Fonctions à valeurs vectorielles

Chapitre 16

par David Blottière, le 22 février 2024 à 04h35

Sommaire

NOTATION. — Dans tout ce chapitre :

- I désigne un intervalle non vide de $\mathbf{R}$;
- $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$;
- E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$;
- $\|\cdot\|$ est une norme sur E ;
- $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E ;
- $\left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ est la base duale de $\underline{e}$, de sorte que :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) \cdot e_i \qquad \left[e_i^*(x) \text{ est la } i\text{-ième coordonnée de } x \text{ dans la base } \underline{e}\right].$$

§ 1. DÉRIVABILITÉ EN UN POINT

DÉFINITION 1 (DÉRIVABILITÉ EN UN POINT). — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

(a) *On dit que f est dérivable en a s'il existe $\ell \in E$ tel que :*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \to a]{} \ell.$$

(b) *Si ce vecteur ℓ existe, il est unique. On le note $f'(a)$ et on le nomme vecteur dérivé de f en a.*

***Remarque 2 (interprétation cinématique).* —** Nous conservons les notations de la précédente définition. Si la fonction f donne la position d'un objet en fonction du temps, alors sa dérivée est le vecteur vitesse. ■

***Remarque 3 (indépendance vis-à-vis de la norme choisie).* —** Comme toutes les normes sont équivalentes sur E, les notions de dérivabilité et de vecteur dérivé ne dépendent par de la norme choisie sur E. ■

DÉFINITION 4 (NOTATION O DE LANDAU). — *Soient $a \in I$, $\varphi \in \mathbf{R}^I$ et $(f, g) \in E^I \times E^I$. On suppose qu'il existe un voisinage épointé de a dans I sur lequel la fonction φ ne s'annule pas.*

(a) *On dit que le vecteur $f(t)$ de E est un o de $\varphi(t)$ au voisinage de a, et on écrit $f(t) \underset{t \to a}{=} \mathrm{o}\left(\varphi(t)\right)$, si :*

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} \xrightarrow[t \to a]{} 0_E \quad \text{ou de manière équivalente si} \quad \left\| \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\|_E \xrightarrow[t \to a]{} 0_{\mathbf{R}}.$$

(b) *On écrit $f(t) \underset{t \to a}{=} g(t) + \mathrm{o}\left(\varphi(t)\right)$, si $f(t) - g(t) \underset{t \to a}{=} \mathrm{o}\left(\varphi(t)\right)$, i.e. si :*

$$\frac{f(t) - g(t)}{\varphi(t)} \xrightarrow[t \to a]{} 0_E \quad \text{ou de manière équivalente si} \quad \left\| \frac{f(t) - g(t)}{\varphi(t)} \right\|_E \xrightarrow[t \to a]{} 0_{\mathbf{R}}.$$

PROPOSITION 5 (DÉRIVABILITÉ, VECTEUR DÉRIVÉ ET DL À L'ORDRE 1). — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

1 *Si la fonction f est dérivable en a, alors f possède le développement limité à l'ordre 1 en a suivant :*

$$f(t) \underset{t \to a}{=} f(a) + (t - a) \cdot f'(a) + \mathrm{o}(t - a).$$

2 *Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, i.e. s'il existe $u \in E$ tel que :*

$$f(t) \underset{t \to a}{=} f(a) + (t - a) \cdot u + \mathrm{o}(t - a)$$

alors f est dérivable en a et $f'(a) = u$.

PROPOSITION 6 (DÉRIVABILITÉ IMPLIQUE CONTINUITÉ). — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$. Alors :*

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est continue en } a\,.$$

THÉORÈME 7 (DÉRIVABILITÉ ET DÉRIVÉE VIA LES FONCTIONS COORDONNÉES). — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$. Alors :*

1. *f est dérivable en a si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction $e_i^* \circ f \in \mathbf{R}^I$ est dérivable en a ;*
2. *si f est dérivable en a, alors :*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i^* \circ f\right)'(a) \cdot e_i.$$

☞ Si $f \in E^I$ est dérivable en $a \in I$, alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$e_i^*\left(f'(a)\right) = \left(e_i^* \circ f\right)'(a) \qquad \left[i\text{-ème coordonnée de } f'(a) \text{ dans la base } \underline{e}\right].$$

