (car $J \neq \emptyset$) et majorée par n. Elle admet donc un plus grand élément noté r. Comme $r \in X$:

$$\exists M_0 \in J \quad \text{rg}(M_0) = r.$$

■

Soit M un élément quelconque de J. On suppose que $\text{Im}(M)$ *n'est pas contenue dans* $\text{Im}(M_0)$.

Q26. — En utilisant le sous-espace vectoriel $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, démontrer l'existence d'un élément de J de rang strictement supérieur à r.

- Comme $\text{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\text{Im}(M_0)$, $\text{Im}(M_0)$ est inclus strictement dans $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$.
- On peut trouver une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\text{Im}(P) = \text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$, par exemple une matrice de projecteur sur $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$.
- D'après le résultat de la question 24 spécialisé à :

$$C \leftarrow P \qquad A \leftarrow M \qquad B \leftarrow M_0$$

il existe deux matrices U et V dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $P = MU + M_0V$.
- Comme $M \in J$ et J est un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $MU \in J$. De même $M_0V \in J$. Puisque J est un sous-groupe de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, alors :

$$P = MU + M_0V \in J.$$

Or :

$$\text{rg}(P) = \dim(\text{Im}(P)) > \dim(\text{Im}(M_0)) = r.$$

■

Q27. — Déduire des questions précédentes que J est contenu dans $J_{\text{Im}(M_0)}$.

- Si J possède un élément M tel que $\text{Im}(M)$ n'est pas inclus dans $\text{Im}(M_0)$, alors le raisonnement de la question précédente livre une contradiction avec la définition de r.
- Donc :

$$\forall M \in J, \quad \text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$$

ce qui signifie que $J \subset J_{\text{Im}(M_0)}$. ■

Q28. — Démontrer que $J = J_{\text{Im}(M_0)}$.

- Soit $M \in J_{\text{Im}(M_0)}$. Alors $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$.
- D'après le résultat de la question 21 spécialisé à :

$$B \leftarrow M \qquad A \leftarrow M_0$$

il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $M = M_0C$. Comme $M_0 \in J$ et J est un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $M \in J$.
- Avec la question précédente, il vient $J = J_{\text{Im}(M_0)}$.

Conclusion. Les idéaux à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont les parties de la forme

$$J_E = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; \text{Im}(A) \subset E\}$$

où E est un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Pour $E = \{0\}$, alors $J_E = \{0_n\}$ et pour $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors $J_E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (seuls idéaux bilatères).

■

VI — Idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

$$J_E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; \mathrm{Ker}(M) \textit{ contient } E\}.$$

Q29. — Démontrer que J_E est un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

- J_E est non vide car contient 0_n.
- Si A et B sont deux éléments de J_E, alors $A - B \in J_E$, car $E \subset \mathrm{Ker}(A)$ et $E \subset \mathrm{Ker}(B)$, donc :

$$E \subset \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(A-B).$$

- D'autre part, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $A \in J_E$, alors $MA \in J_E$ car $E \subset \mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(MA)$.
- Nous avons donc établi que J_E est un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. ■

On désigne par u une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, v une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^q$.

On suppose que $\mathrm{Ker}(v)$ *contient* $\mathrm{Ker}(u)$.

Q30. — Démontrer qu'il existe un homomorphisme w de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ tel que : $v = w \circ u$.

• Première preuve exploitant les dimensions finies

Posons $r = \mathrm{rg}(u)$ et $s = \mathrm{rg}(v)$. On a :

$$r = n - \dim(\mathrm{Ker}(u)) \geqslant n - \dim(\mathrm{Ker}(v)) = s.$$

Soit $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. On la complète en $(e_{s+1}, \ldots, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(v)$, puis on complète en :

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_{r+1}, \ldots, e_n)$$

une base de $\mathbf{R}^n$.

En reprenant la démonstration faite à la question 4, on montre de même que $\big(u(e_1), \ldots, u(e_r)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. On la complète en une base :

$$\mathscr{C} = \big(u(e_1), \ldots, u(e_r), f_{r+1}, \ldots, f_p\big)$$

de $\mathbf{R}^p$.

Soit w l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ déterminée sur la base $\mathscr{C}$ par :

$$\forall\, i \in [\![1, r]\!], \quad w\big(u(e_i)\big) = v(e_i)$$

et

$$\forall\, i \in [\![r+1, p]\!], \quad w(f_j) = 0.$$

Pour vérifier que $v = w \circ u$, il suffit de se placer sur la base $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^p$. On a déjà :

$$\forall\, i \in [\![1, r]\!], \quad w\big(u(e_i)\big) = v(e_i).$$

Si $j \in [\![r+1, p]\!]$, alors $u(e_j) = 0$, donc $v(e_j) = 0$ car $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et l'égalité $w\big(u(e_j)\big) = v(e_j)$ est encore vraie.

• Deuxième preuve plus générale

Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Im}(u)$ dans $\mathbf{R}^p$. Notons p la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à F.

Soit $y \in \mathbf{R}^p$. Comme $p(y) \in \operatorname{Im}(u)$, donc il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $p(y) = u(x)$. Posons $w(y) = v(x)$ avec $p(y) = u(x)$.

