ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

CHAPITRE 17

par David Blottière, le 21 mars 2024 à 21h20

ACRONYMES. —

- EDL1 : équation différentielle linéaire d'ordre 1
- SDL1 : système différentiel linéaire d'ordre 1
- SDL1HCC : système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants ;
- EDLSn : équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

SOMMAIRE

§ 1. LES TROIS OBJETS DE L'ÉTUDE 2
1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE D'ORDRE 1 (EDL1) 2
2. SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE D'ORDRE 1 (SDL1) 3
3. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE SCALAIRE D'ORDRE n (EDLSn) 4
4. OBJECTIFS 5
§ 2. EDLS1 : RAPPELS DE MP2I 5
1. STRUCTURE DE L'ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDLS1 HOMOGÈNE 5
2. STRUCTURE DE L'ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDLS1 6
3. THÉORÈME DE CAUCHY POUR UNE EDLS1 7
4. EXERCICES 7
§ 3. CHAMP DE VECTEURS D'UN SDL1 HOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS 8
§ 4. RÉDUCTION À L'ÉTUDE DES EDL1 10
§ 5. MISE SOUS FORME INTÉGRALE D'UN PROBLÈME DE CAUCHY 15
§ 6. PRINCIPE DE SUPERPOSITION ET CONSÉQUENCE 16
1. CAS DES EDL1 16
2. DÉCLINAISON POUR LES SDL1 17
3. DÉCLINAISON POUR LES EDLSn 18
§ 7. THÉORÈME DE CAUCHY LINÉAIRE ET CONSÉQUENCES 19
1. CAS DES EDL1 19
2. DÉCLINAISON POUR LES SDL1 20
3. DÉCLINAISON POUR LES EDLSn 22
§ 8. EDLS1 ET EDLS2 NON NORMALISÉES 24
§ 9. EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICE 25
§ 10. RÉSOLUTION D'UN SDL1HCC 29
§ 11. EDLS2 À COEFFICIENTS CONSTANTS : RAPPELS DE MP2I 30
§ 12. RÉSOLUTION D'UNE EDLS2 31
1. WRONSKIEN 31
2. MÉTHODE DE VARIATION DE LA CONSTANTE OU DE L'ABAISSEMENT DE L'ORDRE 32
3. MÉTHODE DU WRONSKIEN 33
4. MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES 34

NOTATION. — Dans tout ce chapitre :

- I désigne un intervalle non vide de $\mathbf{R}$;
- $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$;
- E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$;
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E ;
- $\left(e_1^*, \dots, e_n^*\right)$ est la base duale de $\underline{e}$, de sorte que :

$$\forall\, u \in E, \quad u = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u) \cdot e_i \qquad \left[e_i^*(u) \text{ est la } i\text{-ième coordonnée de } u \text{ dans la base } \underline{e}\right].$$

§ 1. LES TROIS OBJETS DE L'ÉTUDE

1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE D'ORDRE 1 (EDL1)

Soient $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$, $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$.

(a) L'équation :

$$\boxed{(\mathscr{E}) \qquad x' = a(t) \cdot x + b(t)}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$, est appelée équation différentielle linéaire. Cette dernière est dite homogène, si la fonction b est nulle.

(b) Une solution de $(\mathscr{E})$ est une fonction $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$ telle que :

$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

(c) L'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ est :

$$\boxed{(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad x' = a(t) \cdot x}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$.

(d) Une solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ est une fonction $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$ telle que :

$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)).$$

(e) Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Le problème de Cauchy associé à $(\mathscr{E})$ avec condition initiale :

$$\boxed{(CI) \quad x(t_0) = x_0}$$

s'écrit :

$$\boxed{(\mathscr{P}\mathscr{E}) \quad \left\{\begin{array}{l} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{array}\right.}$$

(f) Une solution de $(\mathscr{P}\mathscr{E})$ est une fonction $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{array}\right.$$

***Exemple 1 (EDL1).* —** Soient les applications :

$$a \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right) \\ t & \longmapsto & a(t) \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u_1, u_2, u_3) & \longmapsto & \left(u_2, u_3, t u_1 + \operatorname{ch}(t) u_2 - t^2 u_3\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

et

$$b \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ t & \longmapsto & (0, 0, \arctan(t)). \end{array}\right.$$

L'équation :

$$(\mathscr{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3\right)$ est une EDL1.

■

2. SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE D'ORDRE 1 (SDL1)

Soient $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathscr{C}^0\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$.

(a) Le système :

$$\boxed{(\mathscr{S}) \qquad X' = A(t)\,X + B(t)}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$, est appelé système différentiel linéaire. Ce dernier est dite homogène, si la fonction B est nulle.

(b) Une solution de $(\mathscr{S})$ est une fonction $X \in \mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$ telle que :

$$\forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t).$$

(c) Le système homogène associé à $(\mathscr{S})$ est :

$$\boxed{(\mathscr{S}\mathscr{H}) \qquad X' = A\,X}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$.

(d) Une solution de $(\mathscr{S}\mathscr{H})$ est une fonction $X \in \mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$ telle que :

$$\forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)\,X(t).$$

(e) Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le problème de Cauchy associé à $(\mathscr{S})$ avec condition initiale :

$$\boxed{(CI) \quad X(t_0) = X_0}$$

s'écrit :

$$\boxed{(\mathscr{P}\mathscr{S}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{array} \right.}$$

(f) Une solution de $(\mathscr{P}\mathscr{S})$ est une fonction $X \in \mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, t \in I, \quad x'(t) = A(t)\,X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{array} \right.$$

Exemple 2 (SDL1). — Le système :

$$(\mathscr{S}) \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & \mathrm{ch}(t) & -t^2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \arctan(t) \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$ est un SDL1. En effet, les applications :

$$A \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & \mathrm{ch}(t) & -t^2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

et

$$B \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \arctan(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

sont continues sur $\mathbf{R}$.

■

3. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE SCALAIRE D'ORDRE n (EDLSn)

Soient $(a_0,\dots,a_{n-1},b)\in\mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$.

(a) L'équation :

$$\boxed{(\mathscr{E}_n)\qquad x^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)x^{(i)}+b(t)}$$

d'inconnue $x\in\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$, est appelée équation différentielle scalaire d'ordre n. Cette dernière est dite homogène, si la fonction b est nulle.

(b) Une solution de $(\mathscr{E}_n)$ est une fonction $x\in\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$ telle que :

$$\forall\, t\in I,\quad x^{(n)}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)+b(t).$$

(c) L'équation homogène associée à $(\mathscr{E}_n)$ est :

$$\boxed{(\mathscr{E}\mathscr{H}_n)\qquad x^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)x^{(i)}}$$

d'inconnue $x\in\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$.

(d) Une solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H}_n)$ est une fonction $x\in\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$ telle que :

$$\forall\, t\in I,\quad x^{(n)}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)x^{(i)}(t).$$

(e) Soit $(t_0,x_0,\dots,x_{n-1})\in I\times\mathbf{K}^n$. Le problème de Cauchy associé à $(\mathscr{E}_n)$ avec condition initiale :

$$\boxed{(CI)\quad \forall\, i\in[\![0,n-1]\!],\ x^{(i)}(t_0)=x_i}$$

s'écrit :

$$\boxed{(\mathscr{P}\mathscr{E}_n)\quad \begin{cases} x^{(n)}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)x^{(i)}+b(t)\\ \forall\, i\in[\![0,n-1]\!],\ x^{(i)}(t_0)=x_i\end{cases}}$$

(f) Une solution de $(\mathscr{P}\mathscr{E}_n)$ est une fonction $x\in\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, t\in I,\quad x^{(n)}(t)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)\\ \forall\, i\in[\![0,n-1]\!],\ x^{(i)}(t_0)=x_i\end{cases}$$

***Exemple 3 (EDLS3).* —** L'équation :

$$(\mathscr{E}_3)\qquad x'''=t\,x+\mathrm{ch}(t)\,x'-t^2\,x''+\arctan(t)$$

d'inconnue $x\in\mathscr{C}^3(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est une EDLS3. En effet les applications :

$$a_0\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ t&\longmapsto&t\end{array}\right.\qquad a_1\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ t&\longmapsto&\mathrm{ch}(t)\end{array}\right.\qquad a_2\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ t&\longmapsto&-t^2\end{array}\right.$$

et

$$b\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ t&\longmapsto&\arctan(t)\end{array}\right.$$

sont continues sur $\mathbf{R}$.

■

4. Objectifs

Nous nous proposons d'étudier les équations différentielles ou problèmes de Cauchy $(\mathscr{PE})$, $(\mathscr{EH})$, $(\mathscr{E})$, $(\mathscr{PS})$, $(\mathscr{SH})$, $(\mathscr{S})$, $(\mathscr{PE}_n)$, $(\mathscr{EH}_n)$, $(\mathscr{E}_n)$:

- de manière quantitative, en s'intéressant à la « taille » de leurs ensembles de solutions ;
- par une approche explicite, en donnant des formules décrivant toutes leurs solutions (si possible) ;
- en déterminant des propriétés vérifiées par leurs solutions (e.g. périodicité, comportement asymptotique, lieu d'annulation).

§ 2. EDLS1 : rappels de MP2I

1. Structure de l'ensemble solution d'une EDLS1 homogène

Théorème 4 (structure de l'ensemble solution d'une EDLS1 homogène). — *Soit $a \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$. On considère l'EDLS1 homogène :*

$$(\mathscr{EH}) \qquad x' = a(t)x.$$

et son ensemble solution :

$$\mathrm{Sol}\,(\mathscr{EH}) := \left\{x \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{K}) \,:\, \forall\, t \in I,\ x'(t) = a(t)\,x(t)\right\}.$$

1. *La fonction a admet une primitive A sur I.*
2. *Si on définit la fonction x_H par :*

$$x_H \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & e^{A(t)} \end{array} \right.$$

alors $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{EH}) = \mathrm{Vect}\,(x_H)$*, i.e. :*

$$\mathrm{Sol}\,(\mathscr{EH}) = \{k\,x_H \,:\, k \in \mathbf{K}\}.$$

En particulier, $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{EH})$ *est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de* $\mathscr{C}^1(I,\mathbf{K})$.

Démonstration. —

1. Soit $t_0 \in I$. Comme a est continue sur I, le théorème fondamental de l'analyse livre que la fonction

$$A \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right.$$

est une primitive de a sur I.

2. (a) La fonction :

$$x_H \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & e^{A(t)} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus pour tout $t \in I$

$$x_H'(t) = a(t)\,e^{A(t)} = a(t)\,x_H(t).$$

Donc $x_H \in \mathrm{Sol}\,(\mathscr{EH})$.

(b) De (a), on en déduit aisément que :

$$\forall\, k \in \mathbf{K}, \quad k\,x_H \in \mathrm{Sol}\,(\mathscr{EH}).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}\,(x_H) \subset \mathrm{Sol}\,(\mathscr{EH})$.

(c) Soit x une solution de $(\mathscr{EH})$. La fonction $\dfrac{x}{x_H}$ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall\, t \in I, \quad \left(\frac{x}{x_H}\right)'(t) = \frac{x'(t)\,x_H(t) - x(t)\,x_H'(t)}{x_H(t)^2} = \frac{a(t)\,x(t)\,x_H(t) - x(t)\,a(t)\,x_H(t)}{x_H(t)^2} = 0.$$

La fonction $\dfrac{x}{x_H}$ est donc constante sur l'intervalle I, donc $x \in \mathrm{Vect}\,(x_H)$.