EXERCICE 8. — Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(t^3 - t^2 + 1, t^4 + 7t\right). \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, f est dérivable en a et calculer $f'(a)$. □

EXERCICE 9. — Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, f est dérivable en a et calculer $f'(a)$. □

DÉFINITION 10 (DÉRIVABILITÉ EN UN POINT À DROITE ET À GAUCHE). — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

(a) *On dit que f est dérivable en a à droite s'il existe $\delta \in E$ tel que :*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \to a^+]{} \delta.$$

Si ce vecteur δ existe, il est unique. On le note $f_d'(a)$ et on le nomme vecteur dérivé à droite de f en a.

(b) *On dit que f est dérivable en a à gauche s'il existe $\lambda \in E$ tel que :*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \to a^-]{} \lambda.$$

Si ce vecteur λ existe, il est unique. On le note $f_g'(a)$ et on le nomme vecteur dérivé à gauche de f en a.

§ 2. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

DÉFINITION 11 (FONCTION DÉRIVABLE SUR UN INTERVALLE ET FONCTION DÉRIVÉE). — *Une fonction $f \in E^I$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Si tel est le cas, sa fonction dérivée, notée f', est définie par :*

$$f' \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(e_i^* \circ f\right)'(t) \cdot e_i \end{array} \right. \qquad [\textit{cf. théorème 7}].$$

Notation. — L'ensemble des fonctions de I dans E, dérivables sur I est noté $\mathscr{D}(I,E)$, i.e. :

$$\mathscr{D}(I,E) := \left\{ f \in E^I \ : \ f \text{ est dérivable sur } I \right\}.$$

Proposition 12 (combinaison linéaire de fonctions dérivables). —

1. *$\mathscr{D}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de E^I.*
2. *L'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(I,E) & \longrightarrow & E^I \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est linéaire.

Proposition 13 (composition d'une fonction dérivable par une application linéaire). — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors pour tout fonction $f \in \mathscr{D}(I,E)$, $L \circ f \in \mathscr{D}(I,F)$ et :*

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Exercice 14. — Soient $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{D}(I,\mathbf{R})^n$ et $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & P \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et exprimer, pour tout $t \in I$, $g'(t)$ en fonction de $f_1'(t), \ldots, f_n'(t)$ et P. □

Proposition 15 (composition de fonctions dérivables par une application bilinéaire). — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$, $(G, ||\cdot||_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $B \colon E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. et $f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $g \in \mathscr{D}(I,F)$. Alors l'application $B(f,g)$ définie par :*

$$B(f,g) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad B(f,g)'(t) = B\big(f'(t), g(t)\big) + B\big(f(t), g'(t)\big).$$

Exemple 16 (dérivée et produit scalaire). — Supposons E muni d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et considérons $\big(f,g\big) \in \mathscr{D}(I,E)^2$. Alors l'application :

$$\langle f, g \rangle \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \langle f(t), g(t) \rangle \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

■

Exercice 17. — Supposons E muni d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et notons $||\cdot||_2$ la norme associée. Soit $f \in \mathscr{D}(I,E)$ telle que :

$$\forall t \in I, \qquad \big|\big| f(t) \big|\big|_E = 1$$

En d'autres termes, f prend ses valeurs sur la sphère unité de $(E, ||\cdot||_2)$. Démontrer que, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. □

Proposition 18 (composition de fonctions dérivables par une application multilinéaire). — *Soient $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right), \ldots, \left(E_n, \|\cdot\|_{E_n}\right), (G, \|\cdot\|_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie,*

$$M\colon E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$$

une application n-linéaire, et $f_1 \in \mathscr{D}(I, E_1), \ldots, f_n \in \mathscr{D}(I, E_n)$. Alors l'application $M(f_1, \ldots, f_n)$ définie par :

$$M(f_1, \ldots, f_n) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\left(f_1(t), \ldots, f_n(t)\right) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$:

$$M(f_1, \ldots, f_n)'(t) = M\left(f_1'(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)\right) + M\left(f_1(t), f_2'(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)\right) + \ldots + M\left(f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n'(t)\right).$$

