CALCUL DIFFÉRENTIEL

par David Blottière, le 23 mars 2024 à 05h33

CHAPITRE

18

SOMMAIRE

§ 1. Rappels sur la continuité

Définition 1 (continuité d'une fonction en un point). — *Soient (E, N_E) un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, (F, N_F) un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie de E, $f : A \longrightarrow F$ une application et a un point de A. La fonction f est dite continue au point a si :*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

i.e. si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad N_E(x-a) < \alpha \implies N_F(f(x) - f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 2 (critère séquentiel de continuité en un point). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, A une partie de E, $f : A \longrightarrow F$ une application et a un point de A. Alors, la fonction f est continue au point a si et seulement si :*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{E} a \implies f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{F} f(a).$$

Exercice 3. — La fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

est-elle continue en $(0,0)$? □

Exercice 4. — La fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

est-elle continue en $(0,0)$? □

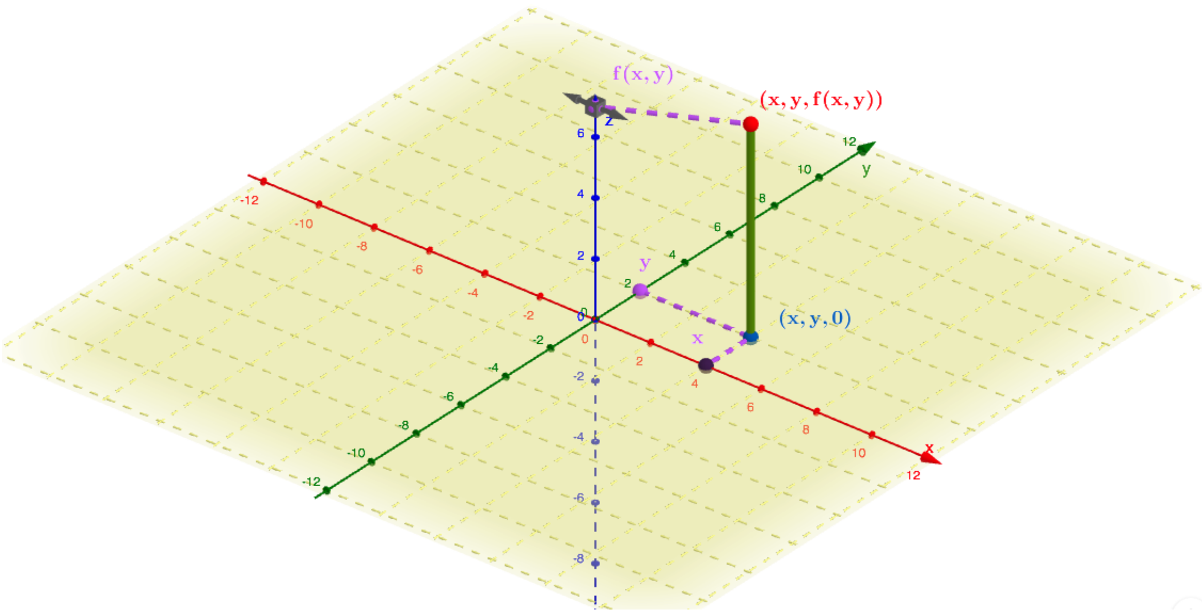
§ 2. GRAPHE D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES RÉELLES À VALEURS RÉELLES

GRAPHE D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES RÉELLES À VALEURS RÉELLES. — Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$. On appelle graphe de la fonction f la partie Γ de $\mathbf{R}^3$ définie par :

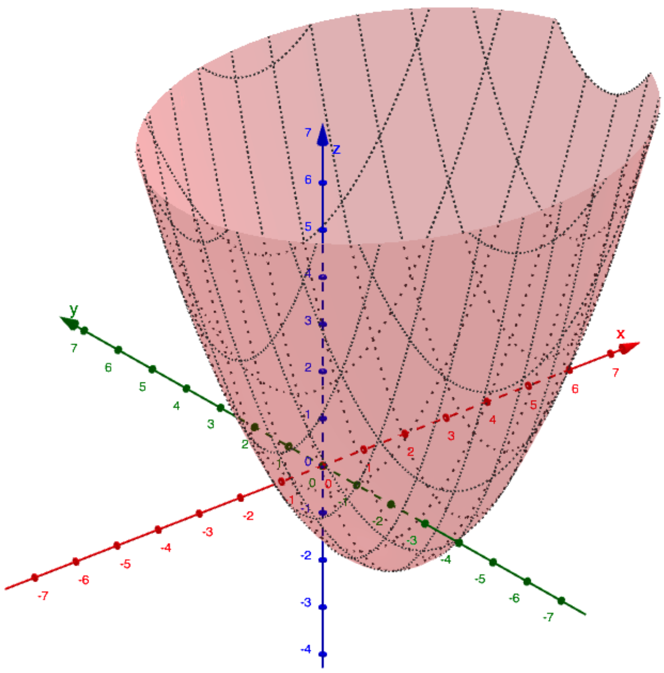
$$\Gamma := \left\{(x, y, f(x, y)) \,:\, (x, y) \in \Omega\right\}$$

i.e. Γ est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ obtenus en faisant varier $(x, y) \in \Omega$.