■

2. Structure de l'ensemble solution d'une EDLS1

Théorème 5 (structure de l'ensemble solution d'une EDLS1 et variation de la constante). — *Soit $(a,b) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})^2$. On considère l'EDLS1 scalaire :*

$$(\mathscr{E}) \qquad x' = a(t)\,x + b(t).$$

son EDLS1 homogène associée :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad x' = a(t)\,x + b(t).$$

et leurs ensembles solution :

$$\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}) := \left\{x \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{K}) \;:\; \forall\, t \in I,\; x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\right\}$$

et

$$\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H}) := \left\{x \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{K}) \;:\; \forall\, t \in I,\; x'(t) = a(t)\,x(t)\right\}.$$

1. *Soit A une primitive de a sur I. La fonction :*

$$t \longmapsto b(t)\,e^{-A(t)}$$

   possède une primitive notée λ sur I.

2. *La fonction :*

$$x_{part} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda(t)\,e^{A(t)} \end{array} \right.$$

   est une solution de $(\mathscr{E})$.

3. $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}) = x_{part} + \mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H})$ *et donc*

$$\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & x_{part}(t) + k\,e^{A(t)} \end{array} \right. \;:\; k \in \mathbf{K} \right\}$$

Éléments de démonstration. —

1. Le résultat est conséquence de la continuité de la fonction $t \longmapsto b(t)\,e^{-A(t)}$ et du théorème fondamental de l'analyse.
2. Nous savons que toute solution de $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H})$ s'écrit $k\,x_H$, où

$$x_H \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & e^{A(t)} \end{array} \right.$$

   et $k \in \mathbf{K}$. L'idée est de faire varier la constante k pour obtenir une solution de $(\mathscr{E})$. Supposons que k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbf{K}$ et notons x la fonction $\mathscr{C}^1$ définie par :

$$x \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & k(t)\,x_H(t). \end{array} \right.$$

   Alors :

$$\begin{array}{rlll} x \in \mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}) & \iff & \forall\, t \in I, & x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ & \iff & \forall\, t \in I, & k'(t)x_H(t) + k(t)x_H'(t) = a(t)k(t)x_H(t) + b(t) \\ & \iff & \forall\, t \in I, & k'(t)x_H(t) + k(t)a(t)x_H(t) = a(t)k(t)x_H(t) + b(t) \qquad [x_H \text{ solution de } \mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H})] \\ & \iff & \forall\, t \in I, & k'(t)x_H(t) = b(t) \\ & \iff & \forall\, t \in I, & k'(t) = b(t)e^{-A(t)} \end{array}$$

   On en déduit que si k est une primitive de $t \longmapsto b(t)e^{-A(t)}$, alors la fonction :

$$x_{\text{part}} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & k(t)\,x_H(t) = k(t)\,e^{-A(t)} \end{array} \right.$$

   est une solution de $(\mathscr{E})$.
3. On vérifie $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}) = x_{\text{part}} + \mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H})$ en raisonnant par double inclusion.

□

3. Théorème de Cauchy pour une EDLS1

Théorème 6 (de Cauchy linéaire pour une EDLS1). — *Soient $(a,b) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})^2$ et $(t_0,x_0) \in I \times \mathbf{K}$. Alors le problème de Cauchy*

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} (\mathscr{E}) & x' = a(t)x + b(t) \\ & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{K})$ possède une unique solution.

Éléments de démonstration. — Si on conserve les notations du théorème 5, on sait qu'une solution de (E) s'écrit :

$$\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & x_{\text{part}}(t) + k\,e^{A(t)} \end{array}\right.$$

pour un scalaire $k \in \mathbf{K}$. Pour résoudre le problème de Cauchy précédent, on ajuste la constante k pour que la condition initiale soit vérifiée et on observe qu'une seule constante k convient. □

Exercice 7. — Donner une expression intégrale de l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$ défini dans le problème 6. □

Exercice 8 (Les courbes intégrales d'une EDLS1 scalaire ne s'intersectent pas). — Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'EDLS1 $(\mathscr{E})$ introduite dans le théorème 5. Démontrer que :

$$(\exists\, t_0 \in I, \quad x_1(t_0) = x_2(t_0)) \quad \Longrightarrow \quad (\forall\, t \in I, \quad x_1(t) = x_2(t)).$$

□

4. Exercices

Exercice 9 (Résolution d'une EDLS1). — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}_1) \qquad x' - \frac{x}{t} = t^2$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbf{R})$.

□

Exercice 10 (Résolution d'une EDLS1 avec raccordement). — Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_1) \qquad t\,x' = 2x + t^3$$

d'inconnue une fonction $x \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. □

Exercice 11 (Résolution d'un problème de Cauchy pour une EDLS1). — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' + \tan(t)\,x = \sin(2t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbf{R}\right)$.

□

Exercice 12 (Équation fonctionnelle). — Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, dérivables en 0, telles que :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)\,f(y).$$

□

Exercice 13 (Étude qualitative). — Soit $a : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. Démontrer que toutes les solutions de l'équation :

$$(\mathscr{E}) \qquad y' - a(t)\,y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ sont bornées. □

Exercice 14 (Équation différentielle cachée). — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que :

$$f(x) + f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

En introduisant la fonction $g := f + f'$ démontrer que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

□

§ 3. Champ de vecteurs d'un SDL1 homogènes à coefficients constants

Convention. — Dans cette partie, nous confondons les points du plan $\mathbf{R}^2$ et leurs coordonnées dans la base canonique. $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$.

Définition du SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$. — Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. On lui associe le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathscr{S}\mathscr{H}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y \\ y' &=& a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y \end{array} \right.$$

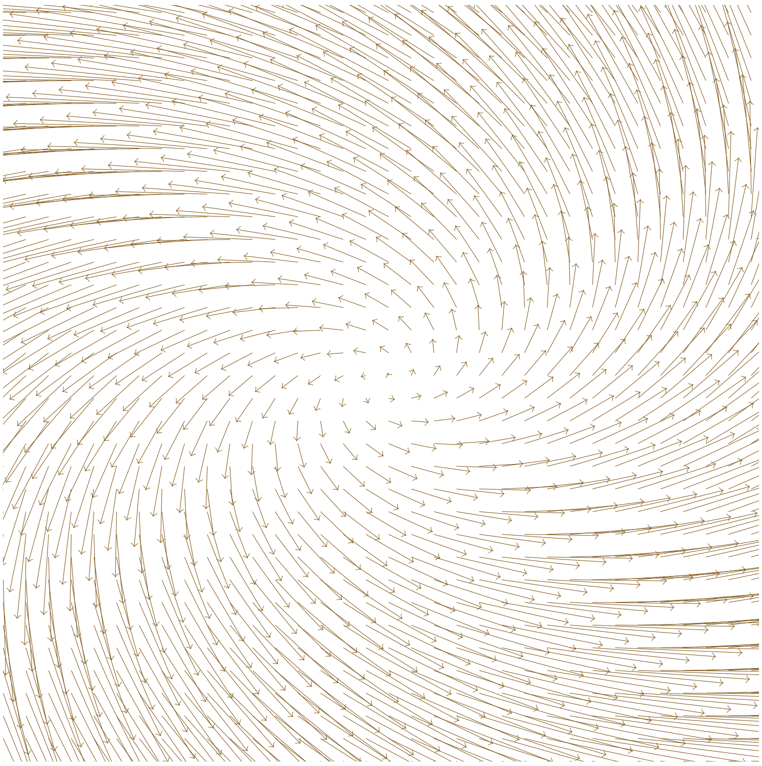
d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.

Champ de vecteurs associé au SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$. — À ce SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$, nous associons le champ de vecteurs :

$$\xi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

On représente le champ de vecteurs ξ en traçant en tout point M du plan, le vecteur $\xi(M)$.

Représentation du champ de vecteurs ξ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



Trajectoire d'une solution du SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$ et interprétation cinématique. — Considérons une solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système différentiel $(\mathscr{S}\mathscr{H})$. Nous introduisons sa trajectoire :

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbf{R} \right\}$$

que nous pouvons assimiler à l'ensemble des positions $M(t)$ prises par un mobile au cours du temps t. En dérivant le vecteur position du mobile :

$$\overrightarrow{OM(t)} := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

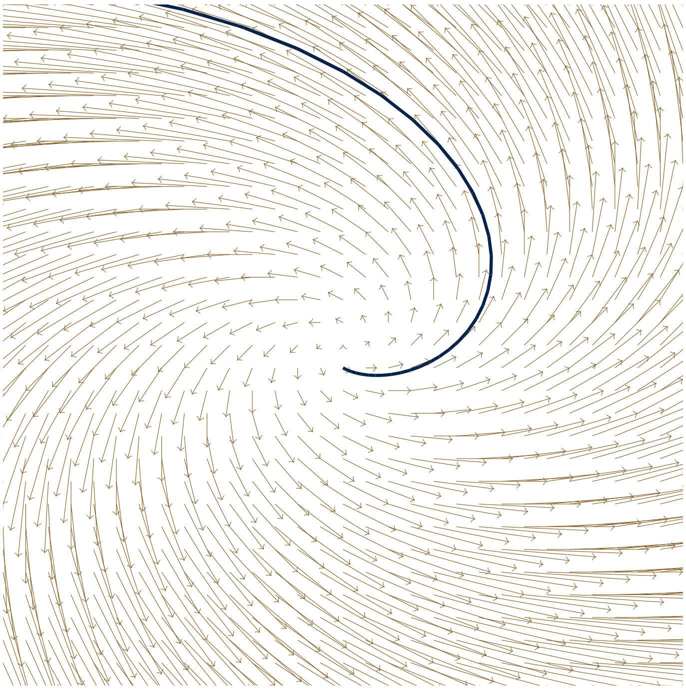
au temps t, on obtient son vecteur vitesse.

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}\,t} := \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \xi\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathscr{S}\mathscr{H}) \right].$$

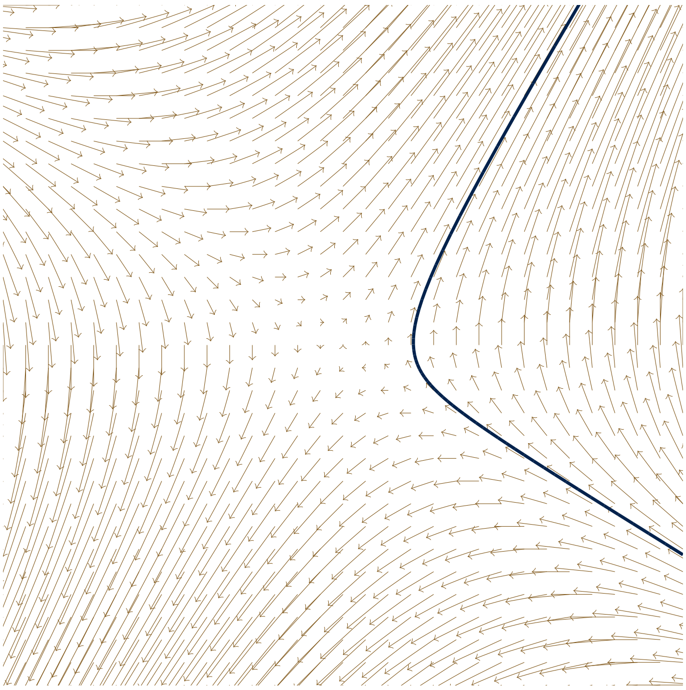
Géométrie des solution du SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$. — Au temps t, les vecteurs $\overrightarrow{OM(t)}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}\,t}$ sont tangents. Ainsi, si un point $M = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ appartient à la trajectoire Γ, la tangente à Γ au point M est portée par le vecteur $\xi(M)$.