Exemple 19 (dérivée et déterminant). — Soit une application :

$$f \left| \begin{array}{ccll} I & \longrightarrow & & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & f(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = (C_1(t), \ldots, C_n(t)) & \left[\text{uplet des vecteurs colonnes de la matrice } f(t)\right] \end{array} \right.$$

dérivable sur I. Alors l'application :

$$\det(f) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(f(t)) = \det\left(\left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \det\left(C_1(t), \ldots, C_n(t)\right) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$:

$$\det(f)'(t) = \det\left(C_1'(t), C_2(t), C_3(t), \ldots, C_n(t)\right) + \det\left(C_1(t), C_2'(t), C_3(t), \ldots, C_n(t)\right) + \ldots + \det\left(C_1(t), C_2(t), C_3(t), \ldots, C_n'(t)\right).$$

■

Exercice 20. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_1 + x & x & \ldots & \ldots & x \\ x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ x & \ldots & \ldots & x & a_n + x \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 21. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Considérons une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(I_n + t\,A). \end{array} \right.$$

Démontrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $\varphi'(0)$.

□

Proposition 22 (composition d'applications dérivables). — *Soient $f \in \mathscr{D}(I, E)$, J un intervalle de $\mathbf{R}$, et $\varphi \in \mathscr{D}(J, \mathbf{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors l'application $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et*

$$\forall\, t \in J, \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t)).$$

Démonstration. — (a) Notons tout d'abord que nous connaissons le résultat si $E = \mathbf{R}$, d'après le cours de MP2I, cf. composée de deux fonctions dérivables de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$.
(b) Comme :

$$\forall\, t \in J, \quad f \circ \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \circ f \circ \varphi(t) \cdot e_i$$

nous savons que $f \circ \varphi$ est dérivable sur J si et seulement si, pour tout $t \in J$, $e_i^* \circ f \circ \varphi \in \mathscr{D}(J, \mathbf{R})$ (théorème 7).

(c) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $\varphi \in \mathscr{D}(J,\mathbf{R})$ et $e_i^* \circ f \in \mathscr{D}(I,\mathbf{R})$ ($f \in \mathscr{D}(I,E)$ et théorème 7) nous savons (cf. composée de deux fonctions dérivables de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$) que la fonction :

$$\left(e_i^* \circ f\right) \circ \varphi = e_i^* \circ f \circ \varphi$$

est dérivable sur J et que, pour tout $t \in J$

$$(\star) \qquad \forall\, t \in J, \quad \left(e_i^* \circ f \circ \varphi\right)'(t) = \varphi'(t) \times \left(e_i^* \circ f\right)'(\varphi(t)) = \varphi'(t) \times e_i^*\left(f'(\varphi(t)\right) \qquad \text{[théorème 7]}.$$

La fonction $f \circ \varphi$ est donc dérivable sur J.

(d) De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
(f\circ\varphi)'(t) &= \sum_{i=1}^{n} (e_i^* \circ f \circ \varphi)'(t) \cdot e_i \qquad \text{[théorème 7]}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi'(t) \times e_i^*\left(f'(\varphi(t))\right)\right) \cdot e_i \qquad [(\star)]\\
&= \varphi'(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(e_i^*\left(f'(\varphi(t))\right)\right) \cdot e_i\right)\\
&= \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t).
\end{aligned}$$

■

§ 3. FONCTIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^k$

DÉFINITION 23 (FONCTION DE CLASSE $\mathscr{C}^k$). — *Soit $f \in E^I$.*

(a) *L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.*

(b) *Soit un entier $k \geqslant 2$. L'application f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I.*

(c) *L'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.*

NOTATION. — Pour tout $k \in [\![1,+\infty]\!]$, on pose :

$$\mathscr{C}^k(I,E) := \left\{f \in E^I \;:\; f \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } I\right\}.$$

et pour tout $f \in \mathscr{C}^k(I,E)$, on pose :

$$f^{(2)} = \left(f'\right)' \quad , \quad f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)' \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(\ell+1)} = \left(f^{(\ell)}\right)' \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'.$$

PROPOSITION 24 (CARACTÈRE $\mathscr{C}^k$ VIA LES FONCTIONS COORDONNÉES). — *Soient $f \in E^I$ et $k \in [\![1,+\infty]\!]$.*

