GROUPES

par David Blottière, le 6 septembre 2023 à 15h13

DM 1

Consignes

(A) — Le devoir est à remettre le **samedi 9 septembre**.

(B) — Les étudiants de MPI traiteront le problème 1, ceux de MPI* les problèmes 1 et 2.

(C) — Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

(D) — Les copies mal présentées, manquant de soin, souffrant d'un défaut patent d'argumentation ou ne respectant pas toutes les règles énoncées en (C) ne seront pas corrigées.

PROBLÈME 1 — ACTION D'UN GROUPE ET THÉORÈME DE CAUCHY

I — Action d'un groupe

Soit E un ensemble fini et soit $(G,*)$ un groupe fini, dont le neutre est noté e_G. On se donne une application :

$$\rho \left| \begin{array}{ccc} G\times E & \longrightarrow & E \\ (g,x) & \longmapsto & g\cdot x := \rho(g,x) \end{array}\right.$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

(A1) $\forall x\in E,\quad e_G\cdot x = x$

(A2) $\forall (g_1,g_2)\in G^2,\quad \forall x\in E,\quad g_1\cdot \underbrace{(g_2\cdot x)}_{\in E} = \underbrace{(g_1 * g_2)}_{\in G}\cdot x$

Une telle application ρ est appelée action du groupe de $(G,*)$ sur E.

Q1. — Soit $x\in E$. Le *stabilisateur de x* est l'ensemble $\mathrm{Stab}(x)$ défini par :

$$\mathrm{Stab}(x) := \{g\in G\ :\ g\cdot x = x\}\subset G\,.$$

Démontrer que $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

À tout $x\in E$, on associe son orbite $\mathscr{O}(x)$ définie par :

$$\mathscr{O}(x) := \{g\cdot x\ :\ g\in G\}\subset E.$$

Q2. — Soient $(x_1,x_2)\in E^2$. Démontrer que $\mathscr{O}(x_1)\cap\mathscr{O}(x_2)=\emptyset$ ou $\mathscr{O}(x_1)=\mathscr{O}(x_2)$.

Q3. — Soient $\mathscr{O}(x_1),\dots,\mathscr{O}(x_p)$ une liste exhaustive et sans répétition de toutes les orbites. Justifier :

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{p}\mathscr{O}(x_k) \qquad [\text{réunion disjointe}]$$

et en déduire une expression de $\mathrm{Card}(E)$ en fonction des cardinaux des orbites $\mathscr{O}(x_1),\dots,\mathscr{O}(x_p)$.

Q4. — Nous savons qu'une relation d'équivalence sur E livre une partition de E : celle donnée par les classes d'équivalences. Proposer une relation d'équivalence $\sim$ sur E dont la partition de E associée est celle obtenue à la question précédente.

II — Formule des classes

Nous considérons à nouveau un ensemble fini E muni d'une action de groupe ρ par un groupe fini $(G,*)$ et nous fixons un élément $x \in E$.

Q5. — On considère l'application τ définie par :

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathscr{O}(x) \\ g & \longmapsto & g \cdot x. \end{array} \right.$$

Justifier :

$$G = \bigsqcup_{y \in \mathscr{O}(x)} \tau^{-1}\left(\{y\}\right).$$

Q6. — Soit $y \in \mathscr{O}(x)$. Démontrer que les ensembles $\mathrm{Stab}(x)$ et $\tau^{-1}\left(\{y\}\right)$ sont équipotents.

Q7. — En déduire la formule des classes, qui s'énonce comme suit :

$$\mathrm{Card}\left(\mathscr{O}(x)\right) = \frac{\mathrm{Card}(G)}{\mathrm{Card}\left(\mathrm{Stab}(x)\right)}.$$

III — Théorème de Cauchy

Soient $(\Gamma,*)$ un groupe fini de cardinal n. Soit p un diviseur premier de n. Nous nous proposons de démontrer que Γ possède un élément d'ordre p (théorème de Cauchy).

