Probabilités

par David Blottière, le 15 février 2024 à 08h14

Chapitre 15

Sommaire

§ 1. Ensembles finis

1. Définitions d'un ensemble fini et du cardinal d'un tel

Théorème 1 (injection, surjection, bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$). — *Soient n et m deux entiers naturels non nuls.*

1. *S'il existe une application injective $f\colon [\![1,n]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$, alors $n \leqslant m$.*
2. *S'il existe une application surjective $f\colon [\![1,n]\!] \twoheadrightarrow [\![1,m]\!]$, alors $n \geqslant m$.*
3. *S'il existe une application bijective $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$, alors $n = m$.*

Démonstration. — (1) On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}^*$ que le prédicat

$$\mathscr{P}(n) \;\Big|\; « \forall\, m \in \mathbf{N}^*,\ \left(\exists\, f\colon [\![1,n]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]\right) \Longrightarrow n \leqslant m »$$

est vrai.
(1a) Initialisation à $n = 1$. Clair.
(1b) Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $f\colon [\![1,n+1]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$.

- L'entier naturel non nul m n'est pas égal à 1. En effet, si $m = 1$ alors $f(1) = f(n+1) = 1$, ce qui, comme $1 \neq n+1$, contredit l'injectivité de f. Ainsi $m - 1 \geqslant 1$.
- Supposons que $f(n+1) = m$. Alors l'application

$$\overline{f} \;\left|\; \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,m-1]\!] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$$

  est bien définie et est injective, comme restriction et corestriction de l'application injective f. D'après $\mathscr{P}(n)$, $n \leqslant m-1$ et donc $n+1 \leqslant m$.
- Supposons que $f(n+1) \neq m$. Considérons la transposition $\tau_{f(n+1),m}\colon [\![1,m]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$ qui envoie $f(n+1)$ sur m, m sur $f(n+1)$ et qui fixe tous les autres éléments de $[\![1,m]\!]$. On observe que l'application $g := \tau_{f(n+1),m} \circ f\colon [\![1,n+1]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$ est injective (composée d'applications injectives) et vérifie $g(n+1) = m$. On est alors ramené au cas précédent, qui livre $n+1 \leqslant m$.

(2) S'il existe une surjection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,m]\!]$, alors il existe une injection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Le résultat se déduit donc de 1.
(3) Conséquence de 1 et 2. ■

Définition 2 (ensemble fini). — *Un ensemble E est fini s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes.*

1. *$E = \varnothing$*
2. *Il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et une bijection $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$.*

Définition 3 (cardinal d'un fini). —
Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est le nombre entier noté $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$ défini par :

$$|E| := \begin{cases} 0 & \text{si } E = \varnothing \\ n & \text{s'il existe un entier } n \in \mathbf{N}^* \text{ et une bijection } f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E. \end{cases}$$

***Remarque 4.* —** D'après le théorème 1, le cardinal d'un ensemble fini non vide est bien défini. ■

***Exemple 5.* —** Si $n \in \mathbf{N}^*$, alors $[\![1,n]\!]$ est fini et $|[\![1,n]\!]| = 1$. En effet, l'application $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\colon [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ est bijective. ■

***Exemple 6.* —** Si E est un singleton alors E est fini et $|E| = 1$. En effet, si a désigne l'unique élément de E alors l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} [\![1,1]\!] = \{1\} & \longrightarrow & E \\ 1 & \longmapsto & a \end{array}\right.$$

est bijective.

■

PROPOSITION 7 (ÉQUIPOTENCE ET FINITUDE). — *Soit E un ensemble fini non vide et $\varphi \colon E \xrightarrow{\sim} F$ une application bijective de E vers un autre ensemble F. Alors F est fini et $|F| = |E|$.*

DÉMONSTRATION. — Comme E est un ensemble fini non vide, il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une application bijective $f \colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$. D'après l'application $\varphi \circ f \colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} F$ est bijective (composée d'applications bijectives). D'après les définitions 2 et 3, F est fini et $|F| = n = |E|$. ■

EXERCICE 8. — Démontrer que l'ensemble $E := \{n \in [\![2,200]\!] \ : \ n \text{ est pair}\}$ est fini et préciser son cardinal. □

EXERCICE 9. — Soient a et b des entiers relatifs tels que $a \leqslant b$. Démontrer que l'ensemble $[\![a,b]\!]$ est fini que :

$$\mathrm{Card}\,([\![a,b]\!]) = b - a + 1.$$

□

2. PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

THÉORÈME 10 (PARTIES DE $[\![1,n]\!]$). — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit A une partie de $[\![1,n]\!]$.*

1. *Si $A \neq [\![1,n]\!]$ alors l'ensemble A est fini et $|A| < n$.*
2. *Si $|A| = n$, alors $A = [\![1,n]\!]$.*

DÉMONSTRATION. — (1) On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}^*$ que le prédicat

$$\mathscr{P}(n) \ \Big| \ \text{« } \forall A \in \mathscr{P}([\![1,n]\!]),\ A \subsetneq [\![1,n]\!] \Longrightarrow A \text{ est finie et } |A| < n \text{ »}$$

est vrai.
(1a) Initialisation à $n = 1$. L'ensemble vide est la seule partie de $[\![1,1]\!] = \{1\}$ distincte de $\{1\}$. Comme $\varnothing$ est fini de cardinal $0 < 1$, l'assertion $\mathscr{P}(1)$ établie.
(1b) Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Ceci implique que toute partie X de $[\![1,n]\!]$ est finie de cardinal $|X| \leqslant n$. En effet, si $X \neq [\![1,n]\!]$ il s'agit d'une conséquence de $\mathscr{P}(n)$. Sinon $X = [\![1,n]\!]$ et le résultat découle de 5.
Soit A une partie de $[\![1,n+1]\!]$ dictincte de $[\![1,n+1]\!]$.

- Si $A = \varnothing$ alors A est fini et $|A| = 0 < n+1$.
- Supposons désormais que A est non vide.
  — Si $n+1 \notin A$, alors A est une partie de $[\![1,n]\!]$. Donc A est fini et $|A| \leqslant n < n+1$.
  — Supposons à présent que $n+1 \in A$. Comme $A \neq [\![1,n+1]\!]$, il existe $a \in [\![1,n]\!]$ tel que $a \notin A$. Introduisons la partie $B := (A \setminus \{n+1\}) \sqcup \{a\}$ de $[\![1,n]\!]$. Ainsi B est finie, de cardinal $|B| \leqslant n$. Si $x \in B$ et $y \in A$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq a \\ n+1 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \neq n+1 \\ a & \text{si } y = n+1 \end{cases}$$

d'où deux applications $f \colon B \longrightarrow A$ et $g \colon A \longrightarrow B$ qui sont bien définies. On vérifie $f \circ g = \mathrm{id}_A$ et $g \circ f = \mathrm{id}_B$. L'application f est donc bijective. D'après la proposition 7, A est fini et $|A| = |B| \leqslant n < n+1$.

(2) Conséquence de 1.

■

COROLLAIRE 11 (PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI). — *Soit E une ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$. Soit A une partie de E.*

1. *Si $A \neq E$, alors l'ensemble A est fini de cardinal $|A| < n$.*
2. *Si $|A| = n$ alors $A = E$.*

DÉMONSTRATION. — (1) Comme E est fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une bijection $f : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} E$. Supposons donc que A est une partie distincte de E. Considérons la partie $B := \{x \in [\![1, n]\!] \ : \ f(x) \in A\}$ de $[\![1, n]\!]$.

- L'ensemble B est distinct de $[\![1, n]\!]$. En effet, $B = [\![1, n]\!]$ implique $A = E$ d'après la surjectivité de f.
- Comme B est une partie de $[\![1, n]\!]$ distincte de $[\![1, n]\!]$, B est fini et $|B| < n$ d'après 10.
- L'application

$$g \left| \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

  est bien définie. La bijectivité de f implique celle de g. D'après le point précédent et 7, A est fini et $|A| = |B| < n$.

(2) Conséquence de 1.

■

EXERCICE 12 (PRINCIPE DES TIROIRS). — Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E. Démontrer que :

$$|A| + |B| > |E| \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset.$$

□

3. RÉUNION DISJOINTE D'ENSEMBLES FINIS

THÉORÈME 13 (RÉUNION DISJOINTE DE DEUX ENSEMBLES FINIS). — *Soit A et B deux parties finies disjointes ($A \cap B = \emptyset$) d'un ensemble fini E.*

L'ensemble $A \sqcup B$ est fini et :

$$|A \sqcup B| = |A| + |B| \ .$$

DÉMONSTRATION. — Si $A = \emptyset$, alors $A \sqcup B = B$ et l'assertion est claire puisque $|A| = 0$. Par symétrie des rôles joués par A et B, l'assertion est vraie dans le cas où $B = \emptyset$. Supposons désormais que A et B sont non vides.
Comme A et B sont finies et non vides, il existe $(a, b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ et deux applications bijectives

$$f : [\![1, a]\!] \xrightarrow{\sim} A \quad \text{et} \quad g : [\![1, b]\!] \xrightarrow{\sim} B \,.$$

L'application

$$h \left| \begin{array}{ccc} [\![1, a+b]\!] & \longrightarrow & A \sqcup B \\ n & \longmapsto & \begin{cases} f(n) & \text{si } n \leqslant a \\ g(n-a) & \text{si } n > a \end{cases} \end{array} \right.$$

est bien définie.

- Soit $(n_1, n_2) \in [\![1, a+b]\!]^2$ tel que $h(n_1) = h(n_2) \in A \sqcup B$.
  - Supposons $h(n_1) = h(n_2) \in A$. Alors comme $A \cap B = \emptyset$, $n_1 \leqslant a$ et $n_2 \leqslant a$ et donc $h(n_1) = f(n_1)$ et $h(n_2) = f(n_2)$. Comme f est injective, $n_1 = n_2$.
  - Supposons $h(n_1) = h(n_2) \in B$ Alors comme $A \cap B = \emptyset$, $n_1 > a$ et $n_2 > a$ et donc $h(n_1) = g(n_1 - a)$ et $h(n_2) = g(n_2 - a)$. Comme g est injective, $n_1 - a = n_2 - a$ et donc $n_1 = n_2$.

  L'application h est injective.
- Soit $y \in A \sqcup B$.
  - Si $y \in A$, alors $f^{-1}(y) \in [\![1, a]\!]$ et donc $h\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.
  - Si $y \in B$, alors $g^{-1}(y) \in [\![1, b]\!]$ et donc $a + g^{-1}(y) \in [\![a+1, a+b]\!]$. Ainsi $h\left(a + g^{-1}(y)\right) = g\left(g^{-1}(y)\right) = y$.

  L'application h est surjective.