☞ La trajectoire d'une solution du SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$ épouse le champ de vecteur ξ.

Champ de vecteurs et une trajectoire d'une solution pour le SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$. — Cas où $A = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.



Champ de vecteurs et une trajectoire d'une solution pour le SDL1 $(\mathscr{S}\mathscr{H})$. — Cas où $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.



§ 4. RÉDUCTION À L'ÉTUDE DES EDL1

NOTATION. — Nous notons $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}$ l'application :

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e}} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u) \end{array} \right. \qquad [\text{isomorphisme de } \mathbf{K}\text{-espaces vectoriels}] .$$

et $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}$ l'application :

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(f) = \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\left(f(e_1)\right) \mid \dots \mid \mathrm{Mat}_{\underline{e}}\left(f(e_n)\right)\right) \end{array} \right. \qquad [\text{isomorphisme de } \mathbf{K}\text{-algèbres}] .$$

PROPOSITION 15 (SDL1 VERSUS EDL1). — *Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$ et le SDL1 associé :*

$$(\mathcal{S}) \quad X' = A(t)\,X + B(t) \qquad \left[\textit{inconnue } X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)\right].$$

On introduit, pour tout $t \in I$:

(a) *$a(t)$ l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(a(t)) = A(t)$, i.e. :*

$$a(t) := \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}\right)^{-1}(A(t))$$

(b) *$b(t)$ l'unique vecteur de E tel que $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(b(t)) = B(t)$, i.e. :*

$$b(t) := \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}(B(t)).$$

Alors :

1. *l'équation :*

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t)\cdot x + b(t) \qquad \left[\textit{inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E)\right]$$

est une EDL1, i.e. les fonctions :

$$a := \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}\right)^{-1} \circ A \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \longmapsto & \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}\right)^{-1}(A(t)) \end{array} \right. \qquad \textit{et} \qquad b := \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1} \circ B \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}(B(t)) \end{array} \right.$$

sont continues sur I ;

2. *l'application :*

$$\varphi_{\mathcal{E},\mathcal{S}} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e}} \circ x \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x(t)) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où :

- $\mathrm{Sol}(\mathcal{E}) := \left\{x \in \mathcal{C}^1(I, E) \;:\; \forall\, t \in I,\ x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)\right\}$;
- $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) := \left\{X \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right) \;:\; \forall\, t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)\right\}$

est bien définie;

3. *l'application :*

$$\varphi_{\mathcal{S},\mathcal{E}} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathrm{Sol}(\mathcal{E}) \\ X & \longmapsto & \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1} \circ X \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}(X(t)) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est bien définie;

4. *les applications $\varphi_{\mathcal{E},\mathcal{S}}$ et $\varphi_{\mathcal{S},\mathcal{E}}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre, i.e. :*

$$\varphi_{\mathcal{E},\mathcal{S}} \circ \varphi_{\mathcal{S},\mathcal{E}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sol}(\mathcal{S})} \qquad \textit{et} \qquad \varphi_{\mathcal{S},\mathcal{E}} \circ \varphi_{\mathcal{E},\mathcal{S}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sol}(\mathcal{E})}.$$

DÉMONSTRATION. —

1. • L'application $\left(\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}\right)^{-1}$ est linéaire entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Elle est donc continue. Ainsi, l'application $a := \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}\right)^{-1} \circ A$ est continue, comme composée d'applications continues.

• On établit la continuité de l'application $b := \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1} \circ B$. de manière analogue.

2. Soit $x \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E})$.

- Comme l'application x est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}$ est linéaire, l'application :

$$\varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}(x) = \mathrm{Mat}_{\underline{e}} \circ x$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ (composée d'une application de classe $\mathscr{C}^1$ par une application linéaire).

- De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}(x)'(t) &= \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}} \circ x\right)'(t) \\
&= \mathrm{Mat}_{\underline{e}}\left(x'(t)\right) \qquad \left[\text{composée d'une application de classe } \mathscr{C}^1 \text{ par une application linéaire}\right] \\
&= \mathrm{Mat}_{\underline{e}}\left(a(t)(x(t)) + b(t)\right) \qquad [x \text{ est solution de } (\mathscr{E})] \\
&= \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(a(t))\, \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x(t)) + \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(b(t)) \\
&= A(t)\left(\varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}(x)(t)\right) + B(t).
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}(x) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. L'application $\varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}$ est bien définie.

3. Soit $X \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$.

- Comme l'application X est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}$ est linéaire, l'application :

$$\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X) = \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1} \circ X$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ (composée d'une application de classe $\mathscr{C}^1$ par une application linéaire).

- De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X)'(t) &= \left(\left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1} \circ X\right)'(t) \\
&= \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}\left(X'(t)\right) \qquad \left[\text{composée d'une application de classe } \mathscr{C}^1 \text{ par une application linéaire}\right] \\
&= \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}\left(A(t)\,X(t) + B(t)\right) \qquad [X \text{ est solution de } (\mathscr{S})] \\
&= \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}\left(\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(a(t))\,\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\left(\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X)(t)\right) + \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(b(t))\right) \qquad \left[\text{définition de } a(t), b(t), \varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X)(t)\right] \\
&= \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1}\left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\left(a(t)\left(\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X)(t)\right) + b(t)\right)\right) \\
&= a(t)\left(\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X)(t)\right) + b(t).
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E})$. L'application $\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}$ est bien définie.

4. Soient $X \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$ et $x \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E})$. On calcule :

$$\varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}} \circ \varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X) = \mathrm{Mat}_{\underline{e}} \circ \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1} \circ X = X \qquad \text{et} \qquad \varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}} \circ \varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}(x) = \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e}}\right)^{-1} \circ \mathrm{Mat}_{\underline{e}} \circ x = x.$$

■

Remarque 16 (raffinement de la proposition 15 pour les problèmes de Cauchy). — Nous conservons les notations de la proposition 15.

1. Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Alors :

$$x \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{E}) \begin{cases} x' = a(t)\cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \implies \varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}(x) \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{S}) \begin{cases} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(t_0) = \varphi_{\mathscr{E},\mathscr{S}}(x_0) \end{cases}.$$

2. Soient $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors :

$$X \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{S}) \begin{cases} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \implies \varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X) \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{E}) \begin{cases} x' = a(t)\cdot x + b(t) \\ x(t_0) = \varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}}(X_0) \end{cases}.$$

■

☞ D'après la proposition 15, l'étude d'un SDL1 peut être ramenée à l'étude d'une EDL1. Un résultat établi pour les EDL1 pourra donc être décliné pour les SDL1.

PROPOSITION 17 (EDLSn VS. SDL1). — *Considérons* $(a_0,\dots,a_{n-1},b)\in\mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})^n$ *et l'EDLSn :*

$$(\mathscr{E}_n)\qquad x=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\,x^{(i)}+b(t)\qquad\left[\text{inconnue } x\in\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})\right]$$

On introduit, pour tout $t\in I$ *:*

$$A(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ 0&\dots&\dots&0&1\\ a_0(t)&\dots&\dots&a_{n-2}(t)&a_{n-1}(t)\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})\qquad\text{et}\qquad B(t)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ b(t)\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

Alors :

1. *le système :*

$$(\mathscr{S})\quad X'=A(t)X+B(t)\qquad\left[\text{inconnue } X\in\mathscr{C}^1\left(I,\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)\right]$$

est un SDL1, i.e. les fonctions :

$$A\left|\begin{array}{ccc}I&\longrightarrow&\mathscr{M}_n(\mathbf{K})\\ t&\longmapsto&A(t)\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad B\left|\begin{array}{ccc}I&\longrightarrow&\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\\ t&\longmapsto&B(t)\end{array}\right.$$

sont continues sur I *;*

2. *l'application :*

$$\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}\left|\begin{array}{ccc}\mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)&\longrightarrow&\mathrm{Sol}(\mathscr{S})\\ x&\longmapsto&\begin{pmatrix}x\\ x'\\ \vdots\\ x^{(n-1)}\end{pmatrix}\left|\begin{array}{ccc}I&\longrightarrow&\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\\ t&\longmapsto&\begin{pmatrix}x(t)\\ x'(t)\\ \vdots\\ x^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

où :

- $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n):=\left\{x\in\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})\ :\ \forall\,t\in I,\ x^{(n)}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)+b(t)\right\}$;
- $\mathrm{Sol}(\mathscr{S}):=\left\{X\in\mathscr{C}^1\left(I,\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)\ :\ \forall\,t\in I,\ X'(t)=A(t)X(t)+B(t)\right\}$

est bien définie;

3. *l'application :*

$$\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}_n}\left|\begin{array}{ccc}\mathrm{Sol}(\mathscr{S})&\longrightarrow&\mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)\\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\left|\begin{array}{ccc}I&\longrightarrow&\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\\ t&\longmapsto&\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}\end{array}\right.&\longmapsto&x_1\end{array}\right.$$

est bien définie;

4. *les applications* $\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}$ *et* $\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}_n}$ *sont des bijections réciproques l'une de l'autre, i.e. :*

$$\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}\circ\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}_n}=\mathrm{id}_{\mathrm{Sol}(\mathscr{S})}\qquad\text{et}\qquad\varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}_n}\circ\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}=\mathrm{id}_{\mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)}.$$

DÉMONSTRATION. —

1. - La continuité de l'application A sur I découle de la continuité des applications $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sur I.
   - De même, La continuité de d'application B sur I découle de la continuité de l'application b sur I.
2. Soit $x \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)$.
   - Les fonctions $x, x', \ldots, x^{(n-1)}$ sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Donc la fonction :

$$\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}(x) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   - Soit $t \in I$.

$$A(t)\left(\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}(t)\right) + B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \ldots & \ldots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \\ \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}(t) + b(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} \qquad [x \text{ est solution de } (\mathscr{E}_n)]$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}'(t).$$

Donc $\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}(x) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. L'application $\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}$ est donc définie.

3. Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. Alors les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et, pour tout $t \in I$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \dots & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}(t) \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1'(t) & = & x_2(t) & (L_1) \\ x_2'(t) & = & x_3(t) & (L_2) \\ & \vdots & & \\ x_{n-1}'(t) & = & x_n(t) & (L_{n-1}) \\ x_n'(t) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x_{i+1}(t) + b(t) & (L_n). \end{array} \right.$$

- Des lignes $(L_1), (L_2), \dots, (L_{n-1})$, on déduit que :

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], \quad x_k' = x_{k+1}$$

puis, au moyen d'un raisonnement par récurrence finie, que :

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], \quad x_1 \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{K}) \quad \text{et} \quad x_1^{(k)} = x_{k+1}.$$

En particulier, $x_1 \in \mathscr{C}^{n-1}(I, \mathbf{K})$ et $x_1^{(n-1)} = x_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})$. Par suite :

$$\varphi_{\mathscr{S}, \mathscr{E}_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K}) \quad \text{et} \quad x_1^{(n)} = x_n'.$$

☞ Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$, alors nécessairement $x_1 \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

- D'après ces résultats et la ligne (L_n), il vient :

$$\forall\, t \in I, \quad x_1^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x_1^{(i)}(t) + b(t).$$

Donc $\varphi_{\mathscr{S}, \mathscr{E}_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)$. L'application $\varphi_{\mathscr{S}, \mathscr{E}_n}$ est donc bien définie.

4. • Soit $x \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)$. On calcule :

$$\varphi_{\mathscr{S}, \mathscr{E}_n} \circ \varphi_{\mathscr{E}_n, \mathscr{S}}(x) = \varphi_{\mathscr{S}, \mathscr{E}_n} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} = x.$$

- Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. On calcule :

$$\varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}} \circ \varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{[cf. étude réalisée en 3]}.$$

■

Remarque 18 (raffinement de la proposition 17 pour les problèmes de Cauchy). — On conserve les notations de la proposition 17 et on introduit $t_0 \in I$, $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$ et $X_0 = \begin{pmatrix} [X_0]_{1,1} \\ \vdots \\ [X_0]_{1,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors :

$$x \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{E}_n) \begin{cases} x^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t) \\ \forall\, i \in [\![0, n-1]\!],\ x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases} \implies \varphi_{\mathscr{E}_n,\mathscr{S}}(x) \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{S}) \begin{cases} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

et, réciproquement :

$$X \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{S}) \begin{cases} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \implies \varphi_{\mathscr{S},\mathscr{E}_n}(X) \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{E}_n) \begin{cases} x^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t) \\ \forall\, i \in [\![0, n-1]\!],\ x^{(i)}(t_0) = [X_0]_{i,1} \end{cases}.$$

■

☞ D'après les propositions 15 et 17, l'étude d'une EDLSn peut être ramenée à l'étude d'une EDL1. Un résultat établi pour les EDL1 pourra donc être décliné pour les EDLSn.

EXERCICE 19. — On considère l'EDLS2 :

$$(\mathscr{E}_3) \qquad x''' + \ln(t)\, x'' - \frac{3}{t}\, x' + \frac{4}{t^2}\, x = t$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^3(]0, +\infty[, \mathbf{R})$. Donner un SDL1 $(\mathscr{S})$ dont la résolution est équivalente à cette de l'équation $(\mathscr{E}_3)$.

□

§ 5. MISE SOUS FORME INTÉGRALE D'UN PROBLÈME DE CAUCHY

PROPOSITION 20 (FORME INTÉGRALE D'UN PROBLÈME DE CAUCHY). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$, $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$ et l'EDL1 associée :*

$$(\mathscr{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^1(I, E)\right].$$

On introduit $(t_0, x_0) \in I \times E$ et le problème de Cauchy :

$$(\mathscr{P}\mathscr{E}) \quad \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Alors, pour toute fonction $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$:

$$x \text{ est solution de } (\mathscr{P}\mathscr{E}) \iff \forall\, t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)\, \mathrm{d}u.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$.
Implication directe. Supposons que x est solution du problème de Cauchy $(\mathscr{PE})$.

- Alors, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :
$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u) \, \mathrm{d}u \end{array} \right.$$
est dérivable sur I, de dérivée x' et est nulle en t_0.
- La fonction :
$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x(t) - x(t_0) \end{array} \right.$$
est également dérivable sur I, de dérivée x' et est nulle en t_0.

Par unicité de la primitive de x' sur I nulle en t_0, il vient :
$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u) \, \mathrm{d}u.$$

Implication réciproque. Supposons que x vérifie :
$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u) \, \mathrm{d}u.$$

- On calcule $x(t_0) = x_0$.
- L'application :
$$B \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) \times E & \longrightarrow & E \\ (f, v) & \longmapsto & f(v) \end{array} \right.$$
est bilinéaire et les espaces $\mathscr{L}(E) \times E$, E sont de dimension finie. Nous en déduisons que l'application :
$$B(a, x) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & a(u)(x(u)) \end{array} \right.$$
est continue. La fonction :
$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & a(u)(x(u)) + b(u) \end{array} \right.$$
est donc également continue sur I. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :
$$x \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u) \, \mathrm{d}u \end{array} \right.$$
est dérivable sur I et :
$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

Des deux points précédents, nous déduisons que la fonction x est solution du problème de Cauchy $(\mathscr{PE})$. ■

§ 6. Principe de superposition et conséquence

1. Cas des EDL1

Proposition 21 (principe de superposition pour une EDL1). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$, $(b_1, b_2) \in \mathscr{C}^0(I, E)^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les EDL1 :*
$$\begin{array}{rl} (\mathscr{E}, b_1) & x' = a(t) \cdot x + b_1(t) \\ (\mathscr{E}, b_2) & x' = a(t) \cdot x + b_2(t) \\ (\mathscr{E}, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) & x' = a(t) \cdot x + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{array}$$
d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$. Alors :
$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}, b_1) \times \mathrm{Sol}(\mathscr{E}, b_2), \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2).$$

DÉMONSTRATION. — Soit $(x_1, x_2) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}, b_1) \times \mathrm{Sol}(\mathscr{E}, b_2)$.
• Comme les fonctions x_1 et x_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, la fonction :

$$x := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^1$).
• Soit $t \in I$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} a(t)(x(t)) + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) &= a(t)(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)) + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \\ &= \lambda_1 a(t)(x_1(t)) + \lambda_2 a(t)(x_2(t)) + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \qquad [\text{linéarité de } a(t)] \\ &= \lambda_1 (a(t)(x_1(t)) + b_1(t)) + \lambda_2 (a(t)(x_2(t)) + b_2(t)) \\ &= \lambda_1 x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) \qquad [x_1 \text{ (resp. } x_2\text{) est solution de } (\mathscr{E}, b_1) \text{ (resp. } (\mathscr{E}, b_2))] \\ &= x'(t) \end{aligned}$$

Des deux points précédents, nous déduisons que x est solution de $(\mathscr{E}, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$. ■

PROPOSITION 22 (FORME DES SOLUTIONS D'UNE EDL1). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$, $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$ et les EDL1 :*

$$\begin{array}{ll} (\mathscr{E}) & x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ (\mathscr{E}\mathscr{H}) & x' = a(t) \cdot x \end{array}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$. Supposons qu'il existe une fonction x_{part} solution de $(\mathscr{E})$. Alors :

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{E}) = \left\{ x_h + x_{part} \,:\, x_h \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H}) \right\}.$$

☞ Pour résoudre une EDL1 $(\mathscr{E})$, il suffit de :
- **(a)** résoudre l'EDL1 homogène $(\mathscr{E}\mathscr{H})$;
- **(b)** déterminer une solution particulière de l'EDL1 avec second membre $(\mathscr{E})$.

2. DÉCLINAISON POUR LES SDL1

PROPOSITION 23 (PRINCIPE DE SUPERPOSITION POUR UN SDL1). — *Considérons $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$, $(B_1, B_2) \in \mathscr{C}^0\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les SDL1 :*

$$\begin{array}{ll} (\mathscr{S}, B_1) & X' = A(t)X + B_2(t) \\ (\mathscr{S}, B_2) & X' = A(t)X + B_2(t) \\ (\mathscr{S}, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) & X' = A(t)X + \lambda_1 B_1(t) + \lambda_2 B_2(t) \end{array}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$. Alors :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S}, B_1) \times \mathrm{Sol}(\mathscr{S}, B_2), \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2).$$

PROPOSITION 24 (FORME DES SOLUTIONS D'UN SDL1). — *Considérons $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathscr{C}^0\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$ et les SDL1 :*

$$\begin{array}{ll} (\mathscr{S}) & X' = A(t)X + B(t) \\ (\mathscr{S}\mathscr{H}) & X' = A(t)X \end{array}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$. Supposons qu'il existe une fonction X_{part} solution de $(\mathscr{S})$. Alors :

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{S}) = \left\{ X_h + X_{part} \,:\, X_h \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S}\mathscr{H}) \right\}.$$

☞ Pour résoudre un SDL1 $(\mathscr{S})$, il suffit de :
- **(a)** résoudre le SDL1 homogène $(\mathscr{S}\mathscr{H})$;
- **(b)** déterminer une solution particulière du SDL1 avec second membre $(\mathscr{S})$.

EXERCICE 25 (SDL1 HOMOGÈNE $(2,2)$, CAS DIAGONALISABLE). — Résoudre le SDL1 homogène :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 2y \\ y' & = & 2x & + & y \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y) \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})^2$. □

EXERCICE 26 (SDL1 HOMOGÈNE $(2,2)$, CAS TRIGONALISABLE). — Résoudre le SDL1 homogène :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & - & y \\ y' & = & x & + & 3y \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y) \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})^2$. □

3. DÉCLINAISON POUR LES EDLSn

PROPOSITION 27 (PRINCIPE DE SUPERPOSITION POUR UNE EDLSn). — *Considérons $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1},b_1,b_2) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})^{n+1}$, $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les EDLSn :*

$$\begin{array}{ll} (\mathscr{E}_n,b_1) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\,x^{(i)} + b_1(t) \\ (\mathscr{E}_n,b_2) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\,x^{(i)} + b_2(t) \\ (\mathscr{E}_n,\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\,x^{(i)} + \lambda_1 b_1(t)+\lambda_2 b_2(t) \end{array}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$. Alors :

$$\forall\,(x_1,x_2) \in \mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}_n,b_1)\times\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}_n,b_2), \quad x_1+x_2 \in \mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}_n,\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2).$$

PROPOSITION 28 (FORME DES SOLUTIONS D'UNE EDLSn). — *Considérons $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1},b) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})^n$ et les EDLSn :*

$$\begin{array}{ll} (\mathscr{E}_n) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\,x^{(i)} + b_(t) \\ (\mathscr{E}\mathscr{H}_n) & x' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\,x^{(i)} \end{array}$$

d'inconnue $c \in \mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$. Supposons qu'il existe une fonction x_{part} solution de $(\mathscr{E}_n)$. Alors :

$$\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}) = \left\{x_h + x_{part} \,:\, x_h \in \mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H})_n\right\}.$$

☞ Pour résoudre une EDLSn $(\mathscr{E}_n)$, il suffit de :

(a) résoudre l'EDLSn homogène $(\mathscr{E}\mathscr{H}_n)$;

(b) déterminer une solution particulière de l'EDLSn avec second membre $(\mathscr{E}_n)$.

§ 7. Théorème de Cauchy linéaire et conséquences

1. Cas des EDL1

Théorème 29 (de Cauchy pour les EDL1). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$, $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$. Alors le problème de Cauchy :*

$$(\mathscr{P}\mathscr{E}) \quad \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Ce théorème fondamental est admis et constitue la pierre angulaire de tout ce chapitre.

