OPTIMISATION

par David Blottière, le 19 avril 2024 à 17h26

CHAPITRE 19

SOMMAIRE

§ 1. Optimisation au premier ordre

Définition 1 (point critique d'une application différentiable). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω un ouvert de E, $f\colon \Omega \longrightarrow F$ une application différentiable et $x \in \Omega$. On dit qu'un point x est un point critique de f si :*

$$\mathrm{d}f(x) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

Exercice 2. — Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 - 3x + xy^2 \end{array} \right.$$

est différentiable et déterminer ses points critiques. □

Définition 3 (extremum local). — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie de E, $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.*

1. *On dit que f atteint un maximum local en un point a_M de A si :*

$$\exists\, r > 0, \quad \forall\, a \in A \cap B(a_M, r), \quad f(a) \leqslant f(a_M).$$

2. *On dit que f atteint un minimum local en un point a_m de A si :*

$$\exists\, r > 0, \quad \forall\, a \in A \cap B(a_m, r), \quad f(a) \geqslant f(a_m).$$

Théorème 4 (condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert). — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable sur Ω. Si f atteint un extremum local en un point x_0 de Ω, alors x_0 est un point critique de f.*

La condition nécessaire du théorème 4 n'est pas suffisante. En effet, la point 0 est un point critique de l'application différentiable :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

mais la fonction f n'atteint pas un extremum local en ce point.

Exercice 5. — Étudier les extrema globaux de l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y & \longmapsto & xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}. \end{array} \right.$$

□

Exercice 6 (généralisation du théorème de Rolle). — On munit $\mathbf{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle $||\cdot||$ et on note :

$$B := \left\{x \in \mathbf{R}^n \,:\, ||x|| < 1\right\} \quad , \quad \overline{B} := \left\{x \in \mathbf{R}^n \,:\, ||x|| \leqslant 1\right\} \quad , \quad S := \left\{x \in \mathbf{R}^n \,:\, ||x|| = 1\right\}.$$

Soit $f\colon \overline{B} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue sur $\overline{B}$, différentiable sur B et constante sur S. Démontrer qu'il existe $c \in B$ tel que $\mathrm{d}f(c) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})}$. □

Théorème 7 (condition nécessaire d'existence d'un extremum local sous contrainte). — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E, X une partie de Ω, $x_0 \in X$ et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable en x_0.*
Si la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0, alors :

$$\forall\, v \in T_{x_0}X, \quad \mathrm{d}f(x_0)\cdot v = 0_{\mathbf{R}}.$$

Lemme 8 (colinéarité de deux formes linéaires). — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, φ une forme linéaire non nulle sur E et ψ une forme linéaire sur E. Alors :*

$$\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(\psi) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad \psi = \lambda \varphi).$$

Théorème 9 (optimisation sous contrainte). — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E, f, g des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans $\mathbf{R}$,*

$$X := f^{-1}(\{0_{\mathbf{R}}\}) = \left\{x \in \Omega \,:\, f(x) = 0_{\mathbf{R}}\right\}$$

et $x \in X$ tel que $\mathrm{d}g(x) \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbf{R})}$.
Si la restriction de g à X atteint un extremum local en x_0, alors :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{d}f(x) = \lambda\, \mathrm{d}g(x).$$

Corollaire 10 (optimisation sous contrainte pour une fonction de plusieurs variables). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, f, g des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans $\mathbf{R}$,*

$$X := f^{-1}(\{0_{\mathbf{R}}\}) = \left\{x \in \Omega \,:\, f(x) = 0_{\mathbf{R}}\right\}$$

et $x \in X$ tel que $\mathrm{d}g(x) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})}$.
Si la restriction de g à X atteint un extremum local en x_0, alors :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad \nabla f(x) = \lambda\, \nabla g(x).$$

Exercice 11. — Déterminer les extrema globaux de la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \right.$$

sur $S := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\right\}$. □

Exercice 12. — Déterminer les extrema globaux de la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & y^2\left(x^2 - z^2 - 1\right) \end{array} \right.$$

sur $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. □

Exercice 13 (théorème spectral). — On note $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $|| \cdot ||$ la norme associée. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, S la sphère unité de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & \langle AX\,, X \rangle. \end{array} \right.$$

1. Justifier que la fontion f admet un maximum sur S.
2. En utilisant le théorème d'optimisation sous contrainte, démontrer que A possède un vecteur propre.

□

§ 2. Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 14 (dérivées partielles d'ordre k). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une application, $k \geqslant 2$ un entier et $(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k$. On dit que l'application admet une dérivée partielle d'ordre k pour le multi-indice $(i_1,\dots,i_k)$ si :

(a) *la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre $k-1$ pour le multi-indice $(i_2,\dots,i_k)$, que l'on note :*

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}$$

(b) *la fonction $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}$ admet une dérivée partielle suivant la variable x_{i_1} que l'on note :*

$$\frac{\partial^{k} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}\right).$$

Exercice 15. — Démontrer que, pour tout $(i_1,i_2) \in [\![1,2]\!]^2$, la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \sin\left(x_1^2+x_2^3\right) \end{array} \right.$$

admet une dérivée partielle d'ordre 2 pour le multi-indice (i_1,i_2) et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}$. □

Définition 16 (application de classe $\mathscr{C}^k$). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une application, $k \geqslant 2$ un entier. On dit que l'application f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω si, pour tout $(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k$:

(a) *la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre k pour le multi-indice $(i_1,\dots,i_k)$;*