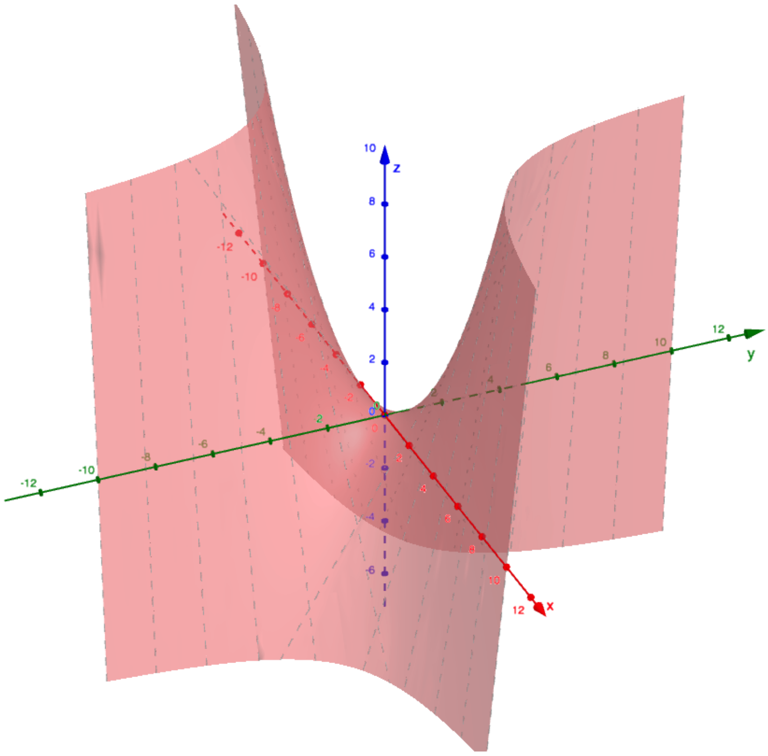
Un point du graphe Γ de f



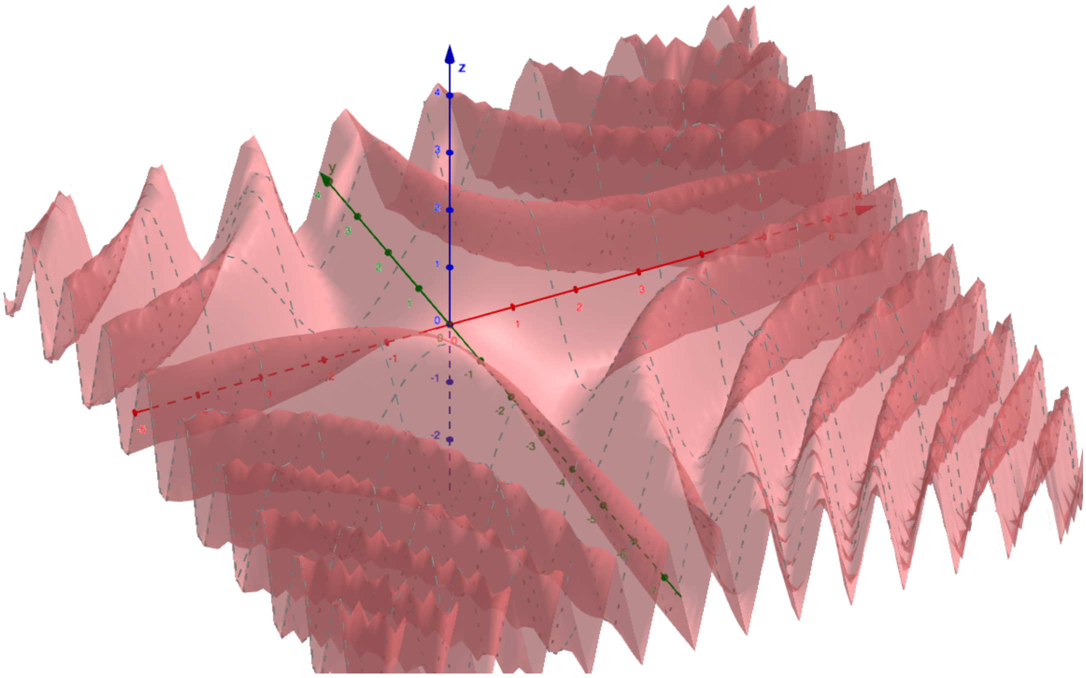
Surface Γ de $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{2} - 2$.



Surface Γ de $f : (x, y) \longmapsto xy$.



Surface Γ de $f : (x, y) \longmapsto \sin(xy)$.



§ 3. Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

1. Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle

Notations. — Soient

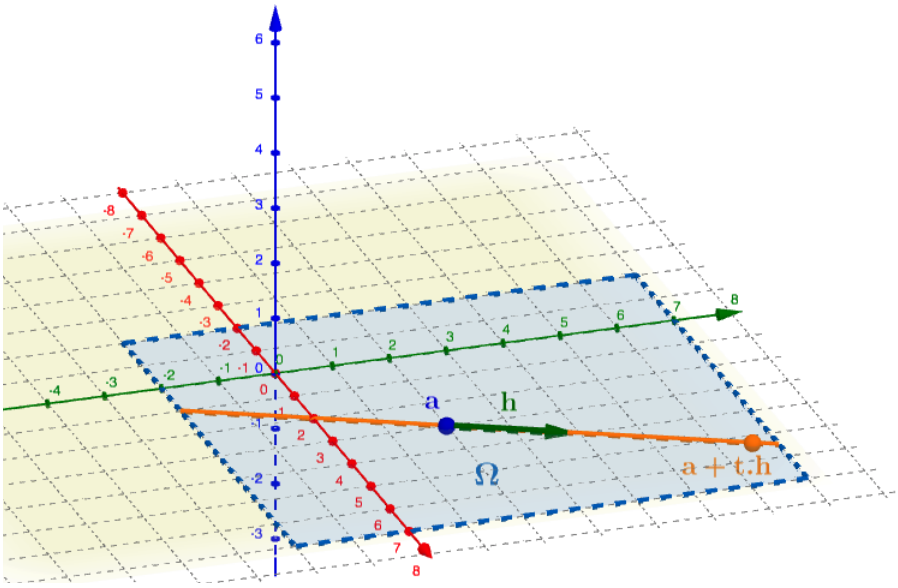
- E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie,
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f : \Omega \longrightarrow F$ une application ;
- a un point de Ω ;
- h un vecteur non nul de E.

