Idéaux de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

DM 2

par David Blottière, le 13 septembre 2023 à 15h19

Ce sujet est issu d'une épreuve de 3 heures du concours ESIM (École Supérieure d'Ingénieurs de Marseille) 2002.

I — Notations et définitions

Étant donnés n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.

A étant un élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, on appelle noyau de A, noté $\operatorname{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \;:\; AX = 0\right\}.$$

On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{R})$, noté $\operatorname{Im}(A)$:

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{AX, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})\right\}.$$

Un sous-groupe J de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), +)$ est appelé un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall M \in J, \quad MA \in J.$$

Un sous-groupe J de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall M \in J, \quad AM \in J.$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre n.

II — Résultats préliminaires

Soit A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose A de rang r.

Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Q1. — Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n)$ une base du noyau de u. Démontrer l'existence d'une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ telle que $(e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathbf{R}^n$.

Q2. — Démontrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$.

Q3. — En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ est isomorphe à $\operatorname{Im}(u)$.

Q4. — En déduire que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

Q5. — Peut-on compléter la famille $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r))$ en une base de $\mathbf{R}^n$?

Q6. — En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.

Q7. — Soit D une matrice diagonale d'ordre n telle que r éléments de la diagonale sont égaux à 1, les $n-r$ autres sont nuls. Démontrer que A est équivalente à D.

III — Applications

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Q8. — Démontrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(A)$ est non nul.

Soit A une matrice de rang r, strictement inférieur à n.

Q9. — Démontrer l'existence de $r+1$ matrices, notées A_1, A_2, ..., A_{r+1}, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \dots A_{r+1}$ soit nul.

Q10. — En déduire que $f(A) = 0$.

Q11. — Que peut-on en conclure pour l'application f ?

Q12. — Donner un exemple d'une telle application.

IV — Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit J un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q13. — Démontrer que si $I \in J$, alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q14. — Démontrer que si J contient une matrice inversible alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J.

Q15. — Démontrer que J contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q16. — Démontrer l'existence de $n-r+1$ matrices, notées A_1, A_2, ..., A_{n-r+1}, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

Q17. — Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

V — Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$J_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ E \textit{ contient } \mathrm{Im}(A)\}.$$

Q18. — Démontrer que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{R})$. On suppose que $\mathrm{Im}(B)$ est contenue dans $\mathrm{Im}(A)$. On veut montrer qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ telle que $B = AC$.

On fixe un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.

Q19. — Justifier que l'application ϕ définie par $X \longmapsto AX$ définit un isomorphisme de S dans $\operatorname{Im}(A)$.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbf{R})$.

Q20. — Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q, d'un unique élément ε_i de S tel que :

$$A\varepsilon_i = Be_i.$$

Soit C *l'élément de* $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ *dont les colonnes sont les matrices* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ *:*

$$C = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_q].$$

Q21. — Démontrer que $B = AC$.

Soient A, B *et* C *trois éléments de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *tels que* $\operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)$ *contient* $\operatorname{Im}(C)$.

On désigne par $D = (A, B)$ *la matrice de* $\mathscr{M}_{n,2n}(\mathbf{R})$ *obtenue en juxtaposant les matrices* A *et* B*, c'est-à-dire que les* n *premières colonnes de* D *sont celles de* A *et les* n *dernières celles de* B.

Q22. — Démontrer que $\operatorname{Im}(D) = \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)$.

Q23. — En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathscr{M}_{2n,n}(\mathbf{R})$ telle que : $C = DW$.

Q24. — En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $C = AU + BV$.

Soit J *un idéal à droite de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q25. — Démontrer qu'il existe un entier naturel r tel que :

$$\big(\forall M \in J, \quad \operatorname{rg}(M) \leqslant r\big) \quad \text{et} \quad \big(\exists M_0 \in J, \quad \operatorname{rg}(M_0) = r\big).$$

Soit M *un élément quelconque de* J. *On suppose que* $\operatorname{Im}(M)$ *n'est pas contenue dans* $\operatorname{Im}(M_0)$.

Q26. — En utilisant le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(M) + \operatorname{Im}(M_0)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, démontrer l'existence d'un élément de J de rang strictement supérieur à r.

Q27. — Déduire des questions précédentes que J est contenu dans $J_{\operatorname{Im}(M_0)}$.

Q28. — Démontrer que $J = J_{\operatorname{Im}(M_0)}$.

VI — Idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

Soit E *un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On désigne par J_E *le sous-ensemble de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *:*

$$J_E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ \operatorname{Ker}(M) \ \textit{contient}\ E\}.$$

Q29. — Démontrer que J_E est un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On désigne par u *une application linéaire de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^p$*,* v *une application linéaire de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^q$.

On suppose que $\operatorname{Ker}(v)$ *contient* $\operatorname{Ker}(u)$.

Q30. — Démontrer qu'il existe un homomorphisme w de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ tel que : $v = w \circ u$.

Q31. — Soient $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbf{R})$ telles que $\operatorname{Ker}(B)$ contient $\operatorname{Ker}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbf{R})$ telle que $B = CA$.

Soient A, B *et* C *trois matrices carrées d'ordre* n *telles que* $\operatorname{Ker}(C)$ *contient* $\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B)$.

Q32. — Démontrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que $C = UA + VB$.

Q33. — Déterminer les idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.