Corollaire 30 (structure de l'ensemble solution d'une EDL1 homogène). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$ et l'EDL1 homogène :*

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \quad x' = a(t) \cdot x.$$

Alors :

1. *l'ensemble $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, E)$;*
2. *pour tout $t_0 \in I$, l'application :*

$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H}) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme;
3. $\dim(\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})) = \dim(E)$.

☞ Nous conservons les notations du corollaire 30. Si on connaît n solutions $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})$, linéairement indépendantes, alors toute solution x de $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})$ s'écrit d'une unique manière :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires indépendants du temps t.

Définition 31 (système fondamental de solutions d'une EDL1 homogène). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$ et l'EDL1 homogène :*

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \quad x' = a(t) \cdot x.$$

Un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ est une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ qui forme une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})$.

Proposition 32 (caractérisation des systèmes fondamentaux pour les EDL1 homogènes). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$, l'EDL1 homogène :*

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \quad x' = a(t) \cdot x$$

et une famille $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})^n$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$.*
2. *Il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \in E^n$ est une base de E.*
3. *Pour tout $t \in I$, la famille $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in E^n$ est une base de E.*

THÉORÈME 33 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDL1). — *Considérons $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$, $b \in \mathscr{C}^0(I, E)$, l'EDL1 :*

$$(\mathscr{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

et son EDL1 homogène associée :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \quad x' = a(t) \cdot x$$

1. *Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})^n$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$, alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})^n$ tel que la fonction :*

$$x_{part} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\, x_i(t) \end{array} \right.$$

est solution de $(\mathscr{E})$. Il s'agit de la méthode de variation des constantes.

2. *Si x_{part} est une solution de $(\mathscr{E})$, alors l'ensemble :*

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H}) = x_{part} + \mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})$$

est un sous-espace affine de dimension n de $\mathscr{C}^1(I, E)$.

3. *Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})^n$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ et si x_{part} est une solution de $(\mathscr{E})$ alors toute solution x de $(\mathscr{E})$ s'écrit d'une unique manière :*

$$x = x_{part} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x_{part}(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i(t) \end{array} \right.$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.

2. DÉCLINAISON POUR LES SDL1

THÉORÈME 34 (DE CAUCHY POUR LES SDL1). — *Considérons $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathscr{C}^0\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$ et $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors le problème de Cauchy :*

$$(\mathscr{P}\mathscr{S}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)\, X + B(t) \\ X(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

COROLLAIRE 35 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE SOLUTION D'UN SDL1 HOMOGÈNE). — *Considérons $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$ et le SDL1 homogène :*

$$(\mathscr{S}\mathscr{H}) \quad X' = A(t)X.$$

Alors :

1. *l'ensemble $\mathrm{Sol}(\mathscr{S}\mathscr{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$;*
2. *pour tout $t_0 \in I$, l'application :*

$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathscr{S}\mathscr{H}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & X(t_0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme;

3. $\dim(\mathrm{Sol}(\mathscr{S}\mathscr{H})) = n$.

Nous conservons les notations du corollaire 35. Si on connaît n solutions $X_1,\dots,X_n$ de $\mathrm{Sol}(\mathscr{SH})$, linéairement indépendantes, alors toute solution X de $\mathrm{Sol}(\mathscr{SH})$ s'écrit d'une unique manière :

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$$

où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des scalaires indépendants du temps t.

DÉFINITION 36 (SYSTÈME FONDAMENTAL DE SOLUTIONS D'UN SDL1 HOMOGÈNE). — *Considérons $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$ et le SDL1 homogène :*

$$(\mathscr{SH}) \quad X' = A(t)X.$$

Un système fondamental de solutions de $(\mathscr{SH})$ est une famille $(X_1,\dots,X_n)$ de solutions de $(\mathscr{SH})$ qui forme une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(\mathscr{SH})$.

PROPOSITION 37 (CARACTÉRISATION DES SYSTÈMES FONDAMENTAUX POUR LES SDL1 HOMOGÈNES). — *Considérons $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$, le SDL1 homogène :*

$$(\mathscr{SH}) \quad X' = A(t)X$$

et une famille $(X_1,\dots,X_n) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{SH})^n$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La famille $(X_1,\dots,X_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{SH})$.*
2. *Il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(X_1(t_0),\dots,X_n(t_0)) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.*
3. *Pour tout $t \in I$, la famille $(X_1(t),\dots,X_n(t)) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.*

THÉORÈME 38 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE SOLUTION D'UNE SDL1). — *Considérons $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathscr{C}^0\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$, le SDL1 :*

$$(\mathscr{S}) \quad X' = A(t)X + B(t)$$

et son EDL1 homogène associée :

$$(\mathscr{SH}) \quad X' = A(t)\cdot X$$

1. *Si $(X_1,\dots,X_n) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{SH})^n$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{SH})$, alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{K})^n$ tel que :*

$$\forall\, t \in I, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\, X_i(t) = B(t) \qquad \left[\textit{point de départ pour la méthode de variation des constantes}\right]$$

et la fonction :

$$X_{part} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\, X_i(t) \end{array} \right.$$

est solution de $(\mathscr{S})$. Il s'agit de la méthode de variation des constantes.

2. *Si X_{part} est une solution de $(\mathscr{S})$, alors l'ensemble :*

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{SH}) = X_{part} + \mathrm{Sol}(\mathscr{SH})$$

est un sous-espace affine de dimension n de $\mathscr{C}^1\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$.

3. *Si $(X_1,\dots,X_n) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{SH})^n$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{SH})$ et si X_{part} est une solution de $(\mathscr{S})$ alors toute solution X de $(\mathscr{S})$ s'écrit d'une unique manière :*

$$X = X_{part} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, X_i \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & X_{part}(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, X_i(t) \end{array} \right.$$

où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.

EXERCICE 39 (SDL1 HOMOGÈNE $(3,3)$, CAS DIAGONALISABLE). — On considère le SDL1 homogène :

$$(\mathscr{SH})\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & 2y & - & z \\ y' & = & 2x & + & 4y & - & 2z \\ z' & = & -x & - & 2y & + & z \end{array}\right.$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$.

1. Soit λ une valeur propre réelle et V un vecteur propre associé. Démontrer que la fonction :

$$X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} V \end{array}\right.$$

   est solution de $(\mathscr{SH})$.
2. Réduire la matrice sous-jacente au SDL1 $(\mathscr{SH})$ et en déduire une base de l'espace $\mathrm{Sol}(\mathscr{SH})$ des solutions de $(\mathscr{SH})$.

□

3. DÉCLINAISON POUR LES EDLSn

THÉORÈME 40 (DE CAUCHY POUR LES EDLSn). — *Considérons* $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})^n$ *et* $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I \times \mathbf{K}^n$. *Alors le problème de Cauchy :*

$$(\mathscr{PE}_n)\quad \left\{\begin{array}{l} x^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \quad\vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{array}\right.$$

admet une unique solution.

COROLLAIRE 41 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDLSn HOMOGÈNE). — *Considérons* $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})^{n-1}$ *et l'EDLSn :*

$$(\mathscr{EH}_n)\quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}$$

Alors :

1. *l'ensemble* $\mathrm{Sol}(\mathscr{EH}_n)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$ *;*
2. *pour tout* $t_0 \in I$, *l'application :*

$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\mathscr{EH}_n) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

   est un isomorphisme;
3. $\dim\left(\mathrm{Sol}(\mathscr{EH}_n)\right) = n$.

Théorème 42 (structure de l'ensemble solution d'une EDLSn). — *Considérons $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})^n$, l'EDLSn :*

$$(\mathscr{E}_n) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t)$$

et donc EDLSn homogène associée :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}_n) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}$$

1. *L'équation différentielle $(\mathscr{E}_n)$ possède une solution.*
2. *L'ensemble $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)$ est un sous-espace affine de dimension n de $\mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$.*
3. *Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_n)^n$ est une base de $(\mathscr{E}\mathscr{H}_n)$ et si x_{part} est une solution de $(\mathscr{E}_n)$ alors toute solution x de $(\mathscr{E}_n)$ s'écrit d'une unique manière :*

$$x = x_{part} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x_{part}(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t) \end{array} \right.$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.

Exercice 43 (EDLS2 à coefficients constants). — On considère l'EDLS2 :

$$(\mathscr{E}_2) \quad y'' + 4y' + 4y = t e^{-2t}$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

1. Donner deux solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène $(\mathscr{E}\mathscr{H}_2)$ linéairement indépendantes.
2. Donner une solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$.
3. Conclure quant à l'ensemble solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H}_2)$

□

Exercice 44 (EDLS2 homogène à coefficients constants). — On considère l'EDLS2 :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}_2) \quad y'' + y' + 2y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Donner deux solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène $(\mathscr{E}\mathscr{H}_2)$ linéairement indépendantes et conclure quant à l'ensemble solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H}_2)$. □

Exercice 45 (EDLS3 homogène à coefficients constants). — On considère l'EDLS3 :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}_3) \quad y''' = y$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^3(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Déterminer des nombres complexes $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que la fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} \end{array} \right.$$

est solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H}_3)$ et en déduire toutes les solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H}_3)$. □

Exercice 46 (EDLS2 à coefficients constants). — On considère l'EDLS2 :

$$(\mathscr{E}_2) \quad y'' + y = \cos^3(x)$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. □

§ 8. EDLS1 et EDLS2 non normalisées

Exercice 47. — Résoudre sur l'intervalle **R** l'équation différentielle :

$$t^2 y' - y = 0.$$

□

Exercice 48. — Résoudre sur l'intervalle **R** l'équation différentielle :

$$(1-t)\, y' - y = t.$$

□

Exercice 49. — Soit l'équation différentielle :

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de
$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$$
sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

□

Exercice 50. — a et b étant deux fonctions continues sur **R**, on note l'équation différentielle :

$$(E): \quad x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty,0[$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur **R** vérifiant (E) sur **R** tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J. Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim(S) \leqslant 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où :
$$(E): \quad x^2 y'' + xy' = 0.$$
Determiner S^+ et S^-. Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S .
4. Dans cette question :
$$(E): \quad : x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0.$$
Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel). En déduire S^+ puis S^-. Déterminer S et donner la dimension de S.
5. Donner un exemple d'équation différentielle du type
$$(E): \quad x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$
tel que $\dim(S) = 0$ (on détaillera). On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

□

Exercice 51. — On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$(E_1): \qquad x^2 y'' + axy' + by = 0$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Que dire de la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) sur $I =]0,+\infty[$? Et sur $J =]-\infty,0[$?

2. Démontrer que si y est une solution de (E_1) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$(E_2): \qquad u'' + (a-1)u' + bu = 0.$$

3. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de (E_2) sur $\mathbf{R}$. Démontrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (E_1) sur I.
4. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (E_2) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (E_1) sur l'intervalle I.

□

§ 9. EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICE

NOTATIONS. — On considère :

- un entier naturel $n \geqslant 2$;
- un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n ;
- une norme $\|\cdot\|$ sur E (elles sont toutes équivalentes).

