Chapitre 20

Espaces de Banach

David Blottière, le 17 mars 2024 à 07h57

Sommaire

Notations. — *Dans tout ce chapitre,* $\mathbf{K}$ *est le corps* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et* $(E, ||\cdot||)$ *désigne un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé.*

§ 1. Suites de Cauchy

Définition 1. — *Une suite de vecteurs* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ *est dite de Cauchy si :*

$$(\star) \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant N, \quad \forall q \geqslant N, \quad \left|\left| x_p - x_q \right|\right| \leqslant \varepsilon.$$

Dans la définition 1, la propriété $(\star)$ est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall N \leqslant p < q, \quad \left|\left| x_p - x_q \right|\right| \leqslant \varepsilon.$$

La définition de suite de Cauchy ne met en jeu que la suite elle-même, contrairement à celle de suite convergente, dans laquelle apparaît la limite, parfois notée ℓ. Elle revêt donc un caractère plus intrinsèque.

Nous énonçons ci-dessous un lemme commode pour établir qu'une suite est de Cauchy, grâce à la nature de la série numérique des normes des accroissements.

Lemme 2. — *Soit une suite de vecteurs* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ *telle que la série numérique* $\sum ||x_{n+1} - x_n||$ *converge. Alors la suite de vecteurs* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est de Cauchy.*

Démonstration. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. La série numérique $\sum ||x_{n+1} - x_n||$ étant convergente :

$$\sum_{k=p}^{+\infty} ||x_{k+1} - x_k|| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0_{\mathbf{R}}.$$

Ainsi :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant N, \quad \sum_{k=p}^{+\infty} ||x_{k+1} - x_k|| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons deux entiers naturels p et q tels que $N \leqslant p < q$. Alors :

$$||\,x_p - x_q\,|| = \left\|\sum_{k=p}^{q-1} x_{k+1} - x_k\right\| \leqslant \sum_{k=p}^{q-1} ||\,x_{k+1} - x_k\,|| \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty} ||\,x_{k+1} - x_k\,|| \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons démontré que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, N \leqslant p < q, \qquad ||\,x_p - x_q\,|| \leqslant \varepsilon$$

i.e. que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Q.E.D.

Nous allons établir qu'une suite convergente est de Cauchy, mais que la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Proposition 3. — *Une suite convergente de vecteurs de* $(E, ||\cdot||)_E$ *est de Cauchy.*

Démonstration. Considérons une suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $(E, ||\cdot||)$, de limite notée x.
Fixons $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad ||\,x_n - x\,|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous en déduisons que, pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$:

$$||\,x_p - x_q\,|| = ||\,x_p - x + x - x_q\,|| \leqslant ||\,x_p - x\,|| + ||\,x_q - x\,|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nous avons démontré que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, p \geqslant N, \quad \forall\, q \geqslant N, \quad ||\,x_p - x_q\,|| \leqslant \varepsilon$$

i.e. que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Q.E.D.

Contre-exemple 4. — Considérons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par :

$$\forall\, P \in \mathbf{R}[X], \quad ||\,P\,||_\infty := \max\{|[P]_n| \,:\, n \in \mathbf{N}\}$$

et la suite de polynômes $\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

(a) Cette dernière est de Cauchy car :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad ||\,S_{n+1} - S_n\,||_\infty = \left\|\frac{X^{n+1}}{(n+1)!}\right\|_\infty = \frac{1}{(n+1)!}$$

et la série numérique de terme général $\frac{1}{(n+1)!}$ converge (cf. lemme 2).

(b) Cependant, la suite de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge. Démontrons-le en supposant qu'elle converge vers un polynôme P pour la norme $||\cdot||_\infty$. Nous remarquons que, si $d > \deg(P)$ est un entier naturel fixé, alors :

$$\forall\, n \geqslant d, \quad [S_n - P]_d = \frac{1}{d!}$$

et donc :

$$\forall\, n \geqslant d, \quad \frac{1}{d!} \leqslant ||\,S_n - P\,||_\infty.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons $\frac{1}{d!} \leqslant 0$, ce qui n'est pas.

Ainsi, la suite de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, mais diverge.

Proposition 5. — *Une suite de Cauchy de vecteurs de* $(E,||\cdot||)$ *est bornée.*

Démonstration. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $(E,||\cdot||)$ qui est de Cauchy. En spécifiant ε à $1>0$ dans la définition 1, nous obtenons :

$$\exists N\in\mathbf{N},\quad \forall p\geqslant N,\quad \forall q\geqslant N,\quad \left|\left|x_p-x_q\right|\right|\leqslant 1.$$

Nous en déduisons d'abord que :

$$\forall n\geqslant N,\quad ||x_n||=||x_n-x_N+x_N||\leqslant ||x_n-x_N||+||x_N||\leqslant ||x_N||+1$$

puis, en posant $M:=\max\{||x_0||,||x_1||,\dots,||x_N||,||x_N||+1\}$ que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad ||x_n||\leqslant M \qquad \left[\text{disjonction de cas suivant } n\leqslant N \text{ et } n>N\right].$$

La suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée. Q.E.D.

Proposition 6. — *Une suite de Cauchy de vecteurs de* $(E,||\cdot||)$ *qui possède une valeur d'adhérence* $x\in E$ *converge vers* x.

Démonstration. Considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $(E,||\cdot||)$, qui possède une valeur d'adhérence $x\in E$. Alors, il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$ strictement croissante telle que la suite de vecteurs de terme général $x_{\varphi(n)}$ converge vers x.
Fixons $\varepsilon>0$.