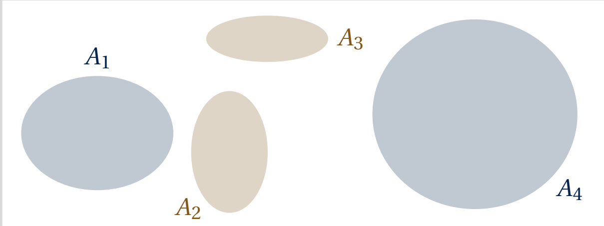
Comme l'application h est bijective, la proposition 7 livre la finitude de l'ensemble $A \sqcup B$ et $|A \cup B| = a + b = |A| + |B|$.

■

COROLLAIRE 14 (RÉUNION DISJOINTE D'UN NOMBRE FINI D'ENSEMBLES FINIS). — *Soient $p \geqslant 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des parties finies deux-à-deux disjointes d'un ensemble fini E.*

L'ensemble $\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k$ est fini et :

$$\left|\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k\right| = \sum_{k=1}^{p} |A_k| \; .$$



DÉMONSTRATION. — On raisonne par récurrence sur l'entier $p \geqslant 2$.

(a) Initialisation à $p = 2$. Pour $p = 2$, l'assertion est celle du théorème 13.

(b) Hérédité. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1}$ des parties finies deux-à-deux disjointes de E. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k$ est fini. Comme les ensembles $\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k$ et A_{p+1} sont finis et disjoints, le théorème 13 livre la finitude de l'ensemble $\bigsqcup_{k=1}^{p+1} A_k = \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k\right) \sqcup A_{p+1}$ et $\left|\bigsqcup_{k=1}^{p+1} A_k\right| = \left|\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k\right| + \left|A_{p+1}\right|$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\left|\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k\right| = \sum_{k=1}^{p} |A_k|$. Nous en déduisons $\left|\bigsqcup_{k=1}^{p+1} A_k\right| = \sum_{k=1}^{p+1} |A_k|$. ■

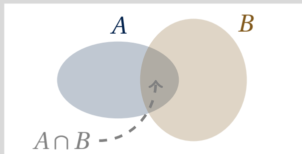
Remarque 15. **—** Le cas d'une réunion finie de parties finies non nécessairement deux-à-deux disjointes d'un ensemble E sera discuté plus loin, cf. proposition 16 et exercice 17. ■

4. RÉUNION D'ENSEMBLES FINIS

PROPOSITION 16 (RÉUNION DE DEUX ENSEMBLES FINIS). — *Soient A et B deux parties finies d'un ensemble fini E.*

L'ensemble $A \cup B$ est fini et :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \; .$$



DÉMONSTRATION. — On décompose les ensembles A, B et $A \cup B$ en réunions disjointes comme suit.

(i) $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus A \cap B)$

(ii) $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A \cap B)$

(iii) $A \cup B = (A \setminus A \cap B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A \cap B)$

Comme $A \setminus A \cap B$ et $A \cap B$ sont des parties de l'ensemble fini A, $A \setminus A \cap B$ et $A \cap B$ sont des ensembles finis (corollaire 11). Comme $B \setminus A \cap B$ est une partie de l'ensemble fini B, $B \setminus A \cap B$ est un ensemble fini (corollaire 11). D'après le corollaire 14 et (iii), nous savons la finitude de l'ensemble $A \cup B$ et il vient :

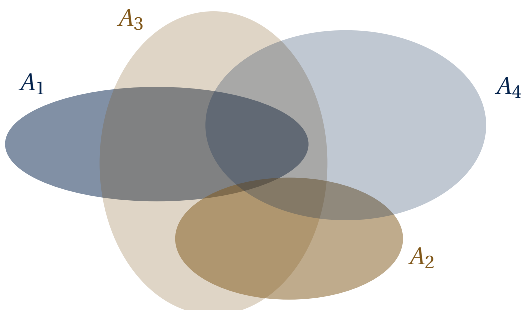
$$|A| \underset{\text{(i)}}{=} |A \cap B| + |A \setminus A \cap B| \qquad |B| \underset{\text{(ii)}}{=} |A \cap B| + |B \setminus A \cap B| \qquad |A \cup B| \underset{\text{(iii)}}{=} |A \setminus A \cap B| + |A \cap B| + |B \setminus A \cap B| \; .$$

En combinant ces trois identités, on obtient celle de la proposition. ■

EXERCICE 17 (FORMULE DU CRIBLE). — Soient $p \geqslant 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des parties finies d'un ensemble fini E.

Démontrer que l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ est fini et :

$$\left|\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| \; .$$



□

5. Produit cartésien d'ensembles finis

Proposition 18 (cardinal du produit cartésien de 2 ensembles finis). — *Soient E_1, E_2 deux ensembles finis non vides. L'ensemble $E_1 \times E_2$ est fini et $|E_1 \times E_2| = |E_1| \times |E_2|$.*

Éléments de démonstration. — Posons $n_1 := |E_1| \in \mathbf{N}^*$ et $n_2 := |E_2| \in \mathbf{N}^*$. Par hypothèse, il existe des bijections $f_1 \colon [\![1, n_1]\!] \xrightarrow{\sim} E_1$ et $f_2 \colon [\![1, n_2]\!] \xrightarrow{\sim} E_2$. Comme

$$[\![1, n_1 n_2]\!] = \bigsqcup_{k=0}^{n_2-1} [\![k n_1 + 1, k n_1 + n_1]\!]$$

pour tout $x \in [\![1, n_1 n_2]\!]$, il existe un unique couple $(a(x), b(x)) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![0, n_2 - 1]\!]$ tel que $x = b(x) n_1 + a(x)$. L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} [\![1, n_1 n_2]\!] & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ x & \longmapsto & \big(f_1(a(x)), f_2((b(x)+1)\big) \end{array} \right.$$

est bien définie. On vérifie qu'elle est bijective. □

Proposition 19 (cardinal du produit cartésien de p ensembles finis). — *Soient $p \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles finis non vides. L'ensemble $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est fini et :*

$$\left| \prod_{i=1}^{p} E_i \right| = \prod_{i=1}^{p} |E_i| .$$

Démonstration. — On démontre l'assertion par récurrence sur $p \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$.

(a) Initialisation à $p = 2$. L'assertion a été établie à la proposition 18.

(b) Hérédité. Soit $p \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ tel que l'assertion est vraie pour un produit cartésien de p ensembles finis non vides. Soient $E_1, \ldots, E_p, E_{p+1}$ des ensembles finis non vides. On note $n_1, \ldots, n_p, n_{p+1}$ les cardinaux respectifs de ces ensembles. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est fini et $\left| \prod_{i=1}^{p} E_i \right| = \prod_{i=1}^{p} n_i$. Il existe donc une bijection

$$f \left| \begin{array}{ccc} [\![1, n_1 \ldots n_p]\!] & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{p} E_i \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) . \end{array} \right.$$

Comme E_{p+1} est fini de cardinal n_{p+1}, il existe une bijection $g \colon [\![1, n_{p+1}]\!] \xrightarrow{\sim} E_{p+1}$. On en déduit que l'application

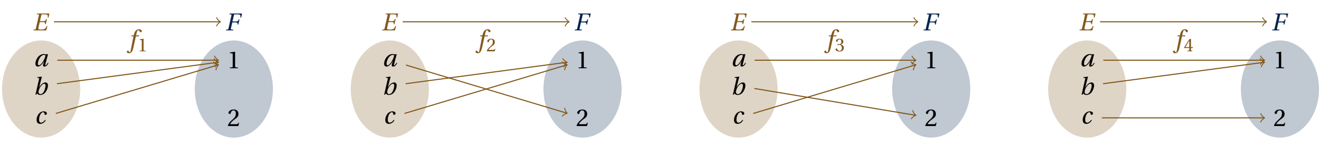
$$h \left| \begin{array}{ccc} [\![1, n_1 \ldots n_p]\!] \times [\![1, n_{p+1}]\!] & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{p+1} E_i \\ (x, y) & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x), g(y)) \end{array} \right.$$

est bijective. D'après la proposition 18, l'ensemble $[\![1, n_1 \ldots n_p]\!] \times [\![1, n_{p+1}]\!]$ est fini de cardinal $\prod_{i=1}^{p+1} n_i$. On conclut alors en appliquant la proposition 7.

■

6. Ensemble des applications entre deux ensembles finis

Exemple 20. — Considérons un ensemble $E = \{a, b, c\}$ de cardinal 3 et un ensemble $F = \{1, 2\}$ de cardinal 2. L'ensemble F^E des applications de E dans F est formé des $2^3 = 8$ éléments ci-dessous.



■

Proposition 21 (nombre d'applications entre deux ensembles finis). — *Soient E et F des ensembles finis non vides. Alors l'ensemble F^E des applications de E vers F est fini et :*

$$\left|F^E\right| = |F|^{|E|}.$$

Démonstration. — On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}^*$ que le prédicat

$\mathscr{P}(n)$ | « Pour tout ensemble fini non vide E de cardinal n, pour tout ensemble fini non vide F, F^E est fini de cardinal $|F|^n$. »

est vrai.

(a) Initialisation à $n = 1$. Soit $E = \{x_0\}$ un ensemble de cardinal 1 et F un ensemble fini non vide. Les applications

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(x_0) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F^E \\ y & \longmapsto & f \left| \begin{array}{ccc} E = \{x_0\} & \longrightarrow & F \\ x_0 & \longmapsto & y. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

sont bien définies et vérifient $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_F$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{F^E}$. L'application Ψ est donc bijective. De la proposition 7 nous déduisons alors que F^E est fini, de cardinal $|F| = |F|^1$. est vrai.

(b) Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient E un ensemble fini de cardinal $n+1$ et F un ensemble fini non vide. On fixe un élement x_0 de E. Comme $E = \{x_0\} \sqcup E \setminus \{x_0\}$, l'ensemble $E \setminus \{x_0\}$ est fini et $|E \setminus \{x_0\}| = |E| - |\{x_0\}| = n$. Les applications

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^{E\setminus\{x_0\}} \times F \\ f & \longmapsto & \left(f_{|E\setminus\{x_0\}}, f(x_0)\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi \left| \begin{array}{ccc} F^{E\setminus\{x_0\}} \times F & \longrightarrow & F^E \\ (g, y) & \longmapsto & f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in E \setminus \{x_0\} \\ y & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

sont bien définies et vérifient $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{F^{E\setminus\{x_0\}} \times F}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{F^E}$. L'application Ψ est donc bijective. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $F^{E\setminus\{x_0\}}$ est fini de cardinal $|F|^n$. D'après la proposition 18, l'ensemble $F^{E\setminus\{x_0\}} \times F$ est fini de cardinal $\left|F^{E\setminus\{x_0\}}\right| \times |F| = |F|^{n+1}$. De la proposition 7 nous déduisons enfin que $\left|F^E\right| = |F|^{n+1}$.