1. *f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^* \circ f \in \mathbf{R}^I$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

2. *Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors :*

$$\forall\, \ell \in [\![1,k]\!], \quad \forall\, t \in I, \quad f^{(\ell)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i^* \circ f\right)^{(\ell)}(t) \cdot e_i.$$

☞ Si $f \in \mathscr{C}^k(I,E)$, $\ell \in [\![1,k]\!]$ et $t \in I$, alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$e_i^*\left(f^{(\ell)}(t)\right) = \left(e_i^* \circ f\right)^{(\ell)}(t) \qquad \left[i\text{-ème coordonnée de } f^{(\ell)}(t) \text{ dans la base } \underline{e}\right].$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$, en s'appuyant sur le théorème 7. □

Exercice 25. — Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\sin(t)+\sin(2t))\,,\,-2\cos(t)-\cos(2t)) \end{array} \right.$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,2\pi]$ et calculer sa dérivée seconde. □

Proposition 26 (espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$). — *Pour tout $k \in [\![1,+\infty]\!]$, l'ensemble $\mathscr{C}^k(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de E^I.*

Proposition 27 (formule de Leibniz). — *Soient $(F,||\cdot||_F)$, $(G,||\cdot||_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $B\colon E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $k \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathscr{C}^k(I,E)$ et $g \in \mathscr{C}^k(I,F)$, où $k \in \mathbf{N}^*$. L'application :*

$$B(f,g) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t),g(t)\big) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\forall\, t \in I, \quad B(f,g)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t)\right).$$

Démonstration. — Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $k \in \mathbf{N}^*$.
Initialisation à $n=1$. Il s'agit précisément du résultat de la proposition 15.
Hérédité. Supposons le résultat vrai pour un $k \in \mathbf{N}^*$ fixé et démontrons qu'il est encore vrai pour $k+1$. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^{k+1}(I,E)\times\mathscr{C}^{k+1}(I,F)$. Alors, comme $(f,g) \in \mathscr{C}^k(I,E)\times\mathscr{C}^k(I,F)$, l'hypothèse de récurrence assure que $B(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$(\star) \qquad \forall\, t \in I, \quad B(f,g)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t)\right).$$

Soit $i \in [\![0,k]\!]$. Les fonctions $f^{(i)}$ et $g^{(k-i)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. D'après la proposition 15, la fonction $B\left(f^{(i)}, g^{(k-i)}\right)$ est donc également de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
La fonction $\left[B(f,g)\right]^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi $B(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I.
Grâce à $(\star)$ et à la proposition 15, nous calculons, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
B(f,g)^{(k+1)}(t) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left[B\left(f^{(i+1)}(t), g^{(k-i)}(t)\right) + B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k}{j-1} \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \qquad \text{[coefficients binomiaux étendus]} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right) \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \qquad \text{[relation de Pascal]}\,.
\end{aligned}$$

■

§ 4. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Notation. — $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbf{R}$ $(a<b)$.

Définition 28 (fonction continue par morceaux sur une segment). — *Une fonction $f \in E^{[a,b]}$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision :*

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_p = b$$

du segment $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$.

Proposition 29 (continuité par morceaux via les fonctions coordonnées). — *Une fonction $f \in E^{[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction $e_i^* \circ f \in \mathbf{R}^{[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Proposition 30 (structure de l'ensemble des fonctions continues par morceaux). — *L'ensemble :*

$$\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],E) := \left\{ f \in E^{[a,b]} \ : \ f \text{ est continue par morceaux sur } [a,b] \right\}$$

un sous-espace vectoriel de $E^{[a,b]}$.

Remarque 31 (restriction d'une fonction continue par morceaux). — Soient c, d des éléments de $[a,b]$ tels que $c < d$. et $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],E)$. Alors :

$$f_{|[c,d]} \left| \begin{array}{ccc} [c,d] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[c,d]$. ■

§ 5. Intégration sur un segment

Notation. — $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbf{R}$ ($a < b$).