(a) Comme la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy :

$$\exists N_1\in\mathbf{N},\quad \forall p\geqslant N_1,\quad \forall q\geqslant N_1,\quad \left|\left|x_p-x_q\right|\right|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) Comme $x_{\varphi(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||}x$:

$$\exists N_2\in\mathbf{N},\quad \forall n\geqslant N_2,\quad \left|\left|x_{\varphi(n)}-x\right|\right|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n\geqslant N:=\max\{N_1,N_2\}$.

(c) Comme $\varphi(n)\geqslant n\geqslant N_1$:

$$\left|\left|x_n-x_{\varphi(n)}\right|\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\qquad\left[\text{d'après (a)}\right].$$

(d) Comme $\varphi(n)\geqslant n\geqslant N_2$:

$$\left|\left|x_{\varphi(n)}-x\right|\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\qquad\left[\text{d'après (b)}\right].$$

De (c) et (d) nous déduisons :

$$||x_n-x||=\left|\left|x_n-x_{\varphi(n)}+x_{\varphi(n)}-x\right|\right|\leqslant\left|\left|x_n-x_{\varphi(n)}\right|\right|+\left|\left|x_{\varphi(n)}-x\right|\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Nous avons démontré que :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbf{N},\quad \forall n\geqslant N,\quad ||x_n-x||\leqslant\varepsilon$$

i.e. que la suite de vecteurs de terme général x_n converge vers x dans $(E,||\cdot||)$. Q.E.D.

Nous résumons les derniers résultats établis dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\text{convergente} \arrow[r, Rightarrow] & \text{de Cauchy} \arrow[r, Rightarrow] & \text{bornée} \\
& \begin{array}{c}\text{de Cauchy}\\ \text{et}\\ \text{valeur d'adhérence}\end{array} \arrow[ul, Rightarrow, bend left] &
\end{tikzcd}$$

§ 2. Espaces de Banach

Définition 7. — *Le* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé* $(E, ||\cdot||)$ *est dit complet ou de Banach si toute suite de Cauchy d'éléments de* E *est convergente.*

Théorème 8. — *Un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie est complet.*

Démonstration. Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Notons que la norme $||\cdot||$ n'importe pas puisque toutes les normes sur E sont équivalentes.
Considérons une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ qui est de Cauchy. D'après la proposition 5, il existe $r \geqslant 0$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad x_n \in \overline{B\,(0_E, r)}.$$

Comme le $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie, la boule $\overline{B\,(0_E, r)}$, qui est fermée et bornée, est compacte. Ainsi la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \overline{B\,(0_E, r)}^{\mathbf{N}}$ possède une valeur d'adhérence $x \in \overline{B\,(0_E, r)}$. D'après la proposition 6 :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in \overline{B\,(0_E, r)} \subset E.$$

Q.E.D.

D'après le théorème 8, $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbf{C}, |\cdot|)$ sont complets. Ces deux exemples d'espaces complets ont un intérêt majeur, pour construire des nombres réels/complexes comme limite de suites de Cauchy de nombres réels/complexes.

En revanche, d'après le contre-exemple 4, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$ n'est pas complet.

Théorème 9. — *Soient* $a < b$ *des réels et* $(F, ||\cdot||)$ *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors* $\mathscr{C}^0([a,b], F)$ *muni de la norme* $||\cdot||_\infty$ *définie par :*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([a,b], F), \quad \left|\left| f \right|\right|_\infty := \sup\left\{ \left|\left| f(t) \right|\right| \,:\, f \in [a,b] \right\}$$

est complet.

Démonstration. Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $\left(\mathscr{C}^0([a,b], F), ||\cdot||_\infty\right)$.

(a) Nous établissons tout d'abord la convergence simple de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
Fixons $t \in [a,b]$ et considérons un réel $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$\exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, p \geqslant N, \quad \forall\, q \geqslant N, \quad \left|\left| f_p - f_q \right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $p \geqslant N$, pour tout $q \geqslant N$:

$$\|f_p(t) - f_q(t)\| \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant N, \quad \forall q \geqslant N, \quad \|f_p(t) - f_q(t)\| \leqslant \varepsilon$$

i.e. que la suite $\left(f_n(t)\right)_{n\in\mathbf{N}} \in F^{\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Comme $(F, \|\cdot\|)$ est complet (théorème **??**), elle est convergente. Nous notons $f(t) \in F$ sa limite dans la suite.

(b) En (a), nous avons établi que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f(t) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t). \end{array} \right.$$

Démontrons que cette convergence est uniforme.
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$(\star) \qquad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant N, \quad \forall q \geqslant N, \quad \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Soient $p \geqslant N$ et $t \in [a,b]$ fixés. De $(\star)$ nous déduisons :

$$\forall q \geqslant N, \quad \|f_p(t) - f_q(t)\| \leqslant \varepsilon.$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, il vient :

$$\|f_p(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon \qquad \left[\text{la norme } \|\cdot\| \text{ est 1-lipschitzienne donc continue}\right].$$

Nous avons démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant N, \quad \forall t \in [a,b], \quad \|f_p(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$$

i.e. que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers uniformément vers la fonction f.

(c) Toutes les fonctions f_n étant continues sur $[a,b]$, nous déduisons de (b) que la fonction f est également continue sur $[a,b]$. Le résultat de (b) peut alors être reformulé :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \text{ dans } \left(\mathscr{C}^0([a,b],F), \|\cdot\|_\infty\right).$$

Q.E.D.