Posons :

$$E := \left\{\left(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p\right) \in \Gamma^p \;:\; \gamma_1 * \gamma_2 * \ldots * \gamma_p = e_\Gamma\right\} \subset \Gamma^p$$

où e_Γ désigne le neutre du groupe $(\Gamma,*)$.

Q8. — Démontrer que E est un ensemble fini, de cardinal n^{p-1}.

Soit $c \in S_p$ le cycle de longueur p défini par :

$$c := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p-1 & p \end{pmatrix}$$

de sorte que $c(p) = 1$ et :

$$\forall\, k \in [\![1, p-1]\!], \quad c(k) = k+1.$$

On note $G := \langle c \rangle$ le sous-groupe de $\left(S_p, \circ\right)$ engendré par c.

Q9. — Démontrer que $\mathrm{Card}(G) = p$.

Pour tout $\gamma := \left(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p\right) \in \Gamma^p$ et tout $\sigma \in S_p$, on définit $\sigma \cdot \gamma \in \Gamma^p$ par :

$$\sigma \cdot \gamma := \left(\gamma_{\sigma(1)},\gamma_{\sigma(2)},\ldots,\gamma_{\sigma(p)}\right) \qquad \left[\textit{permutation des composantes de } \gamma\right].$$

Q10. — Soit $\gamma := \left(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p\right) \in E$. Démontrer que :

$$\forall\, \sigma \in G, \quad \sigma \cdot \gamma \in E.$$

Q11. — D'après la question précédente, l'application ρ définie par :

$$\rho \left| \begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (\sigma,\gamma) & \longmapsto & \sigma \cdot \gamma \end{array} \right.$$

est bien définie. Démontrer qu'elle définit une action du groupe G sur l'ensemble E, i.e. que les propriétés $(A1)$ et $(A2)$ de la partie I sont vérifiées.

Fixons un élément $\gamma = \left(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p\right) \in E$.

Q12. — Justifier que :

$$\mathscr{O}(\gamma) = \left\{ c^k \cdot \gamma \, : \, k \in [\![0, p-1]\!] \right\} .$$

Q13. — Démontrer que $\mathrm{Card}\left(\mathscr{O}(\gamma)\right)$ est égal à 1 ou p.

Q14. — Démontrer :

$$\mathrm{Card}\left(\mathscr{O}(\gamma)\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1^p = e_\Gamma .$$

Q15. — En déduire que Γ possède un élément d'ordre p.

PROBLÈME 2 — UN THÉORÈME DE SYLOW

Ce sujet a été posé à l'oral X-MP-2021.

Soit $(G, *)$ un groupe fini de cardinal $p^\alpha \cdot m$, avec p premier, $\alpha \in \mathbf{N}^*$, $m \geqslant 2$ et $p \wedge m = 1$. On se propose de démontrer que G possède un sous-groupe de cardinal p^α (théorème de Sylow).

Si $g \in G$ et A est une partie de G, alors on pose :

$$g * A := \{g * a \, : \, a \in A\} .$$

Soit E une partie de G de cardinal p^α. On pose :

$$G(E) := \{g \in G \, : \, g * E = E\} \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{O}(E) := \{g * E \, : \, g \in G\} .$$

Q16. — Démontrer que $G(E)$ est un sous-groupe de G et que $\mathrm{Card}\,(G(E)) \leqslant p^\alpha$.

Q17. — Démontrer que :

$$\mathrm{Card}\,(G) = \mathrm{Card}\,(G(E)) \cdot \mathrm{Card}\,(\mathscr{O}(E)) .$$

Q18. — Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) p ne divise pas $\mathrm{Card}\,(\mathscr{O}(E))$.

(b) $\mathrm{Card}\,(G(E)) = p^\alpha$

(c) $\mathrm{Card}\,(\mathscr{O}(E)) = m$

Q19. — On note X l'ensemble des parties de G de cardinal p^α. Déterminer le cardinal de X, puis établir que p ne divise pas $\mathrm{Card}\,(X)$.

Q20. — Démontrer que G possède un sous-groupe de cardinal p^α.