Lemme 5 (une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbf{R}}$). — *La fonction de la variable réelle t*

$$\varphi_{a,h} : t \longmapsto f(a + t \cdot h)$$

est définie sur un ouvert de $\mathbf{R}$ qui contient $0_{\mathbf{R}}$.

Illustration du domaine de définition de la fonction $\varphi_{a,h}$.



Définition 6 (dérivée selon un vecteur). — *On dit que f est dérivable en a suivant le vecteur h si la fonction de la variable réelle :*

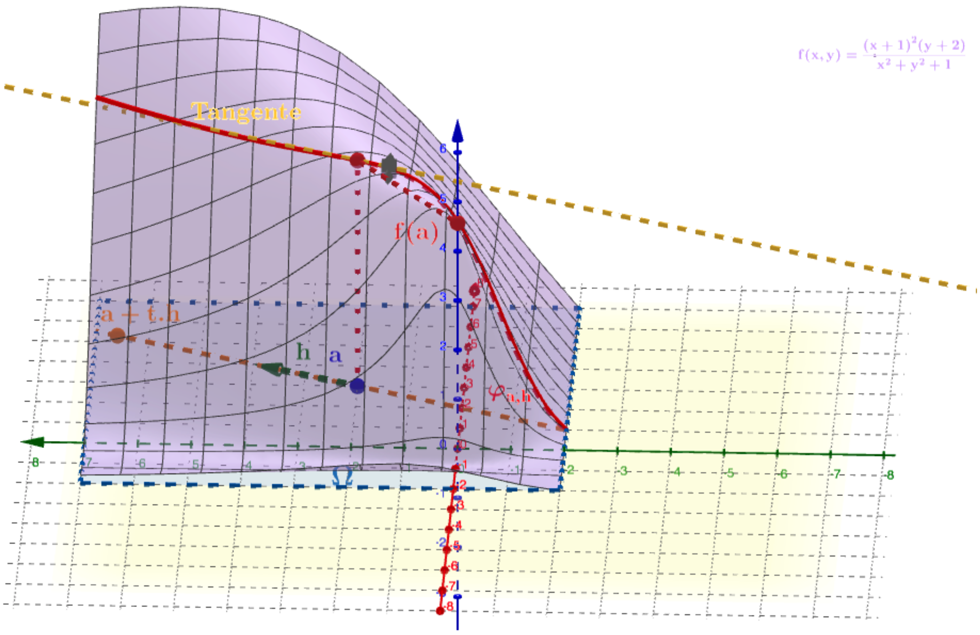
$$t \longmapsto f(a + t \cdot h)$$

est dérivable en 0. Si tel est le cas, alors on pose :

$$\mathrm{D}_h f(a) := \lim_{t \to 0_{\mathbf{R}}} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t} \in F$$

Ce vecteur de F est appelé vecteur dérivé de f en a selon le vecteur h.

Illustration d'une dérivée en un point suivant un vecteur non nul.



EXERCICE 7. — Soient l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3-y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

et $h = (h_1, h_2)$ un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$. Démontrer que f admet une dérivée selon le vecteur h et calculer $\mathrm{D}_h f(0,0)$.

□

Admettre des dérivées en un point suivant tout vecteur non nul n'implique pas la continuité, comme le montre l'exercice suivant.

EXERCICE 8. — Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que f admet une dérivée selon le vecteur tout vecteur non nul en $(0,0)$ et que la fonction f est discontinue en $(0,0)$.

□

2. DÉRIVÉES PARTIELLES

DÉFINITION 9 (DÉRIVÉES PARTIELLES). — *Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de Ω, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

une application dérivable en a suivant tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la i-ème dérivée partielle de f en a, notée $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a) = \lim_{t \to 0_{\mathbf{R}}} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{t} \in F.$$

EXERCICE 10. — L'application f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3+xy+y^2 \,. \end{array} \right.$$

Démontrer que f possède des dérivées partielles en tout point $a=(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$ et les calculer. □

☞ En pratique, lorsque l'on dispose d'une expression de f définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, la i-ème dérivée partielle se calcule en dérivant l'expression par rapport à la i-ème variable, les autres variables étant considérées comme des constantes, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

§ 4. DIFFÉRENTIABILITÉ ET DIFFÉRENTIELLE EN UN POINT

1. NOTATION DE LANDAU

DÉFINITION 11 (NOTATION DE LANDAU $\mathrm{o}(h)$). — *Soient $(E,N_E),(F,N_F)$ des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, V^* un voisinage de 0_E, privé de 0_E (voisinage épointé); une application $f: V^*\longrightarrow F$.*
On écrit :

$$f(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(h)$$

si :

$$\frac{f(h)}{N_E(h)} \xrightarrow[h\to 0_E]{F} 0_F$$

ou de manière équivalente si :

$$\frac{N_F(f(h))}{N_E(h)} = N_F\left(\frac{f(h)}{N_E(h)}\right) \xrightarrow[h\to 0_E]{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}.$$