■

Exercice 22 (nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre). — Soient E et F des ensembles finis non vides. On pose $k := |E| \in \mathbf{N}^*$, $n := |F| \in \mathbf{N}^*$ et on introduit

$$\mathrm{Inj}(E, F) := \left\{ f \in F^E \ : \ f \text{ est injective} \right\}.$$

Cet ensemble $\mathrm{Inj}(E, F)$ est fini (car inclus dans F^E) et nous nous proposons de déterminer son cardinal.

1. Démontrer que $\mathrm{Inj}(E, F)$ est vide si $k > n$.
2. On se propose de démontrer que, si $k \leqslant n$, alors $\left|\mathrm{Inj}(E, F)\right| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, en raisonnant par récurrence sur le cardinal k de E. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on introduit le prédicat :

   $\mathscr{P}(k)$ | « Pour tout ensemble fini non vide E de cardinal k, pour tout ensemble fini non vide F de cardinal $n \geqslant k$, $\left|\mathrm{Inj}(E, F)\right| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. »

   (a) Justifier que l'assertion $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   (b) Soit désormais $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soient E un ensemble fini de cardinal $k+1$ et F un ensemble fini de cardinal $n \geqslant k+1$. On fixe un élément x_0 de E. Pour tout $y \in F$, on pose :

   $$I_y := \left\{ f \in \mathrm{Inj}(E, F) \ : \ f(x_0) = y \right\}.$$

   Soit $y \in F$. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, démontrer que $\left|I_y\right| = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}$.

(c) En écrivant $\mathrm{Inj}(E,F)$ à l'aide des ensembles I_y, où $y \in F$, en déduire que $\left|\mathrm{Inj}(E,F)\right| = \dfrac{n!}{(n-k-1)!}$, ce qui prouve $\mathscr{P}(k+1)$.

□

EXERCICE 23 (ARRANGEMENTS). — Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Un k-arrangement de E est un k-uplet $(x_1,\dots,x_k)$ d'éléments de E tel que les $x_1,\dots,x_k$ sont deux-à-deux distincts. Déduire de l'exercice 22 le nombre de k-arrangements d'éléments de E. □

THÉORÈME 24 (CRITÈRE DE BIJECTIVITÉ POUR UNE APPLICATION ENTRE DEUX ENSEMBLES FINIS). — *Soient E et F deux ensemble finis non vides. Soit $f\colon E \longrightarrow F$. Si $|E| = |F|$ alors les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est bijective.*
2. *f est injective.*
3. *f est surjective.*

DÉMONSTRATION. — • Il est clair que (a) implique (b) et (c).
• Démontrons que (b) implique (a). Supposons l'application f injective. Alors l'application

$$\overline{f}\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$$

est bijective. D'après la proposition 7, $\left|f(E)\right| = |E| = |F|$. La partie $f(E)$ de F est finie, de même cardinal que F. D'après le corollaire 11, $f(E) = F$, i.e. f est surjective.
• Démontrons que (c) implique (a). Supposons l'application f surjective. Alors, il existe une application $g\colon F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$. L'application g est injective et, d'après le point précédent, elle est bijective. De $f \circ g = \mathrm{id}_F$, on déduit alors que $f = g^{-1}$ est bijective.

■

PROPOSITION 25 (NOMBRE DE PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE FINI). — *Soit E un ensemble fini non vide. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble de ses permutations, i.e. l'ensemble des bijections de E dans E. L'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ est fini et :*

$$|\mathfrak{S}(E)| = |E|!$$

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème 24, $\mathfrak{S}(E) = \mathrm{Inj}(E,E)$. Le résultat découle alors de l'exercice 22. ■

7. ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

DÉFINITION 26 (ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI). — *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}$.*

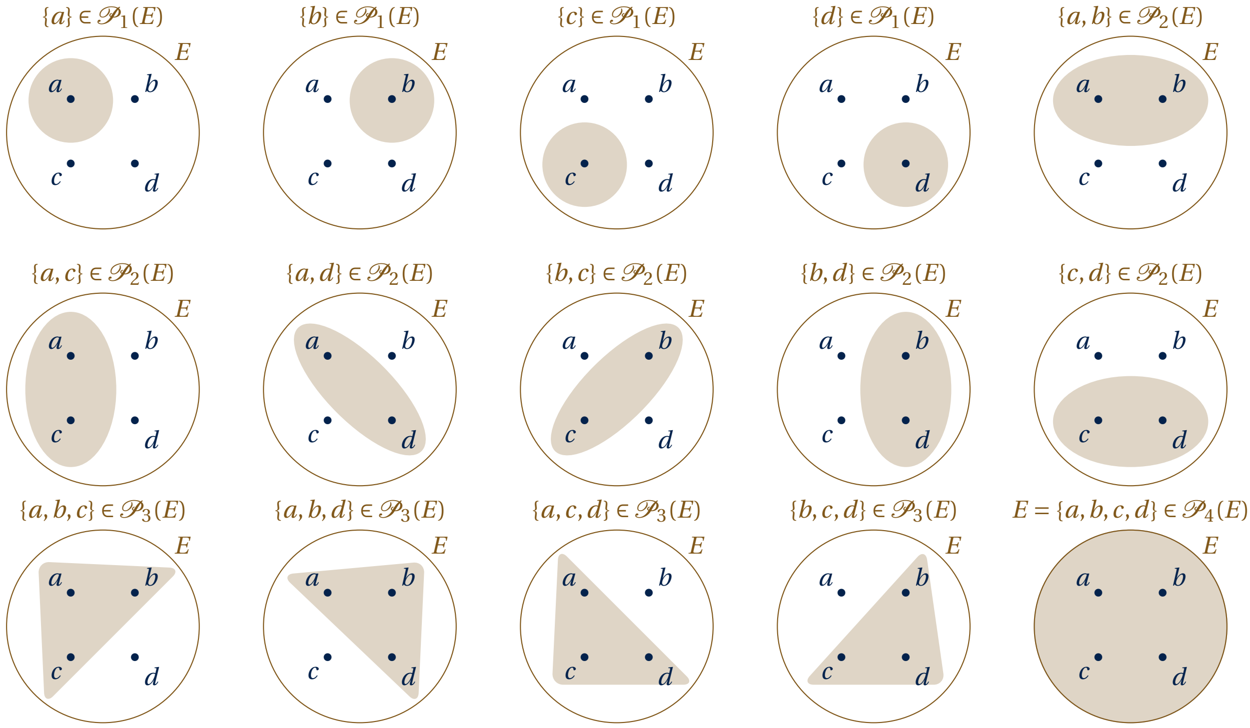
1. *Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k de cardinal k.*
2. *On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.*

***Remarque 27.* —** Si E est un ensemble fini, alors :

$$\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{|E|} \mathscr{P}_k(E).$$

■

***Exemple 28.* —** Soit $E = \{a,b,c,d\}$ un ensemble de cardinal 4. Nous représentons ci-dessous toutes les parties de E non vides.



Ainsi :

(i) $\mathscr{P}_0(E) = \{\varnothing\}$ et $|\mathscr{P}_0(E)| = 1 = \binom{4}{0}$

(ii) $\mathscr{P}_1(E) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ et $|\mathscr{P}_1(E)| = 4 = \binom{4}{1}$

(ii) $\mathscr{P}_2(E) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$ et $|\mathscr{P}_2(E)| = 6 = \binom{4}{2}$

(iv) $\mathscr{P}_3(E) = \{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$ et $|\mathscr{P}_3(E)| = 4 = \binom{4}{3}$

(v) $\mathscr{P}_4(E) = \{\{a,b,c,d\}\}$ et $|\mathscr{P}_4(E)| = 1 = \binom{4}{4}$.

De $\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{4} \mathscr{P}_k(E)$, nous en déduisons :

$$|\mathscr{P}(E)| = \sum_{k=0}^{4} |\mathscr{P}_k(E)| = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^k 1^{4-k} = (1+1)^4 = 2^4 = 16.$$

■

PROPOSITION 29 (NOMBRE DE PARTIES À k ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE). — *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ est fini et :*

$$|\mathscr{P}_k(E)| = \binom{n}{k}.$$

DÉMONSTRATION. — On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}$ que le prédicat

$\mathscr{P}(n)$ | « Pour tout ensemble fini E de cardinal n, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ est fini et $|\mathscr{P}_k(E)| = \binom{n}{k}$. »

est vrai.

(a) Initialisation à $n = 0$. Clair.

(b) Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit E un ensemble de cardinal $n+1$.

- L'ensemble E possède une unique partie à 0 élément, l'ensemble vide. Ainsi $\mathscr{P}_0(E) = \{\varnothing\}$ est fini, de cardinal $1 = \binom{n+1}{0}$.
- L'ensemble E est de cardinal $n+1 \geqslant 1$, donc non vide. Soit x_0 un élement de E fixé. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
  - **(i)** Si on pose $\mathscr{P}_k^{x_0}(E) := \{A \in \mathscr{P}_k(E) \;:\; x_0 \in A\}$ et $\mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E) := \{A \in \mathscr{P}_k(E) \;:\; x_0 \notin A\}$ alors l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ se décompose en $\mathscr{P}_k(E) = \mathscr{P}_k^{x_0}(E) \sqcup \mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E)$.
  - **(ii)** Les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_k^{x_0}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\}) \\ A & \longmapsto & A \setminus \{x_0\} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_k^{x_0}(E) \\ B & \longmapsto & B \sqcup \{x_0\} \end{array} \right.$$

    sont bien définies et vérifient $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{P}_{k-1}(E\setminus\{x_0\})}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}_k^{x_0}(E)}$. L'application g est donc bijective. Comme $E \setminus \{x_0\}$ est fini de cardinal n et $0 \leqslant k-1 \leqslant n$, l'hypothèse de récurrence livre la finitude de l'ensemble $\mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\})$ et $|\mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\})| = \binom{n}{k-1}$. D'après la proposition 7, l'ensemble $\mathscr{P}_k^{x_0}(E)$ est fini de cardinal $\left|\mathscr{P}_k^{x_0}(E)\right| = \binom{n}{k-1}$.
  - **(iii)** On observe que $\mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E) = \mathscr{P}_k(E \setminus \{x_0\})$. Comme $E \setminus \{x_0\}$ est fini de cardinal n et $0 \leqslant k \leqslant n$, l'hypothèse de récurrence livre la finitude de l'ensemble $\mathscr{P}_k(E \setminus \{x_0\}) = \mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E)$ et $\left|\mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E)\right| = \binom{n}{k}$.

  De (i), (ii) et (iii), on déduit que l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ est fini et que $|\mathscr{P}_k(E)| = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

■

Proposition 30 (nombre de parties d'un ensemble). — *Soit E un ensemble fini. Alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et :*

$$|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

Démonstration. — Posons $n := |E|$. On rappelle que $\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$. Avec 29, on en déduit que $\mathscr{P}(E)$ est fini et

$$|\mathscr{P}(E)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n\,.$$

■

Exercice 31 (dérangements). — Si E est un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'ensemble $\mathscr{D}_k(E)$ des permutations de E possédant exactement k points fixes et on pose $d_k(E) := |\mathscr{D}_k(E)|$. On souhaite dénombrer les permutations de E sans point fixe (appelées aussi dérangements de E), i.e. calculer le nombre $d_0(E)$.