***Rappel 52 (norme subordonnée d'un endomorphisme).* —** L'application :

$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ u & \longmapsto & |||u||| := \sup\{\|u(x)\| \,:\, x \in E \text{ et } \|x\| \leqslant 1\} \end{array} \right.$$

est une norme sur E qui vérifie :

$$\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2, \quad |||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v||| \qquad [\text{sous-multiplicativité}].$$

■

DÉFINITION 53 (EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. La série d'endomorphismes $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente (E est de dimension finie). On définit l'exponentielle de u notée e^u ou $\exp(u)$ par :*

$$e^u := \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u^p}{p!}.$$

***Rappel 54 (norme matricielle sous-multiplicative).* —** L'application :

$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ M & \longmapsto & |||A||| := \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,j} \,:\, j \in [\![1,n]\!] \right\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad |||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B||| \qquad [\text{sous-multiplicativité}].$$

■

DÉFINITION 55 (EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE). — *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La série de matrices $\sum \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente ($\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie). On définit l'exponentielle de A notée e^A ou $\exp(A)$ par :*

$$e^A := \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}.$$

Exercice 56 (Exponentielle d'une matrice nilpotente). — Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente de nilindice p. Calculer $\exp(N)$. □

Exercice 57 (Calcul d'une exponentielle de matrice). — Calculer l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

Proposition 58 (Exponentielle d'un endomorphisme vs. exponentielle d'une matrice). — *Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e^u\right) = e^{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)}.$$

Proposition 59 (Exponentielle d'une matrice diagonale). — *Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. Alors :*

$$\exp\left(\mathrm{Diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)\right) = \mathrm{Diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right).$$

Proposition 60 (Exponentielle de deux matrices semblables). — *Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}(\mathbf{K})$. Alors les matrices e^A et e^B sont semblables.*

Exercice 61 (Calcul d'une exponentielle de matrice). — Calculer l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. □

Exercice 62 (Déterminant de l'exponentielle d'une matrice). — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que :

$$\mathrm{Det}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)).$$

□

Proposition 63 (Spectre d'une exponentielle de matrice). — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors :*

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}\left(e^A\right) = \left\{e^\lambda \;:\; \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A)\right\}.$$

Proposition 64 (Exponentielle d'une somme de matrices qui commutent). — *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = BA$. Alors :*

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

Démonstration. — Considérons une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et fixons $p \in \mathbf{N}$. Comme A et B commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de $A+B$.

$$\sum_{s=0}^{2p} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{2p} \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^{s} \frac{s!}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i} = \sum_{s=0}^{2p} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i}.$$

Si nous posons, pour tout $s \in [\![0, 2n]\!]$:

$$D_s := \left\{(i,j) \in [\![0,n]\!] \;:\; i+j = s\right\}$$

alors nous en déduisons que :

$$\sum_{s=0}^{2p} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{2p} \sum_{(i,j)\in D_s} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j.$$

En posant :

$$T_{2p} := \bigsqcup_{s=0}^{2p} D_s = \left\{(i,j) \in [\![0, 2p]\!] \;:\; i+j \leqslant 2p\right\}$$

il vient :

$$\sum_{s=0}^{2p} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{(i,j)\in T_{2p}} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j.$$

Le triangle T_{2p} peut être partitionné comme suit :

$$T_{2p} = \underbrace{[\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!]}_{=:C_p} \bigsqcup \underbrace{\{(i,j) \in T_{2p} \,:\, j \geqslant p+1\}}_{=:T_p^h} \bigsqcup \underbrace{\{(i,j) \in T_{2p} \,:\, i \geqslant p+1\}}_{=:T_p^d}$$

Ainsi :

$$(\star) \qquad \sum_{s=0}^{2p} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{(i,j)\in C_p} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j + \sum_{(i,j)\in T_p^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j + \sum_{(i,j)\in T_p^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j.$$

Comme :

- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in C_p} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j = \left(\sum_{i=0}^{p} \frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{p} \frac{B^j}{j!}\right)$
- $\displaystyle\left|\left|\sum_{(i,j)\in T_p^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j\right|\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_p^h} \frac{1}{i!\,j!} ||A||^i\,||B||^j \leqslant \sum_{(i,j)\in \mathbf{N}\times[\![p+1,+\infty[\![} \frac{1}{i!\,j!} ||A||^i\,||B||^j = \exp(||A||)\left(\sum_{j=p+1}^{+\infty} \frac{||B||^i}{i!}\right)$
- $\displaystyle\left|\left|\sum_{(i,j)\in T_p^d} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j\right|\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_p^d} \frac{1}{i!\,j!} ||A||^i\,||B||^j \leqslant \sum_{(i,j)\in[\![p+1,+\infty[\![\times \mathbf{N}} \frac{1}{i!\,j!} ||A||^i\,||B||^j = \left(\sum_{j=p+1}^{+\infty} \frac{||A||^i}{i!}\right)\exp(||B||)$

et l'application :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ (M_1, M_2) & \longmapsto & M_1 M_2 \end{array}\right.$$

est continue (puisque bilinéaire entre espaces de dimension finie), nous pouvons faire tendre p vers $+\infty$ dans l'identité $(\star)$ pour en déduire :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

■

Exercice 65 (Inversibilité d'une exponentielle de matrice). — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et expliciter $\exp(A)^{-1}$. □

Proposition 66 (continuité de l'exponentielle de matrices). — *L'application*

$$\exp \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & \exp(A) := \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!} \end{array}\right.$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration. — Considérons une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $r > 0$. Nous allons tout d'abord démontrer que exp est continue sur $B\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}, r\right)$.

(a) Pour tout $p \in \mathbf{N}$, la fonction

$$f_p \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & \dfrac{A^p}{p!} \end{array}\right.$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, puisque les coefficients de la matrice $\dfrac{A^p}{p!}$ admettent des expressions polynomiales en les coefficients de A.

(b) Soit $r > 0$. Pour tout $A \in B\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}, r\right)$:

$$||f_p(A)|| = \left|\left|\frac{A^p}{p!}\right|\right| \leqslant \frac{||A||^p}{p!} \leqslant \frac{r^p}{p!}$$

nous en déduisons que :

$$||f_p||_{\infty, B(0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}, r)} \leqslant \frac{r^p}{p!}$$

puis que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} f_p$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $B\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}, r\right)$.

(c) De (a) et (b), nous déduisons que la fonction $\exp = \sum_{p=0}^{+\infty} f_p$ est continue sur $B\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}, r\right)$.

(d) Comme :

$$\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \bigcup_{r>0} B\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}, r\right) \qquad [\text{réunion d'ouverts de } \mathscr{M}_n(\mathbf{K})]$$

la fonction exp est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

■

THÉORÈME 67 (UNE FONCTION DÉRIVABLE FONDAMENTALE). — *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. La fonction :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array} \right.$$

est dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = Af(t)$.

DÉMONSTRATION. — Considérons une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

(a) Démontrons que :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow[t \longrightarrow 0]{} Af(0) = AI_n = A.$$

Soit $t \in]-1,0[\cup]0,1[$. Le résultat découle de l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f(t) - f(0)}{t} - Af(0) \right\| &= \left\| \frac{1}{t}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(tA)^p}{p!} - I_n \right) - A \right\| \\
&= \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{t^{p-1} A^p}{p!} \right\| \\
&\leqslant \sum_{p=2}^{+\infty} |t|^{p-1} \frac{||A||^p}{p!} \\
&= |t| \sum_{q=0}^{+\infty} |t|^q \frac{||A||^{q+2}}{(q+2)!} && [p = q+2] \\
&\leqslant |t| \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{||A||^{q+2}}{(q+2)!} && [q \geqslant 0 \text{ et } |t| \leqslant 1]
\end{aligned}$$

et du théorème d'encadrement.

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. Démontrons :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} Af(t).$$

Soit $h \in \mathbf{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{\exp(hA + tA) - \exp(tA)}{h} \\
&= \frac{\exp(hA)\exp(tA) - \exp(tA)}{h} && [\text{les matrices } hA \text{ et } tA \text{ commutent}] \\
&= \frac{\exp(hA) - I_n}{h} \exp(tA) \\
&= \frac{f(h) - f(0)}{h} \exp(tA)
\end{aligned}$$

L'application :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M\exp(tA) \end{array} \right.$$

est continue (car linéaire entre espaces de dimension finie). Grâce au résultat établi en (a), il vient :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = u\left(\frac{f(h) - f(0)}{h} \right) \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} u(A) = A\exp(tA) = Af(t).$$

■

§ 10. RÉSOLUTION D'UN SDL1HCC

NOTATIONS. — Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ identifiée avec l'application constante (donc continue) :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & A \end{array}\right.$$

On considère le SDL1 homogène à coefficients constants (SDL1HCC) :

$$(\mathscr{SH}) \qquad X' = AX$$

d'inconnue une fonction :

$$X \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

une application de classe $\mathscr{C}^1$ et son ensemble solution :

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{SH}) := \left\{X \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right) \;:\; \forall\, t \in \mathbf{R},\; X'(t) = AX(t)\right\}.$$

Le SDL1HCC $(\mathscr{SH})$ peut être écrit sous forme d'un système d'EDLS1 homogènes :

$$(\mathscr{SH}) \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_1' & = & a_{1,1}\,x_1 + \ldots + a_{1,n}\,x_n \\ x_2' & = & a_{2,1}\,x_1 + \ldots + a_{2,n}\,x_n \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n,1}\,x_1 + \ldots + a_{n,n}\,x_n \end{array}\right.$$

OBJECTIF. — D'après le théorème 35, $\mathrm{Sol}(\mathscr{SH})$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$. Pour le décrire, nous souhaitons calculer un système fondamental (i.e. une base) :

$$(X_1, \ldots, X_n)$$

de solutions de $(\mathscr{SH})$.

THÉORÈME 68 (RÉSOLUTION D'UN SDL1HCC VIA L'EXPONENTIELLE DE MATRICES). — *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On définit la fonction f par :*

$$f \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}\right.$$

et, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la fonction X_j par :

$$X_j \left|\begin{array}{cccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & f(t)\cdot e_j & \left[j\text{-ième colonne de } \exp(tA)\right]. \end{array}\right.$$

Alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{SH})$.

THÉORÈME 69 (RÉSOLUTION D'UN SDL1HCC DANS LE CAS DIAGONALISABLE). — *Supposons la matrice A diagonalisable sur $\mathbf{K}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de A dans $\mathbf{K}$. et, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$:*

$$\left(e_{i,1}, \ldots, e_{i,n_i}\right)$$

une base du sous-espace propre E_{λ_i}. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, pour tout $j \in [\![1,n_i]\!]$, on définit la fonction $X_{i,j}$ par :

$$X_{i,j} \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(\lambda_i t)\cdot e_{i,j}. \end{array}\right.$$

Alors $\left(X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}, \ldots, X_{r,1}, \ldots, X_{r,n_r}\right)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{SH})$.