§ 3. Séries absolument convergentes

Définition 10. — *Une série $\sum u_n$ de vecteurs du $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite absolument convergente si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.*

Une série de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé qui est absolument convergente n'est pas nécessairement convergente, comme le montre l'exemple de la série $\sum \frac{X^n}{n!}$ de vecteurs de $(\mathbf{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$. Cette série est absolument convergente car la série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ converge, mais elle diverge (cf. contre-exemple 4).

La convergence des séries de vecteurs absolument convergentes caractérise les espaces de Banach. La proposition suivante précise cette propriété remarquable.

Proposition 11. — *Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de vecteurs de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.*

Démonstration.

(a) Supposons que le **K**-espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ est de Banach. Considérons une série absolument convergente $\sum u_n$ de vecteurs de E et démontrons qu'elle converge, i.e. que la suite de vecteurs $\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ converge.

Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons des entiers naturels $0 \leqslant p < q$. Alors :

$$(\star) \qquad \left|\left| S_p - S_q \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right|\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} ||u_k|| \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} ||u_k||.$$

Par hypothèse, la série $\sum ||u_n||$ converge, donc la suite de ses restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} ||u_k||\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $0_{\mathbf{R}}$. Ainsi :

$$(\star\star) \qquad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||u_k|| \leqslant \varepsilon.$$

Si $N \leqslant p < q$ alors nous déduisons que $(\star)$ et $(\star\star)$ que :

$$\left|\left| S_p - S_q \right|\right| \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall N \leqslant p < q, \qquad \left|\left| S_p - S_q \right|\right| \leqslant \varepsilon$$

i.e. que la suite $\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Comme $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Banach, cette suite converge.

(b) Supposons que toute série absolument convergente de vecteurs de $(E, ||\cdot||)$ est convergente. Considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $(E, ||\cdot||)$ et démontrons qu'elle converge. D'après la proposition 6, il suffit d'établir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une valeur d'adhérence. Pour y parvenir, nous allons construire une extractrice par récurrence.

(in0) En spécialisant ε à $1/2^0 > 0$ dans la définition 1, il vient :

$$\exists N_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall N_0 \leqslant p < q, \quad \left|\left| x_p - x_q \right|\right| \leqslant 1/2^0.$$

Si l'on pose $\varphi(0) := N_0$ alors :

$$(\gamma_0) \qquad \forall q > \varphi(0), \quad \left|\left| x_q - x_{\varphi(0)} \right|\right| \leqslant 1/2^0.$$

(in1) En spécialisant ε à $1/2^1 > 0$ dans la définition 1, il vient :

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}, \quad \forall N_1 \leqslant p < q, \quad \left|\left| x_p - x_q \right|\right| \leqslant 1/2^1.$$

Si l'on pose $\varphi(1) := \max\{\varphi(0)+1, N_1\}$ alors :

$$\begin{cases} (\alpha_1) & \varphi(0) < \varphi(1) \qquad [\text{car } \varphi(1) \geqslant \varphi(0)+1] \\ (\beta_1) & \left|\left| x_{\varphi(1)} - x_{\varphi(0)} \right|\right| \leqslant 1/2^0 \qquad [\text{d'après } \varphi(1) > \varphi(0) \text{ et } (\gamma_0)] \\ (\gamma_1) & \text{pour tout } q > \varphi(1), \ \left|\left| x_q - x_{\varphi(1)} \right|\right| \leqslant 1/2^1 \qquad [\text{car } \varphi(1) \geqslant N_1]. \end{cases}$$

(hé) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons construits des entiers naturels $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ tels que :

$$\begin{cases} (\alpha_n) & \varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n) \\ (\beta_n) & \text{pour tout } k \in [\![0, n-1]\!], \ \left|\left| x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)} \right|\right| \leqslant 1/2^k \\ (\gamma_n) & \text{pour tout } q > \varphi(n), \ \left|\left| x_q - x_{\varphi(n)} \right|\right| \leqslant 1/2^n. \end{cases}$$

En spécialisant ε à $1/2^{n+1} > 0$ dans la définition 1, il vient :

$$\exists\, N_{n+1} \in \mathbf{N}, \quad \forall\, N_{n+1} \leqslant p < q, \quad \left|\left| x_p - x_q \right|\right| \leqslant 1/2^{n+1}.$$

Si l'on pose $\varphi(n+1) := \max\{\varphi(n)+1, N_{n+1}\}$ alors :

$$\left\{\begin{array}{ll} & \varphi(n) < \varphi(n+1) \qquad [\text{car } \varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)+1] \\ & \left|\left| x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \right|\right| \leqslant 1/2^n \qquad [\text{d'après } \varphi(n+1) > \varphi(n) \text{ et } (\gamma_n)] \\ (\gamma_{n+1}) & \text{pour tout } q > \varphi(n+1),\ \left|\left| x_q - x_{\varphi(n+1)} \right|\right| \leqslant 1/2^{n+1} \qquad [\text{car } \varphi(n+1) \geqslant N_{n+1}]. \end{array}\right.$$

Ces trois propriétés, assemblées avec (α_n), (β_n) et (γ_n) livrent :

$$\left\{\begin{array}{ll} (\alpha_{n+1}) & \varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n) < \varphi(n+1) \\ (\beta_{n+1}) & \text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ \left|\left| x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)} \right|\right| \leqslant 1/2^k \\ (\gamma_{n+1}) & \text{pour tout } q > \varphi(n+1),\ \left|\left| x_q - x_{\varphi(n+1)} \right|\right| \leqslant 1/2^{n+1}. \end{array}\right.$$

(co) Nous déduisons de la construction par récurrence précédente l'existence d'une application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}\right.$$

strictement croissante telle que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \left|\left| x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \right|\right| \leqslant 1/2^n.$$

La série géométrique $\sum 1/2^n$ converge $(-1 < 1/2 < 1)$. Par théorème de domination pour les séries à termes réels positifs, la série $\sum \left|\left| x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \right|\right|$ converge également, i.e. la série $\sum x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$ de vecteurs de $(E, ||\cdot||)$ est absolument convergente. D'après l'hypothèse faite au début de cette partie (b), la série de vecteurs $\sum x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$ converge dans $(E, ||\cdot||)$. Nous en déduisons que la suite de vecteurs $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $(E, ||\cdot||)$.