1. Soient E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Démontrer $d_k(E) = d_k([\![1, n]\!]) =: d_k(n)$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} d_k(n)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Démontrer $d_k(n) = \binom{n}{k} d_0(n-k)$.
4. En déduire une fonction Python d'argument un entier $n \in \mathbf{N}^*$, qui renvoie la valeur $d_0(n)$, i.e. le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments.

□

8. UNE SYNTHÈSE DES RÉSULTATS SUR LES ENSEMBLES FINIS

(a) Définition d'un ensemble fini. — Un ensemble E est fini si E est vide ou s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une bijection $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$.

(b) Pierre angulaire pour définir le cardinal d'un ensemble fini. — Si $(n,m) \in \mathbf{N}^*$ et s'il existe $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$, alors $n=m$.

(c) Définition du cardinal d'un ensemble fini. — Soit E est un ensemble fini non vide. L'unique nombre $n \in \mathbf{N}^*$ tel qu'il existe une bijection $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$ est appelé cardinal de n et est noté $|E|$. Le cardinal de l'ensemble vide est 0.

(d) Partie d'un ensemble fini. — Soient E un ensemble fini et A une partie de E.

i. L'ensemble A est fini et $|A| \leqslant |E|$.

ii. Si $|A| = |E|$, alors $A = E$.

(e) Union disjointe de parties. — Soient E un ensemble fini et $A_1, \ldots, A_p$ des parties de E deux à deux disjointes. Alors :

$$\left|\bigsqcup_{i=1}^{p} A_i\right| = \sum_{i=1}^{p} |A_i|.$$

(f) Union de deux parties. — Soient E un ensemble fini et A_1, A_2 deux parties de E. Alors :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

(g) Produit cartésien. — Soient $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles finis. Alors $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ est fini et :

$$\left|\prod_{i=1}^{p} E_i\right| = \prod_{i=1}^{p} |E_i|.$$

(h) Ensemble des applications. — Soient E et F des ensembles finis. Alors F^E est fini et :

$$\left|F^E\right| = |F|^{|E|}.$$

(i) Critère de bijectivité. — Soient E, F des ensembles finis de même cardinal et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i. L'application f est injective.

ii. L'application f est surjective.

iii. L'application f est bijective.

(j) Permutations. — Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ des permutations de E est fini et :

$$|\mathfrak{S}(E)| = |E|\,!$$

(k) Ensemble des parties. — Soit E un ensemble fini.

i. Pour tout $k \in [\![0, |E|]\!]$, l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ des parties de E de cardinal k est fini et :

$$|\mathscr{P}_k(E)| = \binom{|E|}{k}.$$

ii. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et :

$$|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

§ 2. Quelques situations classiques de dénombrement

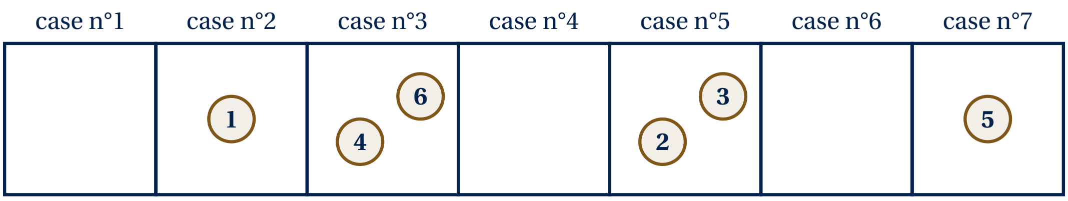
Contexte. — On considère un système formé de :

- p cases numérotées de 1 à p ;
- n objets semblables que l'on pourra distinguer les uns des autres en les numérotant de 1 à n ou non.

On place les objets dans les cases, qui pourront ou non accueillir plus d'un objets.
Après avoir fait le choix des hypothèses, on détermine le nombre de dispositions différentes.

1. Arrangements avec répétition (uplets)

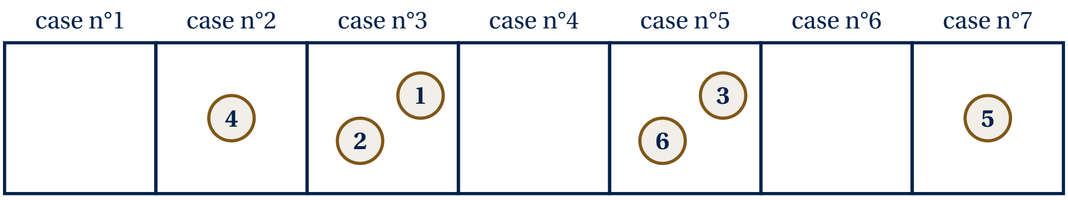
Hypothèses. — Les cases peuvent accueillir **plusieurs objets** et les **objets sont repérés par des numéros**.



Ici $p=7$ et $n=6$. On va associer à cette disposition le 6-uplet suivant :

$$(2,5,5,3,7,3)$$

formé des numéros des cases occupées par des objets repérés par les numéros 1,2,3,4,5,6.



À cette disposition, différente de la précédente, on associe le 6-uplet :

$$(3,3,5,2,7,5).$$

Les différentes dispositions sont associées, de manière bijective, aux :

6-uplets $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$, où x_i est le numéro (entre 1 et 7) de la case où se trouve l'objet numéroté i.

Le nombre des différentes dispositions est donc :

$$\underbrace{p}_{\substack{\text{nombre de choix du}\\ \text{numéro de la case où}\\ \text{se trouve l'objet n°1}}} \times \underbrace{p}_{\substack{\text{nombre de choix du}\\ \text{numéro de la case où}\\ \text{se trouve l'objet n°2}}} \times \cdots \times \underbrace{p}_{\substack{\text{nombre de choix du}\\ \text{numéro de la case où}\\ \text{se trouve l'objet n°}n}} \qquad [n \text{ facteurs}]$$

i.e. :

$$p^n \qquad [\text{nombre d'arrangements avec répétition de } n \text{ objets choisis parmi } p].$$

Chacune des dispositions est associée de manière bijective à une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

Ce modèle présente deux caractéristiques :

ordre et répétitions éventuelles.

2. Arrangements sans répétition (uplets sans répétition)

Hypothèses. — Les cases peuvent accueillir **un objet au maximum** et les **objets sont repérés par des numéros**. Nécessairement $n \leqslant p$.

On identifiera chaque disposition à

un n-uplet sans répétition de n objets choisis parmi p.

Le nombre des différentes dispositions est donc :

$$\underbrace{p}_{\substack{\text{nombre de choix du}\\ \text{numéro de la case où}\\ \text{se trouve l'objet n°1}}} \times \underbrace{p-1}_{\substack{\text{nombre de choix du}\\ \text{numéro de la case où}\\ \text{se trouve l'objet n°2}}} \times \dots \times \underbrace{p-(n-1)}_{\substack{\text{nombre de choix du}\\ \text{numéro de la case où}\\ \text{se trouve l'objet n°}n}} \qquad [n \text{ facteurs}]$$

i.e. :

$$\frac{n!}{(n-p)!} \qquad \left[\text{nombre d'arrangements sans répétition de } n \text{ objets choisis parmi } p\right].$$

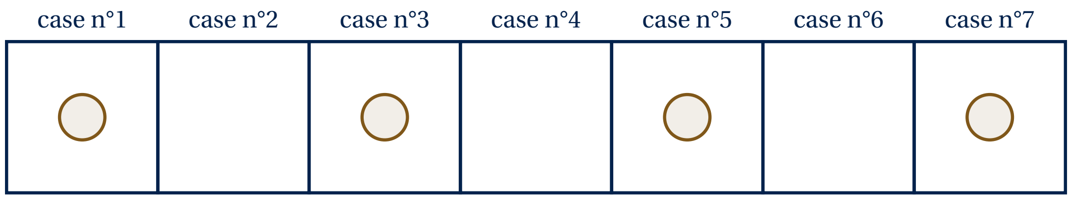
Chacune des dispositions est donc associée de manière bijective à une application injective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

Ce modèle présente deux caractéristiques :

ordre et aucune répétition.

3. Combinaisons

Hypothèses. — Les cases peuvent accueillir **un objet au maximum** et les **objets ne sont pas repérés**. Nécessairement $n \leqslant p$.



Ici $p=7$ et $n=4$. On va associer à cette disposition la partie à 4 éléments :

$$\{1,3,5,7\}$$

formée des numéros des cases qui contiennent un objet.

Les différentes dispositions sont associées, de manière bijective, aux :

parties $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ à 4 éléments de $[\![1,7]\!]$ où x_i apparaît si et seulement si la case n°x_i est occupée.

Le nombre des différentes dispositions est donc :

le nombre de parties à n éléments de l'ensemble $[\![n,p]\!]$

i.e. :

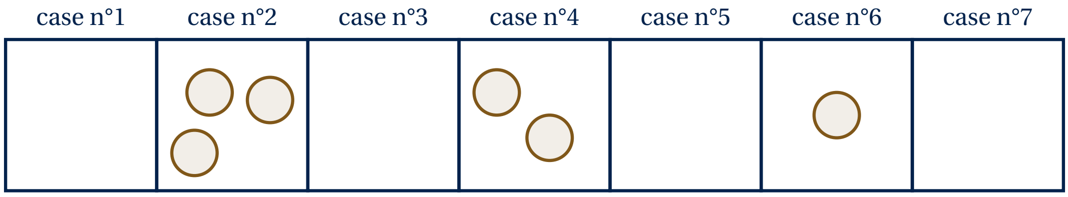
$$\binom{p}{n} \qquad \left[\text{nombre de combinaisons de } n \text{ objets choisis parmi } p\right].$$

Ce modèle présente deux caractéristiques :

absence d'ordre et aucune répétition.

4. COMBINAISONS AVEC RÉPÉTITIONS

HYPOTHÈSES. — Les cases peuvent accueillir **autant d'objets que l'on veut** et les **objets ne sont pas repérés**. Le point clé est de repérer combien d'objets se trouvent dans chacune des cases.



Ici, $n = 6$ et $p = 7$. On associera à cette disposition le 7-uplet :

$$(0,3,0,2,0,1,0)$$

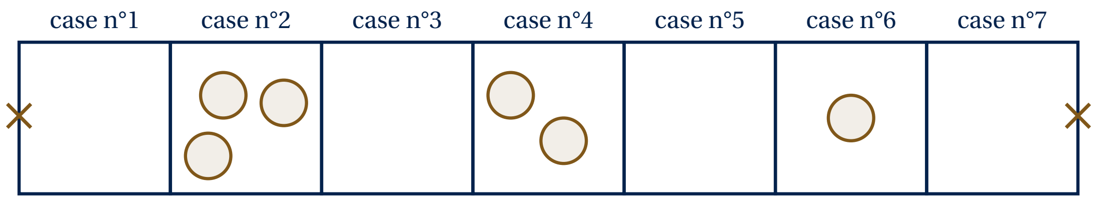
dont la i-ième composante est le nombre d'objets présents dans la case n°i.