EXERCICE 70 (RÉSOLUTION D'UN SDL1 À COEFFICIENTS CONSTANTS). — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre le SDL1 à coefficients constants :

$$(\mathscr{S}) \qquad X' = AX + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\text{inconnue } X \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)\right].$$

□

EXERCICE 71 (RÉSOLUTION D'UN SDL1HCC). — Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [A]_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Résoudre le SDL1HCC :

$$(\mathscr{S}\mathscr{H}) \qquad X' = AX \qquad \left[X \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})\right)\right].$$

□

§ 11. EDLS2 À COEFFICIENTS CONSTANTS : RAPPELS DE MP2I

THÉORÈME 72 (RÉSOLUTION DE $x'' + ax' + bx = 0$ AVEC $(a,b) \in \mathbf{C}^2$ ET $x \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})$). — *Soit $(a,b) \in \mathbf{C}^2$. On considère l'EDLS2 homogène :*

$$(\mathscr{E}) \qquad x'' + ax' + bx = 0 \qquad \left[\textit{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})\right]$$

et son équation caractéristique :

$$(\mathscr{E}_{car}) \qquad r^2 + ar + b = 0 \qquad [\textit{inconnue } r \in \mathbf{C}].$$

1. *Si $(\mathscr{E}_{car})$ possède deux solutions distinctes λ_1, λ_2 dans $\mathbf{C}$ alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{E}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}\left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_1 t} \end{array} \right., \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_2 t} \end{array} \right. \right).$$

2. *Si $(\mathscr{E}_{car})$ possède une solution double λ dans $\mathbf{C}$ alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{E}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}\left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} \end{array} \right., \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & t\, e^{\lambda t} \end{array} \right. \right).$$

THÉORÈME 73 (RÉSOLUTION DE $x'' + ax' + bx = 0$ AVEC $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ ET $x \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$). — *Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. On considère l'EDLS2 homogène :*

$$(\mathscr{E}) \qquad x'' + ax' + bx = 0 \qquad \left[\textit{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})\right]$$

et son équation caractéristique :

$$(\mathscr{E}_{car}) \qquad r^2 + ar + b = 0 \textit{ d'inconnue } r \in \mathbf{C}$$

1. *Si $(\mathscr{E}_{car})$ possède deux solutions distinctes λ_1, λ_2 dans $\mathbf{R}$ alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{E}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_1 t} \end{array} \right., \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_2 t} \end{array} \right. \right).$$

2. *Si $(\mathscr{E}_{car})$ possède une solution double λ dans $\mathbf{R}$ alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{E}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} \end{array} \right., \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t\, e^{\lambda t} \end{array} \right. \right).$$

3. *Si $(\mathscr{E}_{car})$ possède deux solutions complexes non réelles conjuguées $\alpha \pm i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ alors :*

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{E}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \cos(\beta t)\, e^{\alpha t} \end{array} \right., \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\beta t)\, e^{\alpha t} \end{array} \right. \right).$$

Remarque 74 (solution particulière pour un second membre en « polynôme × exponentielle »). — Soient :

- $(a,b) \in \mathbf{K}^2$;
- $P \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$;
- $\lambda \in \mathbf{K}$.

On considère l'EDLS2 à coefficients constants :

$$(\mathscr{E}) \qquad x'' + ax' + bx = P(t)\, e^{\lambda t} \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{K})\right]$$

et son équation caractéristique de son équation différentielle linéaire homogène associée :

$$(\mathscr{E}_{\text{car}}) \qquad r^2 + ar + b = 0 \qquad [\text{inconnue } r \in \mathbf{C}]\ .$$

On note :

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } (\mathscr{E}_{\text{car}}) \\ 1 & \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } (\mathscr{E}_{\text{car}}) \\ 2 & \text{si } \lambda \text{ est racine double de } (\mathscr{E}_{\text{car}}). \end{cases}$$

Alors l'équation $(\mathscr{E})$ admet une solution particulière de la forme :

$$x_{\text{part}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & Q(t)\, e^{\lambda t} \end{array} \right.$$

où $Q \in \mathbf{K}[X]$ est un polynôme de degré $\deg(P) + m$. ■

§ 12. Résolution d'une EDLS2

Notations. — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et trois fonctions

$$a_0 : I \longrightarrow \mathbf{K} \quad , \quad a_1 : I \longrightarrow \mathbf{K} \quad , \quad b : I \longrightarrow \mathbf{K}$$

des fonctions continues sur I. On considère l'EDLS2 :

$$(\mathscr{E}) \qquad x'' = a_0(t)\, x + a_1(t)\, x' + b(t) \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(I,\mathbf{K})\right]$$

et son EDLS2 homogène associée :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad x'' = a_0(t)\, x + a_1(t)\, x' \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(I,\mathbf{K})\right].$$

Objectifs. — D'après les théorèmes 41 et 42 :

- $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})$ est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^2(I,\mathbf{K})$;
- $\mathrm{Sol}(\mathscr{E})$ est un plan affine de $\mathscr{C}^2(I,\mathbf{K})$ de direction $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}\mathscr{H})$.

Nous souhaitons proposer des méthodes pour :

(1) compléter une solution x_1 de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ en un système fondamental (x_1, x_2) de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$;

(2) déterminer une solution particulière de $(\mathscr{E})$ connaissant un système fondamental (x_1, x_2) de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$.

1. Wronskien

Lemme 75 (critère de liberté pour deux solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$). — *Soient x_1, x_2 deux solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$. Si x_1 ne s'annule pas sur I, alors la famille (x_1, x_2) est libre si et seulement si :*

$$\forall\, t \in I, \qquad W(t) := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0.$$

Démonstration. — **(a) Implication réciproque par contraposée** Si la famille (x_1, x_2) est liée alors, pour tout $t \in I$, (et *a fortiori* pour un $t \in I$), $W(t) = 0$. Par contraposition, l'implication réciproque est démontrée.

(b) Implication directe par contraposée Supposons donc qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) = 0$ et démontrons que la famille (x_1, x_2) est liée. La fonction :

$$W \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, car x_1 et x_2 sont $\mathscr{C}^2$ sur I. Soit $t \in I$.

$$\begin{array}{rcll} W'(t) & = & x_1'(t)x_2'(t) + x_1(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1'(t) - x_2(t)x_1''(t) & \\ & = & x_1(t)x_2''(t) - x_2(t)x_1''(t) & \\ & = & x_1(t)(a_1(t)x_2'(t) + a_0(t)x_2(t)) - x_2(t)(a_1(t)x_1'(t) + a_0(t)x_1(t)) & [x_1, x_2 \text{ solutions de } (\mathscr{EH})] \\ & = & a_1(t)x_1(t)x_2'(t) + a_0(t)x_1(t)x_2(t) - a_1(t)x_1'(t)x_2(t) - a_0(t)x_1(t)x_2(t) & \\ & = & a_1(t)\left(x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)\right) & \\ & = & a_1(t)\,W(t) & \end{array}$$

Donc W est solution du problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 :

$$(\mathscr{PH}) \qquad \left| \begin{array}{l} y' = a_1(t)\,y \\ y(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})$. Or $0_{\mathscr{C}^1(I,\mathbf{K})}$ est aussi solution de $(\mathscr{PH})$. Par le théorème de Cauchy pour les EDLS1, il vient :

$$\forall\, t \in I, \qquad W(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = 0\,.$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{x_2(t)}{x_1(t)}$ est donc constante sur l'intervalle I et par suite la famille (x_1, x_2) est liée. ∎

Proposition 76 (EDLS1 scalaire vérifiée par le Wronskien). — *Soient (x_1, x_2) deux solutions de (E). On pose :*

$$W \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t). \end{array} \right.$$

1. *Le Wronskien W vérifie l'EDLS1 homogène :*

$$y' = a_1(t)\,y \qquad \left[\text{ d'inconnue } y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})\right].$$

2. *Pour tout $t \in I$:*

$$W(t) = W(t_0)\,\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_1(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

où t_0 est un point fixé de I.

Démonstration. —

1. Cf. démonstration du lemme 75.
2. Cf. formule intégrale pour une solution d'une EDLS1 homogène.

∎

2. Méthode de variation de la constante ou de l'abaissement de l'ordre

Hypothèse. — Nous supposons connue une solution x_1 de $(\mathscr{EH})$ qui ne s'annule pas sur I obtenue par exemple en :

- cherchant une solution « évidente » ;
- utilisant une solutoin soufflée dans l'énoncé ;
- déterminant x_1 avec l'information supplémentaire qu'elle est de nature polynomiale ;
- cherchant une fonction x_1 développable en série entière.

Objectif. — Déterminer une deuxième solution x_2 de l'équation différentielle $(\mathscr{EH})$, de sorte que (x_1, x_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{EH})$.

PROPOSITION 77 (MÉTHODE DE LA VARIATION DE LA CONSTANTE OU DE L'ABAISSEMENT DE L'ORDRE). — *Soit $\lambda \in \mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$. La fonction :*

$$x_2 = \lambda x_1$$

est solution de $(\mathscr{EH})$ si et seulement si λ' est solution de l'EDLS1 homogène :

$$(\mathscr{EH}_{\text{aux}}) \qquad x_1(t) y' = (a_1(t) x_1(t) - 2x_1'(t)) y \qquad \left[\textit{inconnue } y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})\right].$$

DÉMONSTRATION. — Soit la fonction :

$$x_2 = \lambda x_1$$

où $\lambda \in \mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$. On calcule :

$$x_2' = \lambda x_1' + \lambda' x_1 \qquad \text{et} \qquad x_2" = \lambda x"_1 + 2\lambda' x_1' + \lambda'' x_1.$$

D'où x_2 est solution de $(\mathscr{EH})$ si et seulement si :

$$\forall\, t \in I, \quad x_2''(t) = a_0(t)\, x_2(t) + a_1(t)\, x_2'(t)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall\, t \in I, \qquad \lambda(t)\, x_1''(t) + 2\lambda'(t)\, x_1'(t) + \lambda''(t)\, x_1(t) = a_0(t)\, \lambda(t)\, x_1(t) + a_1(t)\, \big(\lambda(t)\, x_1'(t) + \lambda'(t)\, x_1(t)\big) = 0.$$

Comme x_1 est solution de $(\mathscr{EH})$, x_2 est solution de $(\mathscr{EH})$ si et seulement si :

$$\forall\, t \in I, \qquad \lambda''(t)\, x_1(t) = -2\lambda'(t)\, x_1'(t) + a_1(t)\, \lambda'(t)\, x_1(t).$$

Ainsi la fonction x_2 est solution de $(\mathscr{EH})$ si et seulement si la fonction λ est solution de l'équation différentielle :

$$\lambda'' x_1(t) = \lambda' \left(a_1(t) x_1(t) - 2x_1'(t)\right)$$

i.e. si λ' est solution de l'EDLS1 homogène :

$$(\mathscr{EH}_{\text{aux}}) \qquad x_1(t) y' = (a_1(t) x_1(t) - 2x_1'(t)) \qquad \left[\text{inconnue } y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})\right].$$

L'équation $(\mathscr{EH}_{\text{aux}})$ peut être normalisée sur I, puisque par hypothèse la fonction x_1 ne s'y annule pas. ∎

3. MÉTHODE DU WRONSKIEN

HYPOTHÈSE ET OBJECTIF. — Identiques à ceux de la partie précédente.

NOTATION. — Si $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$, on note :

- $\displaystyle\int f(u)\, \mathrm{d}u$ une primitive quelconque fixée de f sur I ;
- $\displaystyle\int^t f(u)\, \mathrm{d}u$ la valeur de cette primitive en un point $t \in I$.