Q.E.D.

Les propositions 8 et 11 jointes fournissent une démonstration alternative de la propriété suivante : une série absolument convergente de vecteurs d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie est convergente. Ceci s'applique en particulier aux séries numériques à valeurs réelles/complexes ou encore aux séries de matrices à coefficients réels ou complexes.

§ 4. Théorème de la double limite en un point du bord

Nous allons illustrer une conséquence de la complétude de $(\mathbf{K}, |\cdot|)$ en démontrant le résultat suivant, qui a été admis en cours d'année.

Théorème 12. — *Soient $a < b$ des nombres réels et $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ dans $\mathbf{K}$. On suppose que :*

(H1) la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b[$ vers une fonction $f \in \mathbf{K}^{[a,b[}$;

(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un nombre $\ell_n \in \mathbf{K}$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell_n$.

Alors :

(C1) la suite numérique $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{K}$;

(C2) si on pose $\ell := \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell$.

Démonstration.

(C1) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse (H1) :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in [a,b[, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$. Alors, pour tout $x \in [a,b[$:

$$\left|f_p(x) - f_q(x)\right| = \left|f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x)\right| \leqslant \left|f_p(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_q(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En faisant tendre x vers b par valeurs inférieures, il vient :

$$\left|\ell_p - \ell_q\right| \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant N, \quad \forall q \geqslant N, \quad \left|\ell_p - \ell_q\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Comme $(\mathbf{K}, |\cdot|)$ est complet, elle converge dans $\mathbf{K}$. Nous notons ℓ sa limite pour la suite.

(C2) Fixons $\varepsilon > 0$. D'après (a) :

$$(\star) \qquad \exists N_1 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N_1, \quad |\ell_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après (H1) :

$$(\star\star) \qquad \exists N_2 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N_2, \quad \forall x \in [a,b[, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$. D'après (H2) :

$$(\star\star\star) \qquad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in]b-\alpha, b[\cap [a,b[, \quad \left|f_N(x) - \ell_N\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons $x \in]b-\alpha, b[\cap [a,b[$. Alors :

$$\left|f(x) - \ell\right| = \left|f(x) - f_N(x) + f_N(x) - \ell_N + \ell_N - \ell\right| \leqslant \left|f(x) - f_N(x)\right| + \left|f_N(x) - \ell_N\right| + |\ell_N - \ell|$$

Comme $N \geqslant N_2$, $x \in]b-\alpha, b[\cap [a,b[$ et $N \geqslant N_1$, nous déduisons de $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ et $(\star)$ que :

$$\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Nous avons démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in]b-\alpha, b[\cap [a,b[, \quad \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

i.e. que $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} \ell$.

Q.E.D.

Dans la démonstration précédente, seule la complétude de $(\mathbf{K}, |\cdot|)$ a joué un rôle. Grâce au théorème 8, on peut donc *mutatis mutandis* démontrer le théorème suivant.

Théorème 13. — *Soient $a < b$ des nombres réels, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et une suite de fonctions de l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F de dimension finie. On suppose que :*

(H1) la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b[$ vers une fonction $f \in F^{[a,b[}$;

(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un vecteur $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} \ell_n$.

Alors :

(C1) la suite de vecteurs $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans F ;

(C2) si on pose $\ell := \lim_{n\to+\infty} \ell_n$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} \ell$.

§ 5. Théorème du point fixe de Banach-Picard

Dans cette partie, nous discutons d'un théorème qui revêt un intérêt majeur pour démontrer l'existence et l'unicité de solution d'équations, différentielles notamment.

Théorème 14. — *Supposons que $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Banach et considérons une application $f : E \longrightarrow E$ qui est contractante, i.e. telle que :*

$$\exists\, k \in [0,1[, \quad \forall\,(x,y)\in E^2, \quad \big|\big|\, f(x) - f(y) \,\big|\big| \leqslant k\, \big|\big|\, x - y \,\big|\big|.$$

Alors l'application f possède un unique point fixe dans E, i.e. :

$$\exists!\, \ell \in E, \quad f(\ell) = \ell.$$

Démonstration.

(a) Nous démontrons que le point fixe de f, s'il existe, est unique. Considérons donc deux vecteurs ℓ_1, ℓ_2 de E distincts tels que $f(\ell_1) = f(\ell_2)$. Alors :

$$||\,\ell_1 - \ell_2\,|| = \big|\big|\, f(\ell_1) - f(\ell_2) \,\big|\big| \leqslant k\, ||\,\ell_1 - \ell_2\,||$$

Comme $||\,\ell_1 - \ell_2\,|| > 0$, nous en déduisons $1 \leqslant k$, ce qui n'est pas.