Plus généralement, on associera à chaque disposition un p-uplet :

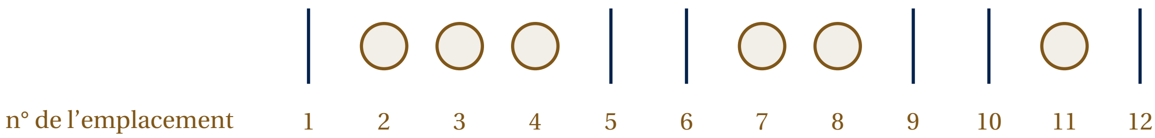
$$(r_1, r_2, \dots, r_p) \in [\![0, n]\!]^p \text{ tel que } \sum_{i=1}^{p} r_i = n \qquad [r_i \text{ est le nombre d'objets présents dans la case n°} i].$$

Pour dénombrer le nombre de dispositions, on s'intéresse aux dispositions relatives des objets par rapport aux cloisons **internes** des cases.

La disposition :



peut se lire :



6 cloisons et 6 objets ont été disposés sur 12 emplacements. Nous pouvons donc représenter cette disposition par la partie :

$$\{2,3,4,7,8,11\}$$

dont les éléments sont les numéros des emplacements des objets.

Plus généralement, une disposition peut être représentée par :

$p-1$ cloisons et n objets disposés sur $n+p-1$ emplacements

et modélisée par :

une partie à $p-1$ éléments de l'ensemble $[\![1, n+p-1]\!]$.

Les éléments d'une telle partie correspondent aux emplacements où se trouvent les cloisons.

Le nombre des différentes dispositions est donc :

le nombre de parties à $p-1$ éléments de l'ensemble $[\![1, n+p-1]\!]$

i.e. :

$$\binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n} \qquad [\text{nombre de combinaisons avec répétition de } n \text{ objets choisis parmi } p].$$

L'identité précédente, entre coefficients binomiaux, reflète une idée importante. Nous avons choisi de marquer les emplacements des cloisons, mais nous aurions pu tout aussi bien noter les emplacements des objets.

Ce modèle présente deux caractéristiques :

absence d'ordre et répétitions éventuelles.

Approche formelle pour dénombrer des combinaisons avec répétitions. — Nous avons dénombré les éléments de l'ensemble :

$$E := \left\{ (r_1, r_2, \ldots, r_p) \in [\![0, n]\!]^p \;:\; \sum_{i=1}^{p} r_i = n \right\}$$

à l'aide du modèle « objets séparés par des cloisons » pour établir $|E| = \binom{n+p-1}{n}$. Nous allons donner une démonstration plus formelle de ce résultat, dans le cas où $p \geqslant 2$, fondée sur la même idée.

Introduisons l'ensemble :

$$S := \left\{ (a_1, \ldots, a_{p-1}) \in [\![1, n+p-1]\!]^{p-1} \;:\; a_0 < a_1 < \ldots < a_{p-1}. \right\}$$

Comme il existe une unique manière de ranger dans l'ordre croissant $p-1$ éléments distincts de $[\![1, n+p-1]\!]$, l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathscr{P}_{p-1}([\![1, n+p-1]\!]) \\ (a_1, \ldots, a_{p-1}) & \longmapsto & \{a_1, \ldots, a_{p-1}\} \end{array} \right.$$

est bijective et donc $|S| = \binom{n+p-1}{n}$.

Considérons les applications :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & S \\ (r_1, r_2, \ldots, r_p) & \longmapsto & \left(r_1+1, r_1+r_2+2, r_1+r_2+r_3+3, \ldots, r_1+r_2+\ldots+r_{p-1}+p-1\right). \end{array} \right.$$

et :

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & E \\ (a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}) & \longmapsto & \left(a_1-1, a_2-a_1-1, a_3-a_2-1, \ldots, a_{p-1}-a_{p-2}-1, n-a_{p-1}+p-1\right). \end{array} \right.$$

Elles sont bien définies et vérifient $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_S$. Donc φ est bijective (il en est de même pour ψ) et $|E| = |S| = \binom{n+p-1}{n}$.

5. Neuf exercices d'entraînement

Exercice 32. — Une urne contient p objets et on fait n tirages successifs, sans remise, de cette urne. On note les numéros des objets sortis, sans tenir compte de l'ordre de sortie.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

Exercice 33. — On envoie n fois de suite une boule dans un ensemble de p cases.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

Exercice 34. — On tire, avec remise, n objets provenant d'une urne en contenant p, sans tenir compte de l'ordre de sortie.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

Exercice 35. — On envoie n fois de suite une boule dans un ensemble de p cases. Les cases ne peuvent accueillir au cours du jeu qu'une boule au plus. On tient compte de l'ordre dans lequel les cases sont occupées.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

Exercice 36. — On lance n fois de suite un dé à 6 faces et on note la suite ordonnée des points marqués sur le dé.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

EXERCICE 37. — On envoie n fois de suite une boule dans un ensemble de p cases. On note les numéros des cases atteintes sas tenir compte de l'ordre dans lesquelles elles ont été atteintes.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

EXERCICE 38. — On envoie n fois de suite une boule dans un ensemble de p cases, une case ne pouvant être atteinte qu'une seule fois au maximum. On ne tient pas compte de l'ordre dans lequel s'est effectué le remplissage.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

EXERCICE 39. — Une urne contient p objets distincts numérotés et on fait n tirages successifs, avec remise, de cette urne. On note les numéros de sortie dans l'ordre de leur sortie.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

EXERCICE 40. — Une urne contient p objets distincts numérotés et on effectue n tirages de suite, sans remise, de cette urne. On numérote les numéros des objets sortis dans l'ordre de leur sortie.

1. Comment modéliser un résultat de cette expérience ?
2. Dénombrer les résultats de cette expérience.

□

§ 3. ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

1. DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITION 41 (ENSEMBLE DÉNOMBRABLE). — *Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection $f : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} E$.*

Remarque 42 (interprétation de la dénombrabilité). — Soit E un ensemble.

1. Si E est dénombrable, l'existence d'une bijection $f : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} E$ nous permet de dresser une liste exhaustive et sans répétition des éléments de E :
$$L \;:\; f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$
L'injectivité de f assure qu'il n'y a pas de répétition dans la liste L. Tous les éléments de E figure dans la liste L, en raison du caractère surjectif de f.
2. Réciproquement, si nous disposons d'une liste exhaustive et sans répétition des éléments de E
$$L \;:\; x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$
alors l'ensemble E est dénombrable puisque l'application :
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array} \right.$$
est bijective. En effet, l'absence de répétition dans la liste L livre le caractère injectif de f. Quant à la surjectivité de f, elle vient du caractère exhaustif de la liste L.

■

Exemple 43 (les ensembles* N *et* N* *sont dénombrables). — Comme les applications

$$\mathrm{id}_{\mathbf{N}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$$

sont bijectives, les ensembles **N** et **N*** sont dénombrables. ■

EXERCICE 44. — Démontrer que l'ensemble solution S de l'équation $3x - 2y = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ est dénombrable. □

2. PARTIES DE N

PROPOSITION 45 (DÉNOMBRABILITÉ D'UNE PARTIE INFINIE DE N). — *Toute partie infinie de* **N** *est dénombrable.*

DÉMONSTRATION. — **(1)** Soit A une partie infinie de **N**. On construit par récurrence forte une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$.
(1a) Initialisation. La partie A de **N** est infinie donc non vide. Par propriété de bon ordre, l'élément $a_0 := \min(A)$ de A est bien défini.
(1b) Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits $a_0, \dots, a_n$ éléments de A. La partie $\{a_0, \dots, a_n\}$ de A n'est pas égale à A puisque A est infini. Ainsi la partie $A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ n'est pas vide. Par propriété de bon ordre, l'élément $a_{n+1} := \min(A \setminus \{a_0, \dots, a_n\})$ de A est bien défini.
(2) Considérons alors l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & a_n\,. \end{array} \right.$$

Elle est bien définie et injective car, par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante d'éléments de A. La surjectivité de f assurera que A est dénombrable.
(3) Soit $x \in A$. Introduisons l'ensemble $I_x := \{n \in \mathbf{N} \,:\, a_n \leqslant x\}$.

- Comme $a_0 = \min(A)$ et $x \in A$, $a_0 \leqslant x$ et donc 0 appartient à I_x, qui est donc non vide.
- Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant a_n$ (cf. lemme pour les suites extraites). Nous en déduisons que $I_x \subset [\![0, x]\!]$.

Des deux points précédents, nous déduisons que l'entier $n := \max(I_x)$ est bien défini par propriété de bon ordre. Comme $n \in I_x$ et $n+1 \notin I_x$, $a_0 < a_1 < \ldots < a_n \leqslant x < a_{n+1}$. Démontrons que $x = a_n = f(n)$ en raisonnant par l'absurde. Si $a_n \neq x$, alors $x \in A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ et donc $x \geqslant a_{n+1} = \min(A \setminus \{a_0, \dots, a_n\})$. Contradiction. ■

Exemple 46 (parties de* N *dénombrables). — D'après la proposition 45 :

1. l'ensemble $\{2n \,:\, n \in \mathbf{N}\}$ des entiers naturels pairs qui est infini
2. l'ensemble $\{2n+1 \,:\, n \in \mathbf{N}\}$ des entiers naturels impairs qui est infini
3. l'ensemble des nombres premiers qui est infini (Euclide)

sont dénombrables. ■

TERMINOLOGIE. — Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

PROPOSITION 47 (CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES AU PLUS DÉNOMBRABLES). — *Soit E un ensemble. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *E est au plus dénombrable.*
2. *Il existe une partie A de* **N** *et une bijection $f\colon A \xrightarrow{\sim} E$.*

DÉMONSTRATION. — On considère uniquement le cas où l'ensemble E n'est pas vide.
(a) Supposons E au plus dénombrable. Alors, il existe :

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} [\![1, n]\!]\ (n \in \mathbf{N}^*) & \text{si } E \text{ est fini} \\ \mathbf{N} & \text{si } E \text{ est dénombrable} \end{array} \right.$$

et une application $f\colon A \xrightarrow{\sim} E$ bijective. L'assertion est démontrée.
(b) Supposons qu'il existe une partie A de **N** et une bijection $f\colon A \xrightarrow{\sim} E$.