PROPOSITION 78 (MÉTHODE DU WRONSKIEN). — *Posons :*

$$W \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \exp\left(\displaystyle\int^t a_1(u)\, \mathrm{d}u\right) \end{array} \right. \qquad \textit{et} \qquad x_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & x_1(t) \displaystyle\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\, \mathrm{d}u. \end{array} \right.$$

Alors x_2 est solution de $(\mathscr{EH})$ et (x_1, x_2) est une base de l'ensemble des solutions de $(\mathscr{EH})$.

DÉMONSTRATION. — (a) Comme a est continue la fonction W est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, par le théorème fondamental de l'analyse. Comme la fonction W est $\mathscr{C}^1$ sur I, la fonction x_1 est $\mathscr{C}^1$ et ne s'annule par sur I, la fonction $\dfrac{W}{x_1^2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur I. Par le théorème fondamental de l'analyse et le caractère $\mathscr{C}^2$ de x_1 sur I, la fonction x_2 est $\mathscr{C}^2$ sur I.
(b) Par le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $t \in I$:

$$x_2'(t) = x_1'(t) \int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\, \mathrm{d}u + \frac{W(t)}{x_1(t)}$$

et

$$x_2''(t) = x_1''(t)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u + x_1'(t)\frac{W(t)}{x_1^2(t)} + \frac{W'(t)x_1(t) - W(t)x_1'(t)}{x_1^2(t)} = x_1''(t)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u + \frac{W'(t)}{x_1(t)}.$$

Soit $t \in I$.

$$\begin{aligned} a_1(t)x_2'(t) + a_0(t)x_2(t) &= a_1(t)\,x_1'(t)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u + a_1(t)\frac{W(t)}{x_1(t)} + a_0(t)x_1(t)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \big(a_1(t)x_1'(t) + a_0(t)x_1(t)\big)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u + \frac{a_1(t)W(t)}{x_1(t)} \\ &= x_1{}''(t)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u + \frac{W'(t)}{x_1(t)} \qquad \big[W'(t) = a_1(t)W(t) \text{ et } x_1 \text{ solution de } (\mathscr{E}\mathscr{H})\big] \\ &= x_2''(t) \end{aligned}$$

Ainsi x_2 est solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$.

(c) Démontrons que (x_1, x_2) est libre, ou, ce qui revient au même que :

$$\forall\, t \in I, \quad x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0 \qquad \text{[lemme 75]}.$$

Soit $t \in I$. Nous calculons :

$$x_1(t)x_2' t) - x_1'(t)x_2(t) = x_1(t)\left(x_1'(t)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u + \frac{W(t)}{x_1(t)}\right) - x_1'(t)\,x_1(t)\int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u = W(t) \neq 0.$$

■

EXERCICE 79. — On considère l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad \left(t^2 + t\right)x''(t) + (t-1)\,x'(t) - x(t) = 0 \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(]1, +\infty[, \mathbf{R})\right].$$

1. Déterminer une solution polynomiale x_1 solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ sur $]1, +\infty[$.
2. Donner une solution x_2 de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ sur $]1, +\infty[$ linéairement indépendante de x_1.
3. Déterminer l'ensemble solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ sur $]1, +\infty[$.

□

4. MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES

HYPOTHÈSE. — Nous connaissons un système fondamental (x_1, x_2) de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$. Par exemple, x_1 pourra être obtenue en cherchant une solution développable en série entière de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ sur I, avant de déterminer x_2, en appliquant la méthode de variation de la constante ou la méthode du Wronskien. Ainsi :

$$\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H}) = \left\{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \,:\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2\right\}.$$

OBJECTIF. — Chercher une solution particulière de $(\mathscr{E})$, en faisant varier les constantes dans la description de $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H})$ précédente, i.e. déterminer une solution particulière x_{part} de $(\mathscr{E})$ de la forme :

$$x_{\mathrm{part}} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \;\left|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t) \end{array}\right.$$

avec $\lambda_1 : I \longrightarrow \mathbf{K}$ et $\lambda_2 : I \longrightarrow \mathbf{K}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

> Cette approche naïve ne permet pas d'aboutir. Il faut ajouter une condition supplémentaire, que nous appellerons « condition (+) ».

> **PROPOSITION 80 (MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES POUR UNE SOLUTION PARTICULIÈRE). —** *Soient deux fonctions :*
>
> $$\lambda_1 : I \longrightarrow \mathbf{K} \qquad \textit{et} \qquad \lambda_2 : I \longrightarrow \mathbf{K}$$
>
> *de classe $\mathscr{C}^2$. Alors :*
>
> $$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0 & \textit{[condition (+)]} \\ \textit{la fonction } \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \textit{ est solution de } (\mathscr{E}) & \end{array}\right.$$
>
> *ce qui livre une méthode pour déterminer une solution particulière de $(\mathscr{E})$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$.

(a) Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1' \, x_1 + \lambda_2' \, x_2 = 0 \\ \lambda_1 \, x_1 + \lambda_2 \, x_2 \text{ solution de } (\mathscr{E}) \end{cases}$$

si et seulement si, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} \lambda_1' \, t) \, x_1(t) + \lambda_2'(t) \, x_2(t) & = & 0 \\ \underbrace{\lambda_1'(t) \, x_1'(t) + \lambda_1(t) \, x_1''(t) + \lambda_1'(t) \, x_1'(t) + \lambda_2(t) \, x_2''(t)}_{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)''(t)} & = & a_0(t) \underbrace{(\lambda_1(t) \, x_1(t) + \lambda_2(t) \, x_2(t))}_{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t)} \\ & & + a_1(t) \underbrace{\left(\lambda_1'(t) \, x_1(t) + \lambda_1(t) \, x_1'(t)\right)}_{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)'(t)} \\ & & + b(t). \end{cases}$$

Comme les fonctions x_1 et x_2 sont solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$, ceci équivaut à, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) \, x_1(t) & + & \lambda_2'(t) \, x_2(t) & = & 0 \\ \lambda_1'(t) \, x_1'(t) & + & \lambda_1'(t) \, x_1'(t) & = & b(t). \end{cases}$$

(b) Soit $t \in I$. La matrice $\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ a pour déterminant $W(t) \neq 0$ (lemme 75). Elle est donc inversible et son inverse est :

$$\frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} x_2'(t) & -x_2(t) \\ -x_1'(t) & x_1(t) \end{pmatrix}.$$

(c) De (b) et (c), nous déduisons que :

$$\begin{cases} \lambda_1' \, x_1 + \lambda_2' \, x_2 = 0 \\ \lambda_1 \, x_1 + \lambda_2 \, x_2 \text{ solution de } (\mathscr{E}) \end{cases}$$

si et seulement si, pour tout $t \in I$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} x_2'(t) & -x_2(t) \\ -x_1'(t) & x_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

qui équivaut à, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) & = & -\dfrac{x_2(t) b(t)}{W(t)} \\ \lambda_2'(t) & = & \dfrac{x_1(t) b(t)}{W(t)} \end{cases}$$

Comme les fonctions :

$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & -\dfrac{x_2(t) b(t)}{W(t)} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \dfrac{x_1(t) b(t)}{W(t)} \end{array} \right.$$

sont continues sur I. Le théorème fondamental de l'analyse nous livre l'existence de primitives pour chacune d'elles sur I.

(d) Si :

- λ_1 est une primitive de la fonction $t \longmapsto -\dfrac{x_2(t) b(t)}{W(t)}$ sur I :
- λ_2 est une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{x_1(t) b(t)}{W(t)}$ sur I.

alors la fonction :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda_1(t) x_1(t) + \lambda_2(t) x_2(t) \end{array} \right.$$

est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I.

■

***Remarque 81 (de la condition (+)).* —** La condition (+) dans l'énoncé de la proposition 80 apparaît naturellement lorsque qu'on ramène l'étude de l'EDL2 $(\mathscr{E})$ à un SDL1 $(\mathscr{S})$ (proposition 17) et que l'on applique la méthode de variation des constantes (proposition 38) pour déterminer une solution particulière de $(\mathscr{S})$. ■

EXERCICE 82 (RÉSOLUTION GUIDÉE D'UNE EDLS2 HOMOGÈNE). —

1. Soient

$$x_1 \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\ln(t)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_2 \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \cos(\ln(t)) \end{array} \right. .$$

Justifier que x_1 et x_2 sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, calculer $x_1'(t), x_1''(t), x_2'(t), x_2''(t)$, pour tout $t>0$,

2. Vérifier que les fonctions x_1 et x_2 sont solutions de l'EDLS2 homogène :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad t^3\,x'' + t^2\,x' + t\,x = 0 \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(]0,+\infty[,\mathbf{R})\right]$$

puis résoudre $(\mathscr{E}\mathscr{H})$.

□

EXERCICE 83 (RÉSOLUTION GUIDÉE D'UNE EDLS2). — On considère l'EDLS2 :

$$(\mathscr{E}) \qquad (2x+1)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8\,y = 1 \qquad \left[\text{inconnue } y \in \mathscr{C}^2\left(\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[,\mathbf{R}\right)\right]$$

et son EDLS2 homogène associée :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad (2x+1)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8\,y = 0 \qquad \left[\text{inconnue } y \in \mathscr{C}^2\left(\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[,\mathbf{R}\right)\right]$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbf{R}$ pour que la fonction :

$$y_1 \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

soit solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

2. Déterminer $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E}\mathscr{H})$.
3. Déterminer $\mathrm{Sol}\,(\mathscr{E})$.

□

EXERCICE 84 (INTERSECTION DE COURBES INTÉGRALES D'UNE EDLS2 HOMOGÈNE ET DE L'AXE DES ABSCISSES). — Soient I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$, et $(a_0,a_1) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})^2$. On considère l'EDLS2 homogène :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0 \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(I,\mathbf{K})\right]$$

et (x_1,x_2) un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$. Est-il possible que les fonctions x_1 et x_2 s'annulent un même $t_0 \in I$? □

EXERCICE 85 (RÉSOLUTION GUIDÉE D'UNE EDLS2). — Résoudre l'EDLS2 :

$$(\mathscr{E}) \qquad (t^2+1)\,x'' - 2\,x = t \qquad \left[\text{inconnue } x \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})\right]$$

On pourra commencer par étudier les solutions polynomiales. □

EXERCICE 86 (RÉSOLUTION GUIDÉE D'UNE EDLS2 À COEFFICIENTS CONSTANTS). — On considère l'EDLS2 à coefficients constants :

$$(\mathscr{E}) \qquad y'' + y = \sin^4(t) \qquad \left[\text{inconnue } y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})\right].$$

Résoudre $(\mathscr{E})$ en utilisant la méthode de variation des constantes. □

EXERCICE 87 (ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE EDLS2 HOMOGÈNE). — Soit $q \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. Considérons l'EDLS2 homogène :

$$(\mathscr{E}\mathscr{H}) \qquad y'' + q(t)\,y = 0 \qquad \left[\text{inconnue } y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})\right].$$

1. Soit y une solution de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$. Supposons y bornée.
   (a) Démontrer que y' admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Démontrer que $y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
2. Soit z une deuxième solution bornée de $(\mathscr{E}\mathscr{H})$. Démontrer que la fonction :

$$W \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

est constante.

3. En déduire que $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ possède une solution non bornée.

□