(b) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée d'un vecteur $x_0 \in E$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Nous allons démontrer que cette suite est convergente et que sa limite est un point fixe de f.
Nous commençons par démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\mathscr{P}(n) \quad : \quad ||\,x_{n+1} - x_n\,|| \leqslant k^n\, ||\,x_1 - x_0\,||.$$

(in) L'assertion $\mathscr{P}(0)$ s'écrit $||\,x_1 - x_0\,|| \leqslant k^0\, ||\,x_1 - x_0\,||$. Elle est vraie.

(hé) Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(n)$ est vraie. D'après le caractère contractant de l'application f :

$$(\star) \qquad ||\,x_{n+2} - x_{n+1}\,|| = \big|\big|\, f(x_{n+1}) - f(x_n) \,\big|\big| \leqslant k\, ||\,x_{n+1} - x_n\,||.$$

D'après $\mathscr{P}(n)$:

$$||\,x_{n+1} - x_n\,|| \leqslant k^n\, ||\,x_1 - x_0\,||$$

et, comme $k \geqslant 0$, nous en déduisons :

$$(\star\star) \qquad k\, ||\,x_{n+1} - x_n\,|| \leqslant k^{n+1}\, ||\,x_1 - x_0\,||.$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$||\,x_{n+2} - x_{n+1}\,|| \leqslant k^{n+1}\, ||\,x_1 - x_0\,||.$$

L'assertion $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

(co) Nous avons établi que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad ||\,x_{n+1} - x_n\,|| \leqslant k^n\, ||\,x_1 - x_0\,||.$$

La série géométrique de terme général $k^n\ ||x_1 - x_0||$ est convergente $(-1 < k < 1)$. Par théorème de domination pour les séries à termes réels positifs, la série de vecteurs $\sum x_{n+1} - x_n$ de $(E, ||\cdot||)$ est donc absolument convergente. Comme le **K**-espace vectoriel $(E, ||\cdot||)$ est de Banach, la série de vecteurs $\sum x_{n+1} - x_n$ converge dans $(E, ||\cdot||)$ (proposition 11). Nous en déduisons que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $(E, ||\cdot||)$.
Si ℓ désigne sa limite, alors la relation :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$ et la continuité de f en ℓ (f est k-lipschitzienne) livrent $f(\ell) = \ell$, i.e. ℓ est un/le point fixe de f.

Q.E.D.

La démonstration du théorème 14 contient des informations supplémentaires. Si x_0 est un vecteur quelconque de E et si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite des itérées de x_0 par f, alors la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $(E, ||\cdot||)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f. En outre, on peut établir, au moyen d'un raisonnement par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad ||x_n - \ell|| \leqslant k^n\ ||x_0 - \ell||$$

ce qui renseigne sur la vitesse de convergence (elle est au moins géométrique).

Corollaire 15. — *Supposons que $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Banach et considérons une application $f\colon E \longrightarrow E$ dont une des itérées est contractante, i.e. telle que :*

$$\exists\, p \in \mathbf{N}^*, \quad \exists\, k \in [0,1[, \quad \forall\,(x,y) \in E^2, \quad \left|\left| f^p(x) - f^p(y) \right|\right| \leqslant k \left|\left| x - y \right|\right|.$$

Alors l'application f possède un unique point fixe dans E.

Démonstration. D'après le théorème du point fixe de Banach-Picard (théorème 14) appliqué à l'application contractante f^p :

$$(\star) \qquad \exists!\, \ell \in E, \quad f^p(\ell) = \ell.$$

Nous allons établir que ℓ est l'unique point fixe de f.

(a) Établissons tout d'abord l'existence d'un/du point fixe de f. En composant l'identité de $(\star)$ par f, il vient :

$$f^{p+1}(\ell) = f(\ell)$$

que l'ont peut écrire également :

$$f^p(f(\ell)) = f(\ell).$$

Ainsi $f(\ell)$ est un point fixe de l'application f^p dans E. D'après l'unicité dans $(\star)$, $f(\ell) = \ell$.

(b) Passons à l'unicité d'un/du point fixe de f. Considérons donc deux vecteurs ℓ_1, ℓ_2 de E distincts tels que :

$$f(\ell_1) = f(\ell_2).$$

En composant par f^{p-1} chaque membre $(p-1 \geqslant 0)$, il vient :

$$f^p(\ell_1) = f^p(\ell_2).$$

D'après l'unicité dans $(\star)$, $\ell_1 = \ell_2$.

Q.E.D.

Les points (a) et (b) de la démonstration du corollaire 15 reposent uniquement sur la propriété $(\star)$. Nous observons que cette partie de la démonstration peut être adaptée pour démontrer la propriété suivante : si X est un ensemble et $f\colon X \longrightarrow X$ est une application dont une itérée possède un unique point fixe $\ell \in X$, alors f possède ℓ comme unique point fixe.

§ 6. Théorème de Cauchy linéaire

Notations. — *Dans cette partie, nous considérons :*

- *un intervalle I non vide ;*
- *un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F de dimension finie ;*
- *une application continue $a \colon I \longrightarrow \mathscr{L}(F)$;*
- *une application continue $b \colon I \longrightarrow F$;*
- *t_0 un point de l'intervalle I ;*
- *x_0 un vecteur de l'espace F.*

et nous étudions le problème de Cauchy :

$$(\mathscr{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \quad \forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ \text{et} \\ \quad x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

d'inconnue une application $x \colon I \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Lemme 16. — *Soit $x \colon I \longrightarrow F$ une application continue. Alors l'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & a(t)(x(t)) + b(t) \end{array} \right.$$

est continue.