- Si A est fini, alors il existe une bijection $g\colon [\![1, \mathrm{Card}\,(A)]\!] \xrightarrow{\sim} A$. L'application :

$$f \circ g\colon [\![1, \mathrm{Card}\,(A)]\!] \longrightarrow E$$

est bijective (comme composée d'applications bijectives). L'ensemble E est donc fini.
- Si A est infini, alors il existe une bijection $g\colon \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} A$, d'après la proposition 45. L'application :

$$f \circ g\colon \mathbf{N} \longrightarrow E$$

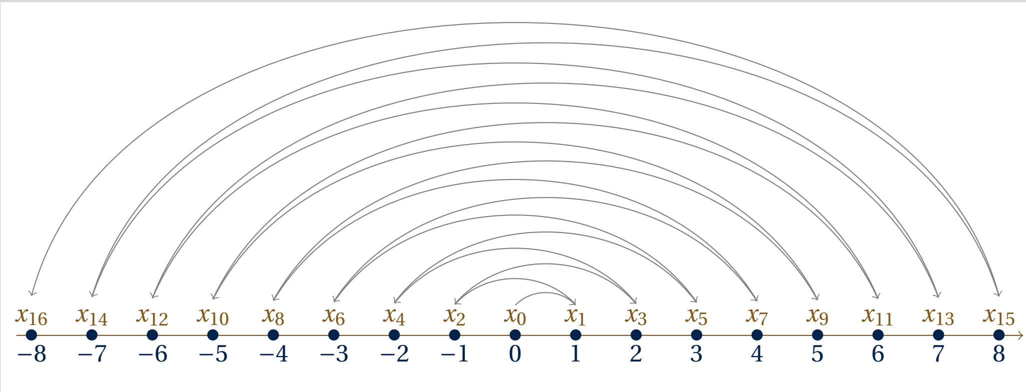
est bijective (comme composée d'applications bijectives). L'ensemble E est donc dénombrable.

■

EXERCICE 48. — Démontrer que l'ensemble E des nombres premiers p tels que $p \equiv 3 \pmod 4$ est dénombrable. □

3. LES ENSEMBLES $\mathbf{Z}$ ET $\mathbf{N}^2$ SONT DÉNOMBRABLES

PROPOSITION 49 (DÉNOMBRABILITÉ DE $\mathbf{Z}$). — *L'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable.*



ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — (1) Principe de la numérotation. On numérote les éléments de $\mathbf{Z}$ en commençant par affecter le numéro 0 à $0 \in \mathbf{Z}$, puis 1 à $1 \in \mathbf{Z}$, puis 2 à $-1 \in \mathbf{Z}$, puis 3 à $2 \in \mathbf{Z}$, puis 4 à $-2 \in \mathbf{Z}$,... en poursuivant indéfiniment ce jeu de « ping-pong ».

(2) Formalisation. On remarque que l'entier relatif portant le numéro n est $-\dfrac{n}{2}$ si n est pair et $\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. On observe également qu'un élément de $n \in \mathbf{Z}$ est numéroté $-2n$ si $n < 0$ et $2n-1$ si $n \geqslant 0$. C'est ainsi qu'apparaissent les applications

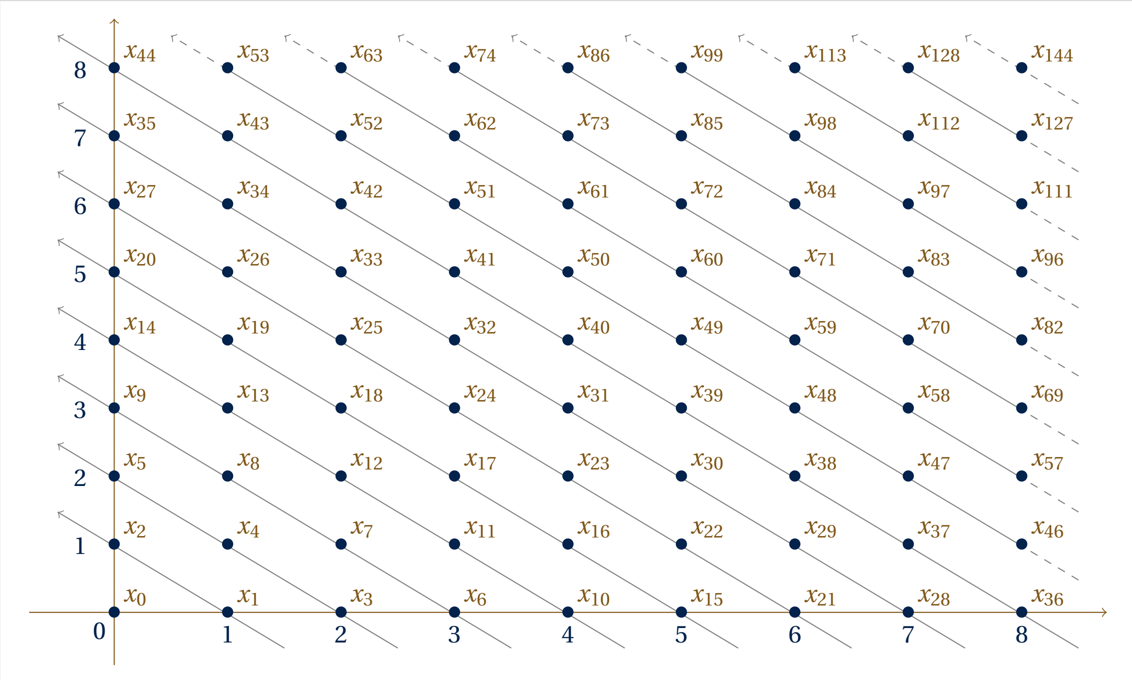
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -2n & \text{si } n \leqslant 0 \\ 2n-1 & \text{si } n > 0\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

Elles sont bien définies et on vérifie que :

- pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(g(n)) = n$, en raisonnant par disjonction de cas suivant le signe de n ;
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g(f(n)) = n$ en raisonnant par disjonction de cas suivant la parité de n.

Comme $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{Z}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$ l'application f est bijective (il en est de même de g). □

PROPOSITION 50 (DÉNOMBRABILITÉ DE $\mathbf{N}^2$). — *L'ensemble $\mathbf{N}^2$ des couples d'entiers naturels est dénombrable.*



ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — **(1)** Principe de la numérotation. On numérote $(0,0)$ à 0, puis on serpente de manière diagonale à travers le réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ dans le plan. Après avoir numéroté tous les éléments d'une diagonale, on reprend la numérotation sur la diagonale suivante, en partant du bas pour remonter.
(2) Formalisation. On commence par observer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k+1$ points du réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ figurent sur la diagonale d'équation $y = -x + k$.
Soit $(a,b) \in \mathbf{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ce point appartient à la droite d'équation $y = -x + a + b$. Sur les diagonales précédentes, $\sum_{k=0}^{a+b-1} (k+1) = \sum_{k=0}^{a+b} k$ points du réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ se sont déjà vus attribuer un numéro. Il faut encore en numéroter $b+1$ sur la diagonale d'équation $y = -x + a + b$ pour atteindre (a,b). Ainsi le point (a,b) sera le $\left(b+1+\sum_{k=0}^{a+b} k\right)$-ième point du réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ recevant un numéro. Comme la numérotation débute à 0, il recevra le numéro $b + \sum_{k=0}^{a+b} k$.
C'est ainsi qu'apparaît l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (a,b) & \longmapsto & b + \sum_{k=0}^{a+b} k = b + \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2}. \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer que cette application est bijective, pour établir le caractère dénombrable de $\mathbf{Z}^2$.
(3) Partition de $\mathbf{N}$. Posons, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$S_p := \sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}.$$

La suite $(S_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers, de premier terme 0. Ceci implique que :

$$(\star) \qquad \mathbf{N} = \bigsqcup_{p \in \mathbf{N}} [\![S_p, S_{p+1} [\![.$$

L'inclusion réciproque et le caractère disjoint sont clairs. Justifions l'inclusion directe. Soit $n \in \mathbf{N}$. On introduit l'ensemble :

$$A := \left\{ p \in \mathbf{N} \,:\, S_p \leqslant n \right\}.$$

Somme $S_0 = 0$, 0 appartient à A, qui est donc non vide. L'ensemble A est de plus fini car :

$$S_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty.$$

L'entier $p := \max(A)$ est donc bien défini. Alors :

$$S_p \leqslant n < S_{p+1}$$

i.e. $n \in [\![S_p, S_{p+1}[\![$.

(4) Surjectivité de f. Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après $(\star)$, il existe un (unique) $p \in \mathbf{N}$ tel que $S_p \leqslant n < S_{p+1}$. Ainsi :

$$0 \leqslant n - S_p < S_{p+1} - S_p = p + 1.$$

Si on pose :

$$b := n - S_p \in [\![0, p]\!] \qquad \text{et} \qquad a := p - b \in \mathbf{N}$$

il vient :

$$n = b + S_p = b + S_{a+b} = b + \sum_{k=0}^{a+b} k = f(a,b).$$

L'application f est surjective.

(5) Injectivité de f. Soient $(a_1, b_1) \in \mathbf{Z}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbf{Z}^2$ tels que :

$$b_1 + S_{a_1+b_1} = f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2) = b_2 + S_{a_2+b_2}.$$

De $(\star)$ et de :

$$S_{a_1+b_1} \leqslant f(a_1,b_1) < S_{a_1+b_1+1} \qquad , \qquad S_{a_2+b_2} \leqslant f(a_2,b_2) < S_{a_2+b_2+1}$$

nous déduisons que $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, puis $b_1 = b_2$ et enfin $a_1 = a_2$. L'application f est injective.

□

4. PRODUIT CARTÉSIEN D'ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

Rappel 51 (pproduit cartésien). — Soient $r \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \dots, X_r$ des ensembles. On rappelle que le produit cartésien des ensembles $X_1, \dots, X_r$ est l'ensemble $\prod_{i=1}^{r} X_i$ formé des r-uplets $(x_1, \dots, x_r)$ tels que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in X_i$. Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on dispose naturellement d'une projection π_j de $\prod_{i=1}^{r} X_i$ sur X_j définie par :

$$\pi_j \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{r} X_i & \longrightarrow & X_j \\ (x_1, \dots, x_r) & \longmapsto & x_j\,. \end{array} \right.$$

Ainsi tout élément $x = (x_1, \dots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} X_i$ s'écrit-il également $(\pi_1(x), \dots, \pi_r(x))$. ■

> **PROPOSITION 52 (PRODUIT CARTÉSIEN D'UN NOMBRE FINI D'ENSEMBLES DÉNOMBRABLES).** — *Soient $r \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \dots, X_r$ des ensembles dénombrables. L'ensemble $\prod_{i=1}^{r} X_i$ est dénombrable.*

DÉMONSTRATION. — On raisonne par récurrence sur l'entier $r \geqslant 1$.

(a) Initialisation à $r = 1$. Clair.

(b) Hérédité. Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Supposons que le produit cartésien de r ensembles dénombrables est dénombrable. Soient $X_1, \dots, X_r, X_{r+1}$ des ensembles dénombrables.

Par hypothèse de récurrence, l'ensemble $\prod_{i=1}^{r} X_i$ est dénombrable. Il existe donc une bijection $f : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} X_i$.