Lemme 32 (clé pour la définition de l'intégrale). — *Soient $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],E)$, $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E et $\left(u_1^*, \ldots, u_n^*\right)$ sa base duale. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \circ f(t) \, \mathrm{d}t \right) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b u_i^* \circ f(t) \, \mathrm{d}t \right) \cdot u_i$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b e_i^* \circ f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u_i^* \circ f(t) \, \mathrm{d}t$ sont les intégrales des fonctions $e_i^* \circ f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$ et $u_i^* \circ f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$, construites en MP2I.

Démonstration. — Nous démontrons l'égalité entre :

$$I_{\underline{e}}(f) := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \circ f(t) \, \mathrm{d}t \right) \cdot e_i \qquad \text{et} \qquad I_{\underline{u}}(f) := \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b u_j^* \circ f(t) \, \mathrm{d}t \right) \cdot u_j.$$

$$\begin{aligned} I_{\underline{e}}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^*(f(t)) \, \mathrm{d}t \right) \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^*(f(t)) \cdot u_j \right) \mathrm{d}t \right) \cdot e_i \qquad [\text{décomposition de } f(t) \text{ dans la base } \underline{u}] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^*(f(t)) \times e_i^*(u_j) \right) \mathrm{d}t \right) \cdot e_i \qquad [\text{linéarité de } e_i^*]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(e_i^*(u_j) \times \int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \cdot e_i \qquad [\text{linéarité de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles}]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \times e_i^*(u_j) \right) \cdot e_i$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u_j) \cdot e_j \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b u_j^*(f(t)) \,\mathrm{d}t \right) \cdot u_j \qquad [\text{décomposition de } u_j \text{ dans la base } \underline{e}]$$
$$= I_{\underline{u}}(f)$$

■

DÉFINITION 33 (INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX). — *Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],E)$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le vecteur de E défini par :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t \right) \cdot e_i$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale de la fonction $e_i^* \circ f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$, construite en MP2I.

☞ Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],E)$, alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$e_i^*\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left[i\text{-ème coordonnée de } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ dans la base } \underline{e} \right].$$

Remarque 34 (caractère intrinsèque de la définition de l'intégrale). — D'après le lemme 32, la définition 33 de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans E est indépendante de la base de E choisie.

■

EXERCICE 35. — Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{4-t^2}, \dfrac{1}{1+t^2} \right). \end{array} \right.$$

Calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. □

THÉORÈME 36 (SOMMES DE RIEMANN). — *Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],E)$. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, posons :*

$$S_N^g(f) := \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N} \right) \qquad \textit{et} \qquad S_N^d(f) := \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N} \right).$$

Alors :

$$S_N^g(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad S_N^d(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION. — Nous démontrons le résultat pour la suite $\left(S_N^g(f)\right)_{N\in\mathbf{N}^*}$ des sommes de Riemann à gauche.
(a) Notons tout d'abord que nous connaissons le résultat pour $E = \mathbf{R}$, d'après le cours de MP2I.

(b) Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_N^g &= \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \\
&= \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right)\right) \cdot e_i && \left[\text{décomposition de } f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \text{ dans la base } \underline{e}\right] \\
&= \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} e_i^* \circ f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \cdot e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} \cdot e_i^* \circ f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right)\right) \cdot e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_N^g\left(e_i^* \circ f\right) \cdot e_i.
\end{aligned}$$

(c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $e_i^* \circ f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbf{R})$, nous savons que :

$$S_N^g\left(e_i^* \circ f\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t \qquad [\text{cours de MP2I}].$$

(d) L'application :

$$N_{\underline{e}} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \max\left\{\left|e_i^*(x)\right| \,:\, [\![1,n]\!]\right\} \end{array}\right.$$

est une norme (norme produit relativement à la base $\underline{e}$). De plus, si $(x_N)_{N\in\mathbf{N}^*} \in E^{\mathbf{N}^*}$ et $x \in E$:

$$x_N \xrightarrow[N\to+\infty]{N_{\underline{e}}} x \iff \left(\forall\, i \in [\![1,n]\!],\quad e_i^*(x_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathbf{R}} e_i^*(x)\right).$$

(e) De (b), (c) et (d), nous déduisons :

$$S_N^g = \sum_{i=1}^{n} S_N^g\left(e_i^* \circ f\right) \cdot e_i \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot e_i = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

THÉORÈME 37 (PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX). —

1. **Linéarité.** *L'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], E) & \longrightarrow & R \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est linéaire.