Démonstration. L'application :

$$B \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F) \times F & \longrightarrow & F \\ (f, v) & \longmapsto & f(v) \end{array} \right.$$

est bilinéaire. Avec la continuité des applications $a \colon I \longrightarrow \mathscr{L}(F)$ et $x \colon I \longrightarrow F$, nous en déduisons que l'application :

$$B(a,x) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & B(a(t), x(t)) = a(t)(x(t)) \end{array} \right.$$

est continue. L'application :

$$B(a,x) + b \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & a(t)(x(t)) + b(t) \end{array} \right.$$

est donc continue, comme somme d'applications continues. Q.E.D.

Nous reformulons ci-dessous le problème de Cauchy $(\mathscr{P})$ sous forme intégrale.

Proposition 17. — *Soit une application $x \colon I \longrightarrow E$. Alors :*

$$\left(\begin{array}{l} \quad x \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \\ \text{et} \\ \quad x \text{ est solution de } (\mathscr{P}) \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \quad x \text{ est de classe } \mathscr{C}^0 \text{ sur } I \\ \text{et} \\ \quad \forall\, t \in I, \quad x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\, \mathrm{d}u \end{array} \right).$$

Démonstration.

(a) Démontrons tout d'abord l'implication directe et supposons que l'application $x\colon I \longrightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (x est donc continue) et qu'elle est solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, i.e. :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ \text{et} \\ x(t_0) = x_0. \end{array}\right.$$

D'après la continuité de x' et le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :

$$\left|\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \underbrace{a(u)(x(u)) + b(u)}_{=x'(u)}\, \mathrm{d}u \end{array}\right.$$

est dérivable sur I, de dérivée x' et est nulle en t_0. La fonction :

$$\left|\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x(t) - x(t_0) \end{array}\right.$$

est également dérivable sur I, de dérivée x' et est nulle en t_0. Par unicité de la primitive de x' sur I nulle en t_0, il vient :

$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\, \mathrm{d}u.$$

(b) Passons à l'implication réciproque et supposons que l'application $x\colon I \longrightarrow F$ est continue et vérifie :

$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\, \mathrm{d}u.$$

D'après le lemme 16 et le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :

$$x \left|\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\, \mathrm{d}u \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

Enfin, on calcule $x(t_0) = x_0$.

Q.E.D.

D'après la proposition 17 résoudre le problème de Cauchy $(\mathscr{P})$ revient à déterminer les fonctions $x\colon I \longrightarrow F$ continues telles que :

$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\, \mathrm{d}u$$

ou encore à rechercher les points fixes de l'application :

$$T \left|\begin{array}{lcl} \mathscr{C}^0(I,F) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(I,F) \\ x & \longmapsto & T(x) \left|\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\, \mathrm{d}u \end{array}\right. \end{array}\right.$$

qui est bien définie, en vertu du lemme 16 et du théorème fondamental de l'analyse : si $x \in \mathscr{C}^0(I,F)$, alors $T(x) \in \mathscr{C}^1(I,F) \subset \mathscr{C}^0(I,F)$. Notre attention se porte désormais uniquement sur les points fixes de l'application T.

Notations. — *Dans la suite, nous fixons une norme $\|\cdot\|$ sur le* **K**-*espace vectoriel F de dimension finie (elles sont toutes équivalentes) et nous considérons la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{L}(F)$:*

$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & |||f||| := \sup\left\{\left\|f(x)\right\| \;:\; x \in E \text{ et } \|x\| \leqslant 1\right\}. \end{array} \right.$$

Nous savons que la norme $|||\cdot|||$ sur $\mathscr{L}(F)$ vérifie :

$$\forall (f,v) \in \mathscr{L}(F) \times F, \quad \left\|f(v)\right\| \leqslant |||f||| \times \|v\| \qquad \text{[propriété d'une norme subordonnée]}.$$

Lemme 18. — *Supposons que l'intervalle I est un segment (i.e. compact). Alors :*

$$|||a|||_\infty := \sup\{|||a(t)||| \;:\; t \in I\}$$

est un réel positif bien définie.

Démonstration. L'application $|||\cdot||| : \mathscr{L}(F) \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est continue car 1-lipschitzienne. Ainsi, l'application :

$$|||\cdot||| \circ a \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ t & \longmapsto & |||a(t)||| \end{array} \right.$$

est continue comme composée d'applications continues. Comme I est compact, cette application est bornée et atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes). Ainsi le réel :

$$\sup\{|||a(t)||| \;:\; t \in I\}$$

est bien défini (et cette borne supérieure est un maximum). Q.E.D.

Théorème 19. — *Supposons que l'intervalle I est un segment. Alors l'application :*

$$T \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(I,F) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(I,F) \\ x & \longmapsto & T(x) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right. \end{array} \right.$$

possède un unique point fixe et donc, d'après la discussion précédente, le problème de Cauchy :

$$(\mathscr{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ \text{et} \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

d'inconnue une application $x\colon I \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ possède une unique solution.

Démonstration.

(a) Si nous munissons le **K**-espace vectoriel $\mathscr{C}^0(I,F)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|\cdot\|_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(I,F) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup\left\{\left\|f(t)\right\| \;:\; t \in I\right\} \end{array} \right.$$

alors $\left(\mathscr{C}^0(I,F), \|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace de Banach (théorème 9). D'après le corollaire 15, il suffit de démontrer qu'une itérée de l'application T est contractante pour établir que l'application T possède un unique point fixe.