2. APPLICATION DIFFÉRENTIABLE EN UN POINT

DÉFINITION 12 (APPLICATION DIFFÉRENTIABLE EN UN POINT). — *Soient E,F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f:\Omega\longrightarrow F$ une application et a un point de Ω.*
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que :

$$f(a+h) \underset{h\to 0_E}{=} f(a)+L(h)+\mathrm{o}(h) \qquad [\textit{développement limité à l'ordre 1}]$$

i.e. telle que :

$$\frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{N_E(h)} \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F.$$

Remarque 13 (l'application $h\longmapsto f(a+h)$ est définie sur un voisinage de 0_E). — On conserve les notations de la précédente définition. Comme Ω est un ouvert de E et comme $a\in\Omega$, il existe $r_a>0$ tel que $B_E(a,r_a)\subset\Omega$. On en déduit que le vecteur $f(a+h)$ de F est bien défini, pour tout $h\in B_E(0_E,r_A)$, donc sur un voisinage de 0_E. ■

Remarque 14 (interprétation de l'application linéaire $L\in\mathscr{L}(E,F)$). — On conserve les notations de la précédente définition. L'application $L\in\mathscr{L}(E,F)$ peut être vue comme l'application linéaire de E dans F qui approxime au mieux l'application :

$$h\longmapsto f(a+h)-f(a)$$

au voisinage de 0_E. ■

EXERCICE 15 (DIFFÉRENTIABILITÉ EN TOUT POINT DE L'ÉLÉVATION AU CARRÉ DANS $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$). — Soit $n\geq 2$ un nombre entier. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ d'une norme sous-multiplicative, par exemple de la norme $||\cdot||$ définie par :

$$\forall\, M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\quad ||M|| := \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|[M]_{i,j}\right| \;:\; j\in[\![1,n]\!]\right\}.$$

Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array} \right.$$

est différentiable en tout point A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. □

PROPOSITION 16 (DIFFÉRENTIABILITÉ VIA LES APPLICATIONS COMPOSANTES). — *On note $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$ et $\left(e_1^*, \dots, e_p^*\right)$ sa base duale. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Ω une partie ouverte de E,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ x & \longmapsto & \left(f_1(x), \dots, f_p(x)\right) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, e_i \end{array} \right. \qquad \left[\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad f_i = e_i^* \circ f\right]$$

une application et a un point de Ω.

1. *Si f est différentiable en a, i.e. s'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R}^p)$ telle que :*

$$f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + L(h) + \mathrm{o}(h) \qquad \left[\textit{développement limité à l'ordre 1}\right]$$

alors les applications $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables en a et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$f_i(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f_i(a) + e_i^* \circ L(h) + \mathrm{o}(h) \qquad \left[\textit{développement limité à l'ordre 1}\right].$$

2. *Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'application f_i est différentiable en a, i.e. s'il existe une application linéaire $L_i \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ telle que :*

$$f_i(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f_i(a) + L_i(h) + \mathrm{o}(h) \qquad \left[\textit{développement limité à l'ordre 1}\right]$$

alors l'application f est différentiable en a et :

$$f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{p} L_i(h)\, e_i + \mathrm{o}(h) \qquad \left[\textit{développement limité à l'ordre 1}\right].$$

3. LA DIFFÉRENTIABILITÉ EN a ENTRAÎNE LA CONTINUITÉ EN a

PROPOSITION 17 (LA DIFFÉRENTIABILITÉ EN a ENTRAÎNE LA CONTINUITÉ EN a). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application et a un point de Ω.*
Si l'application f est différentiable en a, alors elle est continue en a.

Remarque 18 (une application continue en a n'est pas nécessairement différentiable en a). — L'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$$

est continue en 0, mais n'est pas différentiable en 0.
Démontrons le par l'absurde en supposant que f est différentiable en 0, i.e. en supposant qu'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que :

$$|h| = f(h) \underset{h \to 0}{=} f(0) + L(h) + \mathrm{o}(h) \underset{h \to 0}{=} L(h) + \mathrm{o}(h) \underset{h \to 0}{=} h\, L(1) + \mathrm{o}(h).$$

Si $h \in \mathbf{R}^*$, on obtient, en divisant chaque membre par h :

$$\frac{|h|}{h} \underset{h \to 0}{=} L(1) + \mathrm{o}(1).$$

Quand h tend vers 0^+, il vient $L(1) = 1$ et, quand h tend vers 0^-, il vient $-L(1) = 1$. Contradiction. ■

4. Une application différentiable en a admet des dérivées dans toutes les directions

Proposition 19 (une application différentiable en a admet des dérivées directionnelles). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application, a un point de Ω et h un vecteur non nul de E. Supposons l'application f différentiable au point a, i.e. qu'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que :*

$$f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + L(h) + \mathrm{o}(h).$$

Alors l'application f admet une dérivée en a, suivant la direction h, et :

$$\mathrm{D}_h f(a) = L(h).$$

Admettre des dérivées directionnelles en a n'entraîne pas la différentiabilité en a, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 20. — Soit l'application $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$, dans toutes les directions, mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$. □

5. Différentielle en a d'une application différentiable en a

Définition 21 (différentielle en a d'une application différentiable en a). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application, a un point de Ω et v un vecteur non nul de E. Supposons l'application f différentiable au point a, i.e. qu'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que :*

$$(\star) \qquad f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + L(h) + \mathrm{o}(h).$$

Alors :

1. *L'application linéaire L vérifiant $(\star)$ est unique.*
2. *L'application linéaire L est appelée différentielle de f en a et est notée $\mathrm{d}f(a)$.*
3. *La différentielle de f en a est l'unique application linéaire de E dans F telle que :*

$$f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h).$$

4. *Pour tout $h \in E \setminus \{0_E\}$, l'application f est dérivable en a suivant le vecteur h et :*

$$\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot h.$$

Exemple 22. — Les résultats établis pour la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array} \right.$$

dans l'exercice 15 s'interprètent comme suit. L'application f est différentiable en tout point $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et la différentielle de f en $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est donnée par :

$$\mathrm{d}f(A) \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ H & \longmapsto & AH + HA. \end{array} \right.$$