2. **Relation de Chasles.**

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], E), \quad \forall\, c \in [a,b], \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. **Composée par une application linéaire.** *Soit $(F, ||\cdot||_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour tout $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], E)$, $L \circ f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], F)$ et :*

$$L\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b L \circ f(t)\,\mathrm{d}t$$

4. **Inégalité triangulaire.** *Soit $||\cdot||$ une norme quelconque sur E. Alors l'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left|\left|f(t)\right|\right| \end{array}\right.$$

est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\left|\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\right| \leqslant \int_a^b \left|\left|f(t)\right|\right|\,\mathrm{d}t.$$

§ 6. Intégrale fonction de sa borne supérieure

Lemme 38 (critère pour qu'une fonction dérivable soit constante). — *Soit $f \in \mathscr{D}(I, E)$ telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) = 0_E$. Alors la fonction f est constante sur l'intervalle I.*

Théorème 39 (fondamental de l'analyse). — *Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$ et $a \in I$. L'application :*

$$F_a \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique fonction de I dans E telle que :

1. *la fonction F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;*
2. *$F_a' = f$;*
3. *$F_a(a) = 0_E$.*

Théorème 40 (intégration par parties). — *Soient $(F\,||\cdot||_F)$, $(G\,||\cdot||_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $B\colon E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire et $(f, g) \in \mathscr{C}^1([a, b], E) \times \mathscr{C}^1([a, b], F)$. Alors :*

$$\int_a^b B(f'(t), g(t))\,\mathrm{d}t = \big[B(f(t), g(t))\big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b B(f(t), g'(t))\,\mathrm{d}t$$

où $\big[B(f(t), g(t))\big]_{t=a}^{t=b} := B(f(b), g(b)) - B(f(a), g(a))$.

Théorème 41 (inégalité des accroissements finis). — *Soit $f \in \mathscr{C}^1([a, b], E)$. Alors :*

$$||f(b) - f(a)||_E \leqslant (b-a) \times ||f'||_\infty.$$

L'égalité accroissements finis n'est pas nécessairement valable pour les fonctions à valeurs vectorielles. En effet, l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = i\,e^{it}$ est de module 1. Il n'existe donc aucun point $c \in]0, 2\pi[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = 0.$$

Exercice 42. — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, E)$ telle que f' est bornée sur $\mathbf{R}$. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne. □

§ 7. Formules de Taylor

Théorème 43 (formule de Taylor avec reste intégral). — *Soient $p \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{p+1}(I, E)$. Alors :*

$$\forall\,(a, x) \in I^2, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{p} (x-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \cdot f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{=:R_n(f,a,x)}.$$

Le vecteur $R_n(f, a, x)$ de E est appelé reste intégral.

Corollaire 44 (inégalité de Taylor-Lagrange). — *Soient $p \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{p+1}(I, E)$ telle que :*

$$\exists M \in \mathbf{R}_+, \quad \forall t \in I, \quad \left|\left| f^{p+1}(t) \right|\right| \leqslant M.$$

Alors :

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad \underbrace{\left|\left| f(x) - \left(\sum_{k=0}^{p} (x-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \right) \right|\right|}_{=\left|\left| R_n(f, a, x) \right|\right|} \leqslant M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 45 (une inégalité de Kolmogorov). — Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, E)$ telle que les fonctions f et f'' soient bornées. On pose :

$$M_0 := \left|\left| f \right|\right|_\infty \qquad \text{et} \qquad M_2 := \left|\left| f'' \right|\right|_\infty.$$

1. Démontrer que :

$$\forall (x, h) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*, \quad \left|\left| f'(x) \right|\right| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

2. Qu'en déduire pour f' ?
3. Démontrer :

$$\left|\left| f' \right|\right|_\infty =: M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

□

Corollaire 46 (formule de Taylor-Young). — *Soient $p \in \mathbf{N}$, $f \in \mathscr{C}^p(I, E)$ et $a \in I$. Alors :*

$$f(t) \underset{t \to a}{=} \sum_{k=0}^{p} (t-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \mathrm{o}\left((t-a)^p\right).$$