Comme X_{r+1} est dénombrable, il existe également une bijection $g : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} X_{r+1}$.

Considérons les applications :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{r+1} X_i \\ (a,b) & \longmapsto & \big(\pi_1(f(a)), \dots, \pi_r(f(a)), g(b)\big) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{r+1} X_i & \longrightarrow & \mathbf{N}^2 \\ (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}) & \longmapsto & \big(f^{-1}(x_1, \dots, x_r), g^{-1}(x_{r+1})\big)\,. \end{array} \right.$$

Elles sont bien définies et vérifient $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\prod_{i=1}^{r+1} X_i}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbf{N}^2}$. L'application φ est donc bijective.
Si $\theta : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}^2$ désigne une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^2$ (proposition 50), alors :

$$\varphi \circ \theta : \mathbf{N} \longrightarrow \prod_{i=1}^{r+1} X_i$$

est une bijection (composée d'applications bijectives). Ainsi $\prod_{i=1}^{r+1} X_i$ est-il dénombrable. ■

Exemple 53. — D'après les propositions 49 et 52, les ensembles $\mathbf{N}^3$, $\mathbf{Z}^{2022}$ et $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ sont dénombrables. ■

5. Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables

Proposition 54 (réunion au plus dénombrables d'ensembles au plus dénombrables). — *Soient I un ensemble au plus dénombrable et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties au plus dénombrables d'un ensemble E. Alors l'ensemble :*

$$\bigcup_{i\in I} X_i := \{x \in E \,:\, \exists\, i \in I,\ x \in X_i\}$$

est au plus dénombrable.

Démonstration. — D'après la proposition 47 :

- $\exists\, A \in \mathscr{P}(\mathbf{N}), \quad \exists\, f : A \xrightarrow{\sim} I$;
- $\forall\, i \in I, \quad \exists\, B_i \in \mathscr{P}(\mathbf{N}), \quad \exists\, g_i : B_i \xrightarrow{\sim} X_i$.

On introduit les deux projections canoniques :

$$\pi_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (n_1, n_2) & \longmapsto & n_1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \pi_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (n_1, n_2) & \longmapsto & n_2 \end{array} \right.$$

et l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \displaystyle\bigsqcup_{a\in A} \{a\} \times B_{f(a)} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{i\in I} X_i \\ x & \longmapsto & g_{f(\pi_1(x))}(\pi_2(x)) \end{array} \right.$$

de sorte que :

$$\forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B_{f(a)}, \quad \varphi((a,b)) = g_{f(a)}(b).$$

L'application φ est bien définie et surjective. Il existe donc une application injective :

$$\psi : \bigcup_{i\in I} X_i \lhook\joinrel\longrightarrow \bigsqcup_{a\in A} \{a\} \times B_{f(a)} \subset \mathbf{N}^2.$$

Si $\theta : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}^2$ désigne une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^2$ (proposition 50), alors l'application :

$$\rho := \left(\theta^{-1}\right)_{|\bigsqcup_{a\in A}\{a\}\times B_{f(a)}} \circ \psi : \bigcup_{i\in I} X_i \lhook\joinrel\longrightarrow \mathbf{N}$$

est injective (composée d'applications injectives). Nous en déduisons que $\bigcup_{i\in I} X_i$ est en bijection avec la partie de $\mathbf{N}$:

$$\rho\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$$

donc au plus dénombrable (proposition 47). ■

Proposition 55 (l'ensemble Q est dénombrable). — *L'ensemble $\mathbf{Q}$ est dénombrable.*

Démonstration. — **(a)** On peut écrire $\mathbf{Q}$ sous la forme :

$$\mathbf{Q} = \bigcup_{q\in\mathbf{N}^*} \left\{\frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbf{Z}\right\}.$$

(b) L'ensemble $\mathbf{N}^*$ est dénombrable (partie infinie de $\mathbf{N}$).

(c) Soit $q \in \mathbf{N}^*$. Posons $X_q := \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbf{Z} \right\}$. L'application ;

$$f_q \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & X_q \\ p & \longmapsto & \dfrac{p}{q} \end{array} \right.$$

est bijective. Si $\theta : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ désigne une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Z}$ (proposition 49), alors l'application :

$$f_q \circ \theta : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} X_q$$

est une bijection (composée d'applications bijectives). Ainsi X_q est-il dénombrable.

(d) De (a), (b), (c) et de la proposition 54, on déduit que $\mathbf{Q}$ est au plus dénombrable. Comme $\mathbf{Q}$ est infini, $\mathbf{Q}$ est dénombrable. ■

EXERCICE 56 (SUPPORT D'UNE FAMILLE SOMMABLE). — Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable. Le support de la famille $(u_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I$ est la partie $\mathfrak{S}$ de I définie par :

$$\mathfrak{S} := \{ i \in I \,:\, u_i \neq 0 \}.$$

1. Démontrer que l'ensemble $\mathfrak{S}$ est dénombrable. On pourra considérer, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathfrak{S}_p := \left\{ i \in I \,:\, |u_i| \geqslant \frac{1}{p} \right\}.$$

2. Justifier que $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in \mathfrak{S}} u_i$.

□

EXERCICE 57 (UNE DESCRIPTION DES OUVERTS DE R). — Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}$. On définit la relation $\sim$ sur U par :

$$\forall (x, y) \in U^2, \qquad x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\text{il existe un intervalle } I \text{ inclus dans } U \text{ contenant } x \text{ et } y\big).$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur U dont les classes d'équivalences sont les composantes connexes par arcs de U (une partie de $\mathbf{R}$ est connexe par arcs si et seulement si c'est un intervalle). On note $U/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$ sur U, i.e. l'ensemble des composantes connexes par arcs de U.

1. Justfier que :

$$U = \bigsqcup_{C \in U/\sim} C.$$

2. Démontrer que, pour tout $C \in U/\sim$, la composante connexe par arcs C est un intervalle ouvert inclus dans U.
3. Démontrer que, pour tout $x \in U$, il existe $q \in \mathbf{Q} \cap U$ tel que $C(x) = C(q)$.
4. En déduire que $U/\sim$ est au plus dénombrable.
5. Soit X une partie non vide de $\mathbf{R}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   - **(a)** X est une partie ouverte de $\mathbf{R}$.
   - **(b)** X est une réunion disjointe au plus dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbf{R}$.

□

6. QUELQUES ENSEMBLES NON DÉNOMBRABLES

THÉORÈME 58 (CANTOR). — *Soit E un ensemble. Il n'existe aucune bijection de E dans $\mathscr{P}(E)$.*

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une bijection $f : E \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}(E)$, puis considérer la partie $A = \{ x \in E \,:\, x \notin f(x) \}$ de E. □

THÉORÈME 59 (L'ENSEMBLE $[0,1[$ N'EST PAS DÉNOMBRABLE). — *L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.*

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — On procède en plusieurs étapes, en suivant le sujet n°2 du concours CentraleSupélec 2019, filière MP.

1. Pour toute partie A de $\mathbf{N}$, on définit l'application $\mathbf{1}_A$ par :

$$\mathbf{1}_A \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases} \end{array} \right.$$

   On établit que l'application :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array} \right.$$

   est bijective.
2. On démontre que l'application

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & [0,1] \\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{array} \right.$$

   est bien définie et surjective (elle n'est pas injective).
3. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$D_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \,:\, (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\}$$

   $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_n$ et $D^* = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$:

$$\Lambda((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \begin{cases} \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) & \text{si } \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) \in [0,1[\, \setminus D^* \\[2ex] \dfrac{\Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}})}{2} & \text{si } \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ stationnaire à } 1 \\[2ex] \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) \in D^* \text{ et } (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$

   et on prouve que Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sur $[0,1[$.
4. On conclut à l'aide du théorème de Cantor et des points 1 et 3.

□

COROLLAIRE 60 (L'ENSEMBLE R N'EST PAS DÉNOMBRABLE). — *L'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.*

DÉMONSTRATION. — On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une bijection $f : \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}$. Nous en déduisons que l'application :

$$g := f_{|[0,1[}^{|f([0,1[)} \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & f([0,1[) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)$. Comme $f([0,1[)$ est une partie infinie de $\mathbf{N}$, elle est dénombrable. Il existe donc une bijection $h : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} f([0,1[)$. Alors :

$$g^{-1} \circ h : \mathbf{N} \xrightarrow{\sim} [0,1[$$

est une bijection (composée d'applications bijectives). Ainsi $[0,1[$ est-il dénombrable, ce qui n'est pas (proposition 59). ■

EXERCICE 61 (ENSEMBLE DES NOMBRES IRRATIONNELS). — Démontrer que l'ensemble $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas dénombrable. □

EXERCICE 62 (ENSEMBLES DES NOMBRES ALGÉBRIQUES/TRANSCENDANTS). — Un nombre complexe z est dit :

- algébrique s'il existe $P \in \mathbf{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(z) = 0$;
- transcendant sinon.

On pose :

$$\mathscr{A} := \{z \in \mathbf{C} \,:\, z \text{ est algébrique}\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{T} := \{z \in \mathbf{C} \,:\, z \text{ est transcendant}\}.$$

Démontrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ est dénombrable et que l'ensemble $\mathscr{T}$ n'est pas dénombrable. □

§ 4. TRIBU ET ESPACE PROBABILISABLE

DÉFINITION 63 (TRIBU SUR UN ENSEMBLE). — *Soit Ω un ensemble. Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est appelée tribu sur Ω si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

(T1) *$\mathscr{A}$ contient l'ensemble vide, i.e. $\varnothing \in \mathscr{A}$.*

(T2) *$\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire, i.e. pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} := \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$.*

(T3) *$\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable, i.e. pour tout $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbf{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{A}$.*

Exemple 64 (tribu pleine). — Pour tout ensemble Ω, l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée tribu pleine. Il s'agit de la plus grande tribu sur Ω, pour la relation d'ordre donnée par l'inclusion.

■

Exemple 65 (tribu minimale). — Pour tout ensemble Ω, l'ensemble $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée tribu minimal. Il s'agit de la plus petite tribu sur Ω, pour la relation d'ordre donnée par l'inclusion.

■

Exemple 66 (tribu engendrée par une partie). — Soit Ω un ensemble et soit A une partie de Ω. L'ensemble $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée tribu engendrée par A.

■

DÉFINITION 67 (ESPACE PROBABILISABLE). — *Un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé espace probabilisable, si Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω.*

PROPOSITION 68 (PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES D'UNE TRIBU). — *Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur un ensemble Ω.*

1. *$\Omega \in \mathscr{A}$*
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbf{N}}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{A}$.*
3. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{A}$.*
4. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{A}$.*
5. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.*
6. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.*

TERMINOLOGIE. — Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

(a) L'ensemble Ω est appelé univers.

(b) Un élément A de $\mathscr{A}$ est appelé événement.

(c) L'événement $\varnothing$ est appelé événement impossible.