(b) Considérons $(x_1, x_2) \in \mathscr{C}^0(I,F)^2$. Nous démontrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$\mathscr{P}(p) \quad : \quad \forall\, t \in I, \quad \left|\left|\, T^p(x_1)(t) - T^p(x_2)(t) \,\right|\right| \leqslant \frac{|||a|||_\infty^p}{p!} \times |t-t_0|^p \times ||\,x_1 - x_2\,||_\infty.$$

(in) Comme $T^0 = \mathrm{id}_{\mathscr{C}^0(I,F)}$, l'assertion $\mathscr{P}(0)$ se réécrit :

$$\forall\, t \in I, \quad ||\,x_1(t) - x_2(t)\,|| \leqslant ||\,x_1 - x_2\,||_\infty.$$

Elle est vraie.

(hé) Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(p)$ est vraie. Fixons un réel $t \in I$. D'après la linéarité de l'intégrale et la linéarité de $a(u)$ $(u \in I)$:

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\, T^{p+1}(x_1)(t) - T^{p+1}(x_2)(t) \,\right|\right| \\
&= \left|\left|\, T\left(T^p(x_1)\right)(t) - T\left(T^p(x_2)\right)(t) \,\right|\right| \\
&= \left|\left| x_0 + \int_{t_0}^t a(u)\left(T^p(x_1)(u)\right) + b(u)\ \mathrm{d}u - \left(x_0 + \int_{t_0}^t a(u)\left(T^p(x_2)(u)\right) + b(u)\ \mathrm{d}u\right) \right|\right| \\
&= \left|\left| \int_{t_0}^t a(u)\left(T^p(x_1)(u) - T^p(x_2)(u)\right)\ \mathrm{d}u \right|\right|
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire livre :

$$\left|\left|\, T^{p+1}(x_1)(t) - T^{p+1}(x_2)(t) \,\right|\right| \leqslant \int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} \left|\left|\, a(u)\left(T^p(x_1)(u) - T^p(x_2)(u)\right) \right|\right|\ \mathrm{d}u$$

D'après la propriété d'une norme subordonnée et la croissance de l'intégrale :

$$\left|\left|\, T^{p+1}(x_1)(t) - T^{p+1}(x_2)(t) \,\right|\right| \leqslant \int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} |||a(u)||| \times \left|\left|\, T^p(x_1)(u) - T^p(x_2)(u) \,\right|\right|\ \mathrm{d}u.$$

Le lemme 18, l'hypothèse de récurrence et la croissance de l'intégrale entraînent alors :

$$\begin{aligned}
\left|\left|\, T^{p+1}(x_1)(t) - T^{p+1}(x_2)(t) \,\right|\right| &\leqslant \int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} \frac{|||a|||_\infty^{p+1}}{p!} \times |u-t_0|^p \times ||\,x_1 - x_2\,||_\infty\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{|||a|||_\infty^{p+1}}{p!} \times ||\,x_1 - x_2\,||_\infty \times \int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} |u-t_0|^p\ \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Si $t \geqslant t_0$ alors :

$$\int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} |u-t_0|^p\ \mathrm{d}u = \int_{t_0}^t (u-t_0)^p\ \mathrm{d}u = \left[\frac{(u-t_0)^{p+1}}{p+1}\right]_{t_0}^t = \frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1} = \frac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}.$$

Si $t < t_0$ alors :

$$\int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} |u-t_0|^p\ \mathrm{d}u = \int_t^{t_0} (t_0-u)^p\ \mathrm{d}u = \left[-\frac{(t_0-u)^{p+1}}{p+1}\right]_t^{t_0} = \frac{(t_0-t)^{p+1}}{p+1} = \frac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}.$$

Dans tous les cas :

$$\int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} |u-t_0|^p\ \mathrm{d}u = \frac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}.$$

La dernière inégalité établie se réécrit donc :

$$\begin{aligned}
\left|\left|\, T^{p+1}(x_1)(t) - T^{p+1}(x_2)(t) \,\right|\right| &\leqslant \frac{|||a|||_\infty^{p+1}}{p!} \times ||\,x_1 - x_2\,||_\infty \times \frac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1} \\
&= \frac{|||a|||_\infty^{p+1}}{(p+1)!} \times |t-t_0|^{p+1} \times ||\,x_1 - x_2\,||_\infty.
\end{aligned}$$

(co) Nous avons démontré que :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall t \in I, \quad \left|\left| T^p(x_1)(t) - T^p(x_2)(t) \right|\right| \leqslant \frac{|||a|||_\infty^p}{p!} \times |t - t_0|^p \times ||x_1 - x_2||_\infty.$$

(c) Notons $\mathrm{long}(I)$ la longueur du segment I. De (b) nous déduisons :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall t \in I, \quad \left|\left| T^p(x_1)(t) - T^p(x_2)(t) \right|\right| \leqslant \underbrace{\frac{\left(|||a|||_\infty \times \mathrm{long}(I)\right)^p}{p!} \times ||x_1 - x_2||_\infty}_{\text{indépendant de } t}$$

puis :

$$(\star) \qquad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \left|\left| T^p(x_1) - T^p(x_2) \right|\right|_\infty \leqslant \frac{\left(|||a|||_\infty \times \mathrm{long}(I)\right)^p}{p!} \times ||x_1 - x_2||_\infty.$$

Comme :

$$\frac{\left(|||a|||_\infty \times \mathrm{long}(I)\right)^p}{p!} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0_{\mathbf{R}}$$

nous savons que :

$$(\star\star) \qquad \exists p_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant p_0, \quad \frac{\left(|||a|||_\infty \times \mathrm{long}(I)\right)^p}{p!} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$\left|\left| T^{p_0}(x_1) - T^{p_0}(x_2) \right|\right|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \, ||x_1 - x_2||_\infty.$$

L'application T^{p_0} est donc contractante.