■

6. Application différentiable sur un ouvert et différentielle

Définition 23 (application différentiable sur un ouvert et différentielle). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application.*
On dit que f est différentiable sur Ω si et seulement si f est différentiable en tout point a de Ω. Si tel est le cas, la différentielle de f est l'application :

$$\mathrm{d}f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a). \end{array} \right.$$

7. Deux exemples d'applications différentiables

Proposition 24 (différentiabilité et différentielle d'une application constante). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application constante. Alors f est différentiable sur Ω et :*

$$\mathrm{d}f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \longmapsto & 0_{\mathscr{L}(E,F)}. \end{array} \right.$$

Proposition 25 (différentiabilité et différentielle d'une application linéaire). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors f est différentiable sur E et :*

$$\mathrm{d}f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \longmapsto & f. \end{array} \right.$$

Exercice 26 (différentiabilité et différentielle d'une application bilinéaire). — Soient E, F, G des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. Démontrer que B est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle $\mathrm{d}B$. □

§ 5. Différentiabilité de fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$

1. Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$

Proposition 27 (différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$). — *Soient $p \in \mathbf{N}^*$ un nombre entier, Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^p$ une fonction et a un point de Ω.*

1. *La fonction f est différentiable en a si et seulement si la fonction f est dérivable en a.*
2. *Si la fonction f est différentiable en a, alors :*
   - *la différentielle de f en a, i.e. $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^p)$;*
   - *la dérivée de f en a, i.e. $f'(a) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbf{R}^p$*

   s'expriment mutuellement l'une en fonction de l'autre comme suit :

$$\forall\, h \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = h\, f'(a) \quad \text{et} \quad f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1\,.$$

Exemple 28. — On considère la fonction inverse

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

et un point a de $\mathbf{R}^*$. La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$. D'après la proposition 27, l'application f est différentiable en a et sa différentielle en a est donnée par :

$$\mathrm{d}f(a) \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h & \longmapsto & -\dfrac{h}{a^2}. \end{array} \right.$$

■

2. Différentielle d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$

Définition 29 (différentielle d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$). — *Soient $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\left(e_1^*,\dots,e_n^*\right)$ sa base duale, Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, $a=(a_1,\dots,a_n)$ un point de Ω, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une application différentiable en a. Alors :

1. *les dérivées partielles :*
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) := \mathrm{D}_{e_1} f(a) \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) := \mathrm{D}_{e_n} f(a)$$
existent toutes ;
2. *pour tout $h \in \mathbf{R}^n$:*
$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(h)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$
La connaissance des dérivées partielles de f en a suffit donc à connaître la différentielle de f en a.

3. Différentielle d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$

Notation. — Soient :

- n, p des entiers naturels non nuls ;
- $\mathscr{B}_n := \left(e_{n,1},\dots,e_{n,n}\right)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$;
- $\mathscr{B}_p := \left(e_{p,1},\dots,e_{p,n}\right)$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$ et $\mathscr{B}_p^* := \left(e_{p,1}^*,\dots,e_{p,n}^*\right)$ sa base duale ;
- Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$;
- a un point de Ω ;
- une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_p(x_1,\dots,x_n)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i(x_1,\dots,x_n)\, e_{p,i} \end{array} \right. \qquad \left[\forall\, i \in [\![1,p]\!], \quad f_i = e_{p,i}^* \circ f\right]$$

  une application différentiable en a.

Rappel 30 (différentielle de f en a vs. différentielles de $f_1,\dots,f_p$ en a). — D'après la proposition 16 :

$$\forall\, h \in \mathbf{R}^n, \quad \mathrm{d}f(a)\cdot h = \sum_{j=1}^{p} \left(\mathrm{d}f_j\, a)\cdot h\right) e_{p,j}.$$

En particulier :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{d}f(a)\cdot e_{n,i} = \sum_{j=1}^{p} \left(\mathrm{d}f_j\, a)\cdot e_{n,i}\right) e_{p,j}$$

i.e. :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\, e_{p,j}.$$

■

PROPOSITION 31 (MATRICE JACOBIENNE). — *La matrice de l'application $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, appelée matrice Jacobienne de f en a et notée $J_a(f)$, est donnée par :*

$$J_a(f) := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}(\mathrm{d}f(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \qquad [\textit{matrice Jacobienne de } f \textit{ en } a]$$

i.e. $J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

4. DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION DIFFÉRENTIABLE SUR OUVERT DE $\mathbf{R}^n$ À VALEURS DANS $\mathbf{R}$

NOTATION. — Soient :

- n un entier naturel non nul ;
- $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$;
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \end{array} \right.$$

  et $||\cdot||$ la norme associée :

$$||\cdot|| \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array} \right.$$

- Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$;
- a un point de Ω ;
- une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

  une application différentiable en a.

DÉFINITION 32 (GRADIENT DE f EN a). — *Le gradient de f en a, noté $\nabla f(a)$ est défini par :*

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbf{R}^n.$$

Rappel 33 (théorème de Riesz). — L'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \\ x & \longmapsto & \langle x,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h & \longmapsto & \langle x, h\rangle \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. ■

PROPOSITION 34 (REPRÉSENTATION DE LA DIFFÉRENTIELLE PAR LE GRADIENT). — *Pour tout $h \in \mathbf{R}^n$:*

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

NOTATION. — On note $S(0,1)$ la sphère unité de $\mathbf{R}^n$, i.e. :

$$S(0,1) := \left\{ x \in \mathbf{R}^n \ : \ ||x|| = 1 \right\}.$$

PROPOSITION 35 (INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU GRADIENT). — *Supposons $\nabla f(a) \neq 0_{\mathbf{R}^n}$. L'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} S(0,1) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h & \longmapsto & \mathrm{d}f(a)\cdot h \end{array} \right.$$

atteint son maximum en l'unique point $\dfrac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$.