Cette définition de $w(y)$ ne dépend pas de l'antécédent x de $p(y)$ par u. En effet, si x' est un autre antécédent, alors $u(x) = u(x')$, donc $u(x - x') = 0$, d'où a fortiori $v(x - x') = 0$ puisque $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$ et ainsi $v(x) = v(x')$.

On vient donc de définir une application w de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$.

Comme, pour tout $x \in \mathbf{R}^p$, $y = u(x) \in \operatorname{Im}(u)$, il vient $p(y) = y$. Donc x est un antécédent de $p(y)$ par u et, par définition de w, on a $w(y) = v(x)$, c'est à dire $w\big(u(x)\big) = v(x)$, ce qui prouve que :

$$v = w \circ u.$$

Il reste à démontrer w est linéaire. Soient y_1 et y_2 deux éléments de $\mathbf{R}^p$, λ un réel, x_1 et x_2 des antécédents respectifs de $p(y_1)$ et de $p(y_2)$ par u. Par définition de w, on a : $w(y_1) = v(x_1)$ et $w(y_2) = v(x_2)$. Or :

$$p(\lambda \cdot y_1 + y_2) = \lambda \cdot p(y_1) + f(y_2) = \lambda \cdot u(x_1) + u(x_2) = u(\lambda \cdot x_1 + x_2).$$

En utilisant à nouveau la définition de w, on obtient :

$$w(\lambda \cdot y_1 + y_2) = v(\lambda \cdot x_1 + v \cdot x_2) = \lambda \cdot v(x_1) + v(x_2) = \lambda \cdot w(y_1) + w(y_2).$$

■

Q31. — Soient $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbf{R})$ telles que $\operatorname{Ker}(B)$ contient $\operatorname{Ker}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbf{R})$ telle que $B = CA$.

- Il suffit de considérer l'élément $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ (resp. $v \in \mathscr{L}\big(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^q\big)$) associé canoniquement à $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ (resp. $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbf{R})$).
- D'après la question précédente, il existe $w \in \mathscr{L}\big(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q\big)$ tel que $v = w \circ u$.
- En notant C la matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbf{R})$ représentant w relativement aux bases canoniques de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$, on a $B = CA$. ■

Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que $\operatorname{Ker}(C)$ *contient* $\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B)$.

Q32. — Démontrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que $C = UA + VB$.

- Considérons la matrice :

$$D := \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,n}(\mathbf{R}).$$

- Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(D) &\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} AX \\ BX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff AX = 0 \text{ et } BX = 0 \\ &\iff X \in \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B). \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(D) = \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B)$.
- Puisque $\operatorname{Ker}(D) \subset \operatorname{Ker}(C)$, d'après le résultat de la question 31 spécialisé à :

$$A \leftarrow D \qquad B \leftarrow C \qquad p \leftarrow 2n \qquad q \leftarrow n$$

il existe $G \in \mathscr{M}_{n,2n}(\mathbf{R})$ tel que $C = GD$. En écrivant :

$$G = (U, V)$$

avec U et V dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on obtient :

$$C = (U, V)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = UA + VB.$$

■

Q33. — Déterminer les idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

- Soit J un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
  - Posons :

    $$X = \{\dim(\mathrm{Ker}(M)) \ : \ M \in J\}$$

    est une partie non vide de $\mathbf{N}$ minorée par 0. Elle admet donc un plus petit élément noté s et il existe $M_0 \in J$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(M_0)) = s$.
  - Soit $M \in J$. Nous souhaitons prouver que $\mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{Ker}(M_0)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(M)$.
    Alors $Ker M \cap \mathrm{Ker}(M_0)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(M_0)$. Considérons un élément $Q \in \mathscr{M}_n \mathbf{R}$ dont le noyau est $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0)$ par exemple une matrice de projecteur parallèlement à $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0)$. Puisque $\mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0)$, d'après la question 32, il existe U et V dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $Q = UM + VM_0$. Comme M et M_0 sont dans J et que J est un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on a $Q \in J$. Or :

    $$\dim(\mathrm{Ker}(Q)) < \dim(\mathrm{Ker}(M_0)) = s$$

    ce qui contredit la définition de s.
  - En résumé :

    $$\forall M \in J, \quad \mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M)$$

    donc $J \subset J_{\mathrm{Ker}(M_0)}$.
  - Réciproquement, si $M \in J_{\mathrm{Ker}(M_0)}$, alors $\mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M)$. D'après le résultat de la question 31 spécialisé à :

    $$A \leftarrow M_0 \qquad M \leftarrow B \qquad p \leftarrow n \qquad q \leftarrow n$$

    il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $M = CM_0$. Comme $M_0 \in J$ et J est un idéal à gauche, on a $M \in J$.
  - Nous avons démontré que $J = J_{\mathrm{Ker}(M_0)}$.
- Conclusion. Les idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont les parties de la forme

$$J_E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ E \subset \mathrm{Ker}(M)\}$$

où E est un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Pour $E = \{0\}$, $J_E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et pour $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $J_E = \{0_n\}$ (seuls idéaux bilatères). ■