Q.E.D.

Le théorème 19 constitue un cas particulier (celui où I est un segment) du théorème de Cauchy linéaire que nous énonçons à présent en toute généralité (l'hypothèse de compacité sur l'intervalle disparaît).

Théorème 20. — *Le problème de Cauchy :*

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ \textit{et} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

d'inconnue une application $x \colon I \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ possède une unique solution.

Démonstration. Le résultat est connu si I est un segment (théorème 19). Dans la suite, on suppose que I est un intervalle non vide, qui n'est pas un segment.

(a) D'après le théorème 19, pour tout segment K contenant t_0 et inclus dans I, le problème de Cauchy :

$$(\mathscr{P}_K) \quad \begin{cases} \forall t \in K, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ \text{et} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $x_K \colon K \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$.

(b) Si K_1 et K_2 sont deux segments contenant t_0, inclus dans I et tels que $K_1 \subset K_2$, alors la restriction de l'application $x_{K_2} \colon K_2 \longrightarrow F$ à K_1 est solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P}_{K_1})$. Ce dernier possédant une unique solution, $x_{K_1} \colon K_1 \longrightarrow F$, il vient :

$$\forall\, t \in K_1, \quad x_{K_1}(t) = x_{K_2}(t).$$

(c) Nous posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$K_n := \begin{cases} [a, t_0 + n] & \text{si } I = [a, +\infty[\text{ où } a \text{ est réel} \\ [a, b - (b - t_0)/n] & \text{si } I = [a, b[\text{ où } a < b \text{ sont réels} \\ [a + (t_0 - a)/n, t_0 + n] & \text{si } I =]a, +\infty[\text{ où } a \text{ est réel} \\ [a + (t_0 - a)/n, b] & \text{si } I =]a, b] \text{ où } a < b \text{ sont réels} \\ [a + (t_0 - a)/n, b - (b - t_0)/n] & \text{si } I =]a, b[\text{ où } a < b \text{ sont réels} \\ [t_0 - n, b] & \text{si } I =]-\infty, b] \text{ où } b \text{ est réel} \\ [t_0 - n, b - (b - t_0)/n] & \text{si } I =]-\infty, b[\text{ où } b \text{ est réel} \\ [t_0 - n, t_0 + n] & \text{si } I = \mathbf{R}. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, K_n est un segment contenant t_0 et inclus dans I. De plus, la suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante et exhaustive de parties de I, i.e. :

(sc) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $K_n \subset K_{n+1}$;

(se) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} K_n = I$.

D'après (se), pour tout $t \in I$, le nombre entier entier naturel non nul :

$$n(t) := \min\left\{n \in \mathbf{N}^* \;:\; t \in K_n\right\}$$

est donc bien défini (bon ordre).

(d) Considérons l'application :

$$x \colon I \longrightarrow F$$

obtenue en recollant les applications $x_{K_n} \colon K_n \longrightarrow F$, où $n \in \mathbf{N}^*$. Elle est obtenue en posant :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\, t \in K_n, \quad x(t) = x_{K_n}(t).$$

Soit $t \in I$.

- Comme $t \in K_{n(t)}$, l'élément t de I possède au moins une image par x.
- D'après (b) et (sc) :

$$\forall\, m \geqslant n(t), \quad x_{K_{n(t)}}(t) = x_{K_m}(t).$$

  Donc l'élément t de I possède au plus une image par x.

Des deux points précédents nous déduisons que l'application x est bien définie. De plus, par construction de l'application x :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad x_{|K_n} = x_{K_n} \qquad \left[\text{la restriction de } x \text{ à } K_n \text{ est } x_{K_n}\right].$$

(e) Vérifions que l'application $x \colon I \longrightarrow F$ est solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$.

- Comme :

$$\forall\, t \in K_1, \quad x(t) = x_{K_1}(t)$$

  et x_{K_1} est solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P}_{K_1})$:

$$x(t_0) = x_{K_1}(t_0) = x_0 \qquad [t_0 \in K].$$

- Soit t un point intérieur de l'intervalle I. Le segment $K_{n(t)+1}$ est un voisinage de t et :
$$x_{|K_{n(t)+1}} = x_{K_{n(t)+1}}.$$
Comme l'application $x_{K_{n(t)+1}}$ est solution du problème de Cauchy $\left(\mathscr{P}_{K_{n(t)+1}}\right)$, l'application x est $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de t et :
$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \qquad \left[t \in K_{n(t)+1}\right].$$
- Si t est un point du bord de l'intervalle I, alors $n(t) = 1$. Le segment K_1 est un voisinage de t dans I et :
$$x_{|K_1} = x_{K_1}.$$
Comme l'application x_{K_1} est solution du problème de Cauchy $\left(\mathscr{P}_{K_1}\right)$, l'application x est $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de t dans I et :
$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \qquad [t \in K_1].$$

Des trois points précédents, nous déduisons que l'application x définie en (d) est solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$.

(f) Il reste à établir l'unicité de la solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$. Soit y une solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$. Alors , pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
$$y_{|K_n}$$
est solution du problème de Cauchy $\left(\mathscr{P}_{K_n}\right)$. Nous en déduisons que :
$$\forall\, t \in K_n, \quad y(t) = x_{K_n}(t) = x(t).$$
Comme la suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite exhaustive de parties de I (cf. (se)), il vient :
$$\forall\, t \in I, \quad y(t) = x(t).$$

Q.E.D.