§ 6. OPERATIONS SUR LES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

1. COMBINAISON LINÉAIRE DE DEUX APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

PROPOSITION 36 (COMBINAISON LINÉAIRE D'APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $(f,g) \in F^\Omega \times F^\Omega$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ et a un point de Ω.*
Si les applications f et g sont différentiables en a, alors l'application

$$\lambda f + \mu . g \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array} \right.$$

est différentiable en a :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \,\mathrm{d}f(a) + \mu \,\mathrm{d}g(a) \qquad [\textit{identité dans } \mathscr{L}(E,F)].$$

***Exemple 37.* —** On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 + \mathrm{Tr}(A)\, J. \end{array} \right.$$

Démontrer que f est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et calculer sa différentielle $\mathrm{d}f$. ■

2. COMPOSÉE D'APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES PAR UNE APPLICATION MULTILINÉAIRE

PROPOSITION 38 (COMPOSÉE D'APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES PAR UNE APPLICATION MULTILINÉAIRE). — *Soient $E, F_1, \ldots, F_n, G$ des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f_1 \in F_1^\Omega, \ldots, f_n \in F_n^\Omega$, une application :*

$$M \colon F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n \longrightarrow G$$

une application multilinéaire et $a \in \Omega$. On note f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & M(f_1(x), \ldots, f_n(x)). \end{array} \right.$$

Si les application $f_1, \ldots, f_n$ sont différentiable en a, alors l'application f est différentiable en a et, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = M\big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h, f_2(a), \ldots, f_n(a)\big) + M\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a)\cdot h, \ldots, f_n(a)\big) + \ldots + M\big(f_1(a), f_2(a), \ldots, \mathrm{d}f_n(a)\cdot h\big).$$

Exemple 39. — Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^3 \end{array} \right.$$

Démontrer que f est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et calculer sa différentielle $\mathrm{d}f$. ■

3. Composée de deux applications différentiables ou règle de la chaîne

Notation. — On considère :

- E, F, G des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie ;
- Ω_E un ouvert de E et Ω_F un ouvert de F ;
- $f : \Omega_E \longrightarrow F$ une application telle que, pour tout $x \in \Omega_E$, $f(x) \in \Omega_F$;
- $g : \Omega_F \longrightarrow G$;
- a un point de Ω_E.

Théorème 40 (différentielle d'une composée de deux applications différentiables). — *Si l'application f est différentiable en a et l'application g est différentiable en $f(a)$, alors l'application*

$$g \circ f \left| \begin{array}{ccc} \Omega_E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

4. Dérivée le long d'un arc

Notation. — Soient :

- I un intervalle de $\mathbf{R}$;
- E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie ;
- Ω une partie ouverte de E ;
- un arc $\gamma : I \longrightarrow E$ tel que, pour tout $t \in I$, $\gamma(t) \in \Omega$;
- une application $f : \Omega \longrightarrow F$;
- $t_0 \in I$.

Corollaire 41 (dérivée le long d'un arc). — *Si l'arc γ est dérivable en t_0 et l'application f différentiable en $\gamma(t_0)$, alors l'arc $f \circ \gamma : I \longrightarrow F$ est dérivable en t_0 et :*

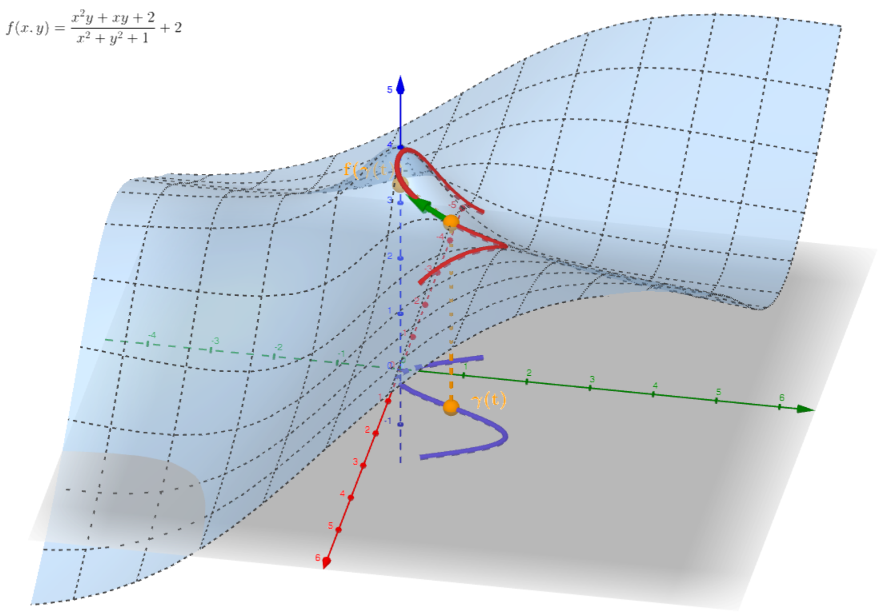
$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

Exercice 42 (dérivée le long d'un segment). — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Ω une partie ouverte et convexe de E, une application $f : \Omega \longrightarrow E$ différentiable sur Ω, a et b deux points de Ω. Considérons l'application :