(b) *la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}$ est continue sur Ω.*

Remarque 17 (hors programme). — Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : \Omega \longrightarrow F$ une application. L'application est de classe $\mathscr{C}^2$ au sens de la définition 16 si et seulement si :

1. la fonction f est différentiable sur Ω ;
2. la fonction $\mathrm{d}f : \Omega \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, F)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

■

Théorème 18 (Schwarz). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $k \geqslant 2$ un entier et :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une application de classe $\mathscr{C}^k$. Alors pour tout $(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k$ et pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}\partial x_{i_{\sigma(2)}}\dots\partial x_{i_{\sigma(k)}}}.$$

La continuité des dérivées partielles d'ordre k est essentielle dans le théorème de Schwarz. Si f est l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existent mais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Proposition 19 (critère $\mathscr{C}^k$ via les fonctions coordonnées). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_p(x_1,\dots,x_n)\big) \end{array} \right.$$

une application et $k \geqslant 1$ un entier. Alors, l'application f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω si et seulement si ses applications coordonnées $f_1,\dots,f_p$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω.

Proposition 20 (combinaisons linéaires de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, des applications $f\colon \Omega \longrightarrow F$, $g\colon \Omega \longrightarrow F$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$ et un entier $k \geqslant 2$. Si les applications f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω alors l'application :*

$$\lambda f + \mu g \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω.

Proposition 21 (produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, des applications $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ et un entier $k \geqslant 1$. Si les applications f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω alors l'application :*

$$f \times g \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω.

Proposition 22 (composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$). — *Soient Ω_n un ouvert de $\mathbf{R}^n$, Ω_p un ouvert de $\mathbf{R}^p$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, une application $f\colon \Omega_n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ tele que :*

$$\forall\, x \in \Omega_n, \quad f(x) \in \Omega_p$$

$g\colon \Omega_p \longrightarrow F$ et un entier $k \geqslant 1$. Si l'application f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω_n et l'application f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω_p, alors la composée :

$$g \circ f \left| \begin{array}{ccc} \Omega_n & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω_n.

Exercice 23. — Soit une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$. Démontrer que l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et exprimer les dérivées partielles premières de secondes de g, en fonction des dérivées partielles premières de secondes de f. □

EXERCICE 24 (ÉQUATION DES CORDES VIBRANTES). —

1. Soit une fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & g(u,v) \end{array} \right.$$

de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ telle que :

$$\forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0.$$

Démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)\,.$$

2. Soit $c \in \mathbf{R}^*$. Soit une fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\,;$$

(a) Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbf{R}$ fixés. On considère la fonction g définie par

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(\alpha u+\beta v, \gamma u+\delta v). \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ et exprimer, pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)$ en fonction de $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ et des dérivées partielles d'ordre 2 de f.

(b) En choisissant $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbf{R}^4$ tels que

i. la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est inversible ;

ii. pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0$;

démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)\,.$$

□

§ 3. Optimisation au second ordre

Définition 25 (matrice Hessienne). — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \Omega$. La matrice Hessienne de f en a, notée $H_f(a)$, est définie par :

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}.$$

Proposition 26 (propriété fondamentale de la matrice Hessienne). — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors :

$$\forall\, a \in \Omega, \qquad H_f(a) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}).$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence du théorème de Schwarz. ■

Exercice 27. — Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 y^3 z^5 \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer sa matrice Hessienne au point $(2,-1,1)$. □

Proposition 28 (formule de Taylor-Young à l'ordre 2). — *On note $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée sur $\mathbf{R}^n$. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors, pour tout $x \in \Omega$:

$$f(x+h) \underset{h \to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(x) + \langle \nabla f(x)\,,\, h \rangle + \frac{1}{2} \langle h H_f(a)\,,\, h \rangle + \mathrm{o}\left(||h||^2\right)$$

i.e. :

$$f(x+h) \underset{h \to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(x) + \nabla f(x) \times h^\top + \frac{1}{2} \cdot h \times H_f(a) \times h^\top + \mathrm{o}\left(||h||^2\right)$$

Théorème 29 (condition nécessaire à l'ordre 2 pour être un extremum local). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \Omega$.*

1. *Si f atteint un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$.*
2. *Si f atteint un maximum local en a alors a est un point critique de f et $-H_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$.*

THÉORÈME 30 (CONDITION SUFFISANTE À L'ORDRE 2 POUR ÊTRE UN EXTREMUM LOCAL). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \Omega$.*

1. *Si a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a.*
2. *Si a est un point critique de f et si $-H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a.*

THÉORÈME 31 (CONDITION SUFFISANTE À L'ORDRE 2 POUR ÊTRE UN EXTREMUM LOCAL - CAS $n = 2$). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \Omega$.*

1. *Si a est un point critique de f, $\mathrm{Tr}\left(H_f(a)\right) > 0$ et $\mathrm{Det}\left(H_f(a)\right) > 0$ alors f atteint un minimum local strict en a.*
2. *Si a est un point critique de f, $\mathrm{Tr}\left(H_f(a)\right) < 0$ et $\mathrm{Det}\left(H_f(a)\right) > 0$, alors f atteint un maximum local strict en a.*

EXERCICE 32. — Étudier les extremas locaux et globaux de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^3 - 3x + xy^2. \end{array} \right.$$

□

EXERCICE 33. — Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2. \end{array} \right.$$

1. La fonction f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbf{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Justifier que f admet un maximum global sur K, puis le déterminer.

□