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & t\,a + (1-t)\,b. \end{array} \right.$$

Justifier que l'application $f \circ \gamma$ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée sur $[0,1]$. □

Interprétation géométrique de la dérivée le long d'un arc



Exercice 43. — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$,

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x),\dots,f_p(x)) \end{array} \right.$$

une application différentiable sur Ω, $x_1,\dots,x_n$ des fonctions dérivables de I dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall\, t \in I, \quad (x_1(t),\dots,x_n(t)) \in \Omega.$$

Démontrer que la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ t & \longmapsto & (f(x_1(t),\dots,x_n(t)) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et que :

$$\forall\, t \in I, \quad g'(t) = \left(\sum_{i=1}^n x_i'(t)\, \partial_i f_1(x_1(t),\dots,x_n(t))\,,\ \sum_{i=1}^n x_i'(t)\, \partial_i f_2(x_1(t),\dots,x_n(t))\,,\ \dots\,,\ \sum_{i=1}^n x_i'(t)\, \partial_i f_p(x_1(t),\dots,x_n(t)) \right).$$

□

5. Dérivées partielles d'une composée de deux applications différentiables

Notation. — On considère :

- Ω_n un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et Ω_p un ouvert de $\mathbf{R}^p$;
- deux applications :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega_n & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x),\dots,f_p(x)) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \Omega_p & \longrightarrow & \mathbf{R}^q \\ y & \longmapsto & (g_1(y),\dots,g_q(y)) \end{array} \right.$$

- a un point de Ω_n.

On suppose que :

$$\forall\, x \in \Omega_n, \quad f(x) \in \Omega_p$$

de sorte que la fonction :

$$h = g \circ f \left| \begin{array}{ccc} \Omega_n & \longrightarrow & \mathbf{R}^q \\ x & \longmapsto & g(f(x)) = (h_1(x),\dots,h_q(x)) \end{array} \right.$$

est bien définie.

THÉORÈME 44 (DÉRIVÉES PARTIELLES D'UNE COMPOSÉE DE DEUX APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES). — *Si l'application f est différentiable en a et l'application g est différentiable en $f(a)$, alors :*

$$J_a(g\circ f) = J_{f(a)}(g)\times J_a(f)$$

et :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,n]\!],\quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

où les composantes de x dans $\mathbf{R}^n$ sont notée $(x_1,\dots,x_n)$ et celles de y dans $\mathbf{R}^p$ sont notées $(y_1,\dots,y_p)$.

DÉMONSTRATION. — (a) Notons $\mathscr{B}_n$ (resp. $\mathscr{B}_p$, $\mathscr{B}_q$) la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$). D'après le théorème 40 :

$$\begin{aligned} J_a(g\circ f) &:= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_q}\big(\mathrm{d}(g\circ f)(a)\big)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_q}\big(\mathrm{d}\,g(f(a))\big)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}\big(\mathrm{d}\,f(a)\big)\\ &= J_{f(a)}(g)\times J_a(f). \end{aligned}$$

(b) Soit $(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,n]\!]$. D'après (a) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) &= \big[J_a(g\circ f)\big]_{i,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\big[J_{f(a)}g\big]_{i,k}\,\big[J_a f\big]_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

■

Remarque 45 (cas particulier du théorème 44). — Si on spécialise le théorème 44 au cas où g est une fonctions à valeurs réelles, i.e. si $q=1$, alors :

$$\forall\, j\in[\![1,n]\!],\quad \frac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

■

EXERCICE 46. — Soient Ω_n un ouvert de $\mathbf{R}^n$, une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega_n & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ x & \longmapsto & \big(f_1(x),\dots,f_p(x)\big) \end{array}\right.$$

différentiable sur Ω_n, Ω_m un ouvert de $\mathbf{R}^m$, $x_1,\dots,x_n$ des applications de Ω_m dans $\mathbf{R}$ différentiables sur Ω_m telles que :

$$\forall\,(u_1,\dots,u_m)\in\Omega_m,\quad (x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))\in\Omega_n$$

et g l'application définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \Omega_m & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (u_1,\dots,u_m) & \longmapsto & f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)). \end{array}\right.$$

Démontrer que l'application g est différentiable sur Ω_m et que, pour tout $a\in\Omega_m$, pour tout $i\in[\![1,m]\!]$

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(a) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_i}(a)\,.\,\partial_j f(x_1(a),\dots,x_n(a)).$$

où les composantes de u dans $\mathbf{R}^m$ sont notée $(u_1,\dots,u_m)$.

□

§ 7. APPLICATION DE CLASSE $\mathscr{C}^1$

1. DÉFINITION D'UNE APPLICATION DE CLASSE $\mathscr{C}^1$

DÉFINITION 47 (APPLICATION DE CLASSE $\mathscr{C}^1$). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application. On dit que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si :*

1. *l'application f est différentiable sur Ω ;*
2. *sa différentielle $\mathrm{d}f : \Omega \longrightarrow \mathscr{L}(E, F)$ est continue sur Ω.*

2. CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^1$ PAR LES DÉRIVÉES PARTIELLES

THÉORÈME 48 (CRITÈRE POUR ÊTRE DE CLASSE $\mathscr{C}^1$). — *Soient Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n)) \end{array} \right.$$

une application. Alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω, i.e. :

$$f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \Omega \iff \forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ est définie et continue sur } \Omega$$

EXERCICE 49. — Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(x^2 + xy - y^3, \cos\left(\dfrac{x}{y^2+1}\right)\right) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et expliciter la matrice Jacobienne $J_f(a_1, a_2)$ en tout point (a_1, a_2) de $\mathbf{R}^2$. □

EXERCICE 50. — On définit deux fonctions :

- la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction g de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x, y).
2. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ par l'application linéaire $\mathrm{d}(f \circ g)((x, y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

□

EXERCICE 51. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que :
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x^2 + y^2 - xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$
2. Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbf{R}^2$.
3. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbf{R}^2$.
4. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

(a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbf{R} \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.

(b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.

(c) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?

□

3. Intégration d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ le long d'un arc

Théorème 52 (Intégration d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ le long d'un arc). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Ω une partie ouverte de E, un arc $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ tel que :*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \gamma(t) \in \Omega \qquad [\text{l'arc est tracé sur } \Omega]$$

$a := \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$ les extrémités de l'arc γ, une application $f : \Omega \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d} f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 53 (Inégalité des accroissements finis). — Soient $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace euclidien, $||\cdot||$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, Ω une partie ouverte convexe de E, a un point de Ω et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

1. Justifier que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le nombre réel :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{t \to 0_{\mathbf{R}}} \frac{f(a + te_i) - f(t)}{t} \qquad [i\text{-ième dérivée partielle de } f \text{ en } a \text{ dans la base } \mathscr{B}]$$

   existe et en donner une expression à l'aide de la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ de f en a.

2. Justifier qu'il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in E$, appelé gradient de f en a, tel que :

$$\forall\, h \in E, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = \big\langle \mathrm{d}f(a)\,,\, h \big\rangle.$$

   et en donner une expression à l'aide des dérivées partielles de f en a dans la base $\mathscr{B}$.

3. On suppose que le gradient de f est borné sur Ω, i.e. :

$$\exists\, k > 0, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \big|\big|\nabla f(x)\big|\big| \leqslant k\,.$$

   Démontrer que la fonction f est k-lipschitzienne sur Ω.

□

4. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

Théorème 54 (Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs). — *Soient E, F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, Ω une partie ouverte connexe par arcs de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application. Alors :*

$$f \text{ est constante sur } \Omega \iff \left\{ \begin{array}{ll} & f \text{ est différentiable sur } \Omega \\ \text{et} & \\ & \forall\, x \in \Omega, \quad \mathrm{d}f(x) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}\,. \end{array} \right.$$

Exercice 55. — Déterminer toutes les applications $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifient :

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \mathrm{d}f(A) = \mathrm{Tr}\,.$$

□

Exercice 56 (Équation aux dérivées partielles). —

1. Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x)\,.$$

2. (a) Soit $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x+y) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et qu'elle vérifie :

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

(b) Réciproquement, soit $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ telle que :

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbf{R} :\longrightarrow \mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x+y)\,.$$

On pourra considérer le changement de variable $x = \dfrac{u+v}{2}$ et $y = \dfrac{u-v}{2}$.

□

§ 8. VECTEUR TANGENT À UNE PARTIE D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIM. FINIE

DÉFINITION 57 (VECTEUR TANGENT À UNE PARTIE DE E). — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, X une partie de E, $x \in X$.*

1. *Un vecteur $v \in E$ est dit tangent à X en x si :*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \exists \gamma \in X^{]-\varepsilon,\varepsilon[}, \quad \gamma \text{ est dérivable en } 0,\ \gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = v.$$

2. *L'ensemble des vecteurs de E tangents à x est noté $T_x X$.*

EXERCICE 58. — Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $x \in E$, V un sous-espace vectoriel de E, $X = x + V$. Démontrer que :

$$T_x X = V.$$

Pour un vecteur $v \in V$ fixé, on pourra considérer l'arc :

$$\gamma\colon t \longmapsto x + t\,v.$$

□

EXERCICE 59. — Soient $(E, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ un $\mathbf{R}$-espace euclidien, S la sphère unité de E et $x \in S$. Démontrer que :

$$T_x S = \operatorname{Vect}(x)^{\perp}.$$

Pour un vecteur $v \in \operatorname{Vect}(x)^{\perp}$ de norme 1 fixé, on pourra considérer l'arc :

$$\gamma\colon t \longmapsto \cos(rt)\,x + \sin(rt)\,v$$

où $r \in \mathbf{R}$.

□

EXERCICE 60. — Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $(a,b)\in\Omega$ et $f:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ une application différentiable en (a,b) et

$$X := \left\{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in\Omega\right\}\subset\mathbf{R}^3.$$

Démontrer que :

$$T_{(a,b,f(a,b))}X = \mathrm{Vect}\left(\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right),\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).\right)$$

Pour $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$, on pourra considérer l'arc :

$$\gamma:\ t\longmapsto(a+t\alpha,b+t\beta,f(a+t\alpha,b+t\beta))$$

qui est défini sur un voisinage de $0_{\mathbf{R}}$. □

THÉORÈME 61 (VECTEURS TANGENTS À UNE LIGNE DE NIVEAU). — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f\cdot\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction différentiable et $\lambda\in\mathbf{R}$. Posons :*

$$X = f^{-1}(\{\lambda\}) = \left\{x\in\Omega\ :\ f(x)=\lambda\right\}\qquad[\textit{ligne de niveau}]$$

et supposons X non vide. Alors :

$$\forall\, x\in X,\quad \nabla f(x)\neq 0_{\mathbf{R}^n}\quad\Longrightarrow\quad T_xX=\mathrm{Vect}\left(\nabla f(x)\right)^{\perp}.$$

Ce théorème est admis.

***Exemple 62.* —** Soient a,b,c des réels strictement positifs et

$$X=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}\qquad[\text{ellipsoïde}].$$

Déterminer T_xX, pour tout $x\in X$. ■