(d) Les événements de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, i.e. les singletons appartenant à $\mathscr{A}$, sont appelés événements élémentaires.

(e) Étant donné un événement A son complémentaire $\overline{A}$ est appelé événement contraire de A.

(f) Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B$ est l'événement impossible, i.e. si $A \cap B = \varnothing$.

EXERCICE 69 (LIMSUP ET LIMINF D'UNE SUITE D'ÉVÉNEMENTS). — Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille d'événements. Démontrer que les deux parties de Ω suivantes :

$$\limsup A_n := \left\{\omega \in \Omega \;:\; \forall n \in \mathbf{N},\, \exists p \geqslant n,\, \omega \in A_p\right\} \qquad \text{et} \qquad \liminf A_n := \left\{\omega \in \Omega \;:\; \exists n \in \mathbf{N},\, \forall p \geqslant n,\, \omega \in A_p\right\}$$

sont des événements. □

Remarque 70 (tribu sur un univers au plus dénombrable). — Si Ω est un ensemble au plus dénombrable alors nous le munirons toujours de la tribu pleine $\mathscr{P}(\Omega)$ pour obtenir l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. ■

Remarque 71 (univers infini). — Nous pouvons penser à l'univers Ω comme à l'ensemble des issues/résultats ω d'une expérience aléatoire. Les éléments A de la tribu peuvent, quant à eux, être pensés comme les « regroupements d'issues » dont on aimerait définir/calculer la probabilité $\mathbf{P}(A)$. Cette année, nous considérerons des expériences aléatoires dont l'ensemble des résultats n'est pas nécessairement fini. Par exemple, dans un jeu de Pile ou Face, nous pourrons étudier le nombre de lancers nécessaires pour avoir un premier Pile. *A priori* l'ensemble Ω des issues possibles est $\mathbf{N}^*$, qui est infini. ■

§ 5. Probabilité et espace probabilisé

DÉFINITION 72 (PROBABILITÉ SUR UN ESPACE PROBABILISABLE). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une application :*

$$\mathbf{P} : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$$

est appelée probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si

(a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

(b) *pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements deux-à-deux incompatibles, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge et :*

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

La propriété (b) se nomme σ-additivité.

DÉFINITION 73 (ESPACE PROBABILISÉ). — *Une espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, où Ω est un ensemble, $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbf{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.*

§ 6. Propriétés d'une probabilité

PROPOSITION 74 (PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES D'UNE PROBABILITÉ). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$

2. *Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des événements deux-à-deux incompatibles, alors :*

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{P}(A_k).$$

3. *Si A est un événement , alors $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$.*

La propriété 2 se nomme additivité.

PROPOSITION 75 (CROISSANCE D'UNE PROBABILITÉ). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

$$\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2, \quad A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B).$$

PROPOSITION 76 (PROBABILITÉ D'UNE RÉUNION FINIE D'ÉVÉNEMENTS). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Si A et B sont des événements, alors :*

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

2. *Soient $n \geqslant 2$ un entier et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors :*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k).$$

THÉORÈME 77 (CONTINUITÉ CROISSANTE/DÉCROISSANTE D'UNE PROBABILITÉ). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion (pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$). Alors :*

$$\mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right).$$

2. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion (pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$). Alors :*

$$\mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right).$$

COROLLAIRE 78 (PROBABILITÉ D'UNE UNION/INTERSECTION DÉNOMBRABLE). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements (sans monotonie particulière).*

1. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k\right)$.
2. $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{k} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbf{N}} A_k\right)$.

PROPOSITION 79 (SOUS-ADDITIVITÉ D'UNE RÉUNION DÉNOMBRABLE D'ÉVÉNEMENTS). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements. Alors :*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n).$$

EXERCICE 80 (INFINITÉ DE LANCERS D'UNE PIÈCE ÉQUILIBRÉE). — Un joueur lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins un Pile ? □

Remarque 81 (construire des espaces probabilisés peut s'avérer délicat). — Nous avons défini un cadre formel pour étudier les probabilités : les espaces probabilisés généraux $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Lorsque nous considérons une expérience aléatoire, comme dans l'exercice 80, et que nous souhaitons calculer des probabilités, nous devons, tout d'abord définir un espace probabilisé. Dans l'exercice 80, il est raisonnable de poser $\Omega := \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbf{N}^*}$ (ensemble infini, non dénombrable). Un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de Ω représentera la liste des résultats obtenus lors de tous ses lancers. Pour un entier $n \in \mathbf{N}^*$, ω_n égalera Pile si le jouer à obtenu Pile au n-lancer et vaudra Face sinon. Il est souhaitable que

(C1) la tribu $\mathscr{A}$ à placer sur Ω contienne, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la partie

$$A_n := \{(\omega_k)_{k\in\mathbf{N}^*} \ : \ \omega_1 = \ldots = \omega_n = \text{Pile}\}$$

de Ω ;

(C2) la probabilité $\mathbf{P}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Mais construire une tribu $\mathscr{A}$ et une probabilité $\mathbf{P}$ satisfaisant les deux conditions précédentes est loin d'être élémentaire (hors programme). C'est pourquoi, nous serons parfois amenés à supposer l'existence d'un espace probabilisé modélisant une expérience aléatoire donnée, sans analyser plus avant la problématique de l'existence. ■

Exercice 82 (lemme de Borel-Cantelli). — Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $B_n := \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$. Démontrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Que dire de la suite $(\mathbf{P}(B_n))_{n\in\mathbf{N}}$?
2. Démontrer que $\mathbf{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Que dire de $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$?
3. Nous considérons l'ensemble A formé des éléments $\omega \in \Omega$ tel qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que $\omega \in A_n$, i.e. :
$$A := \{\omega \in \Omega \,:\, \text{l'ensemble } \{n \in \mathbf{N} : \omega \in A_n\} \text{ est infini}\}.$$
Démontrer que A est un événement, puis que $\mathbf{P}(A) = 0$.

□

§ 7. Événement négligeable et événement presque sûr

Définition 83 (événement négligeable, événement presque sûr). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Un événement A est dit négligeable si $\mathbf{P}(A) = 0$.*
2. *Un événement A est dit presque sûr si $\mathbf{P}(A) = 1$.*

Remarque 84 (reformulation du lemme de Borel-Cantelli). — Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge. Dans l'exercice 82, nous avons démontré que l'événement :

$$A := \{\omega \in \Omega \,:\, \text{l'ensemble } \{n \in \mathbf{N} : \omega \in A_n\} \text{ est infini}\}$$

est négligeable. Donc l'événement :

$$\overline{A} := \{\omega \in \Omega \,:\, \text{l'ensemble } \{n \in \mathbf{N} : \omega \in A_n\} \text{ est fini}\}$$

est presque sûr. ■

Proposition 85 (des événements négligeables et des événements presque sûrs). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements négligeables. Alors l'événement $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est négligeable.*
2. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements presque sûrs. Alors l'événement $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est presque sûr.*

§ 8. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

DÉFINITION 86 (PROBABILITÉ CONDITIONNELLE). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soient B un événement non négligeable et A un événement quelconque. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée :*
$$\mathbf{P}(A \mid B) \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{P}_B(A)$$
est définie par :
$$\mathbf{P}(A \mid B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$
2. *Soient B un événement négligeable et A un événement quelconque. On pose* $\mathbf{P}(A \mid B) := 0$ *par convention.*

PROPOSITION 87 (UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE EST UNE PROBABILITÉ). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Soit B un événement non négligeable. Alors l'application :*
$$\mathbf{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}(A \mid B) \end{array} \right.$$
est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

THÉORÈME 88 (FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soient A, B des événements. Alors*
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B \mid A).$$
2. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors :*
$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbf{P}(A_{n-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \times \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

EXERCICE 89. — Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule de la même couleur. On poursuit indéfiniment le procédé. Montrer qu'une boule rouge sera presque sûrement tirée. □

DÉFINITION 90 (SYSTÈME QUASI-COMPLET D'ÉVÉNEMENTS). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace probabilisable. Une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *d'événements, où I est un ensemble au plus dénombrable, est appelée système d'événements si :*

(a) *les A_i sont deux-à-deux incompatibles, i.e. pour tout* $(i,j) \in I^2$ *tel que* $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ *;*

(b) *la réunion de tous les A_i est un événement presque sûr, i.e.* $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = 1.$

Exemple 91 (système quasi-complet d'événements formé d'un événement et de son contraire). — Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit A un événement. Alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système quasi-complet d'événements. ■

Exemple 92 (système quasi-complet d'événements pour un univers dénombrable). — Soit Ω un ensemble dénombrable, que l'on munit de sa tribu pleine $\mathscr{P}(\Omega)$. Alors $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système quasi-complet d'événements. ■

THÉORÈME 93 (FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un système complet d'événements. Pour tout événement B :*

(a) *la famille* $(\mathbf{P}(B \mid A_i) \times \mathbf{P}(A_i))_{i\in I}$ *est sommable ;*

(b) $\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(B \mid A_i) \times \mathbf{P}(A_i).$

EXERCICE 94. — On lance un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. Si le dé a amené le chiffre k, alors on lance k fois une pièce équilibrée. Quelle la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile ? □

EXERCICE 95. — Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient un 6, il tire une boule de l'urne. Sinon, on ajoute une boule noire dans l'urne et on rejoue à nouveau. Quelle est la probabilité que la boule rouge soit tirée ? □

PROPOSITION 96 (FORMULE DE BAYES). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soient* A, B *des événements, tout deux non négligeables. Alors :*

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(B \mid A) \times \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

2. *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un système quasi-complet d'événements, formé d'événements tous non négligeables. Pour tout événement* B *non négligeable, pour tout* $i \in I$ *:*

$$\mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B \mid A_i) \times \mathbf{P}(A_i)}{\sum_{j\in J} \mathbf{P}\left(B \mid A_j\right) \times \mathbf{P}(A_j)}.$$

EXERCICE 97. — Vous êtes directeur de cabinet du Ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si elle a une réponse positive au test et commenter. □

§ 9. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

DÉFINITION 98 (COUPLES D'ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Deux événements* A, B *sont dits indépendants si :*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B).$$

PROPOSITION 99 (PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES PORTANT SUR L'INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÉNEMENTS). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Soient* A, B *deux événements indépendants, avec* B *non négligeable.*

1. $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$
2. *Les événements* $\overline{A}$ *et* B *sont indépendants.*
3. *Les événements* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *dont indépendants.*

DÉFINITION 100 (ÉVÉNEMENTS MUTUELLEMENT INDÉPENDANTS). — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque d'événements. On dit que les événements* A_i *sont mutuellement indépendants si pour toute partie finie* $J \subset I$ *:*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i).$$

EXERCICE 101 (INDÉPENDANCE DEUX À DEUX VERSUS INDÉPENDANCE MUTUELLE). — On considére l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et les événements A, B, C définis respectivement par

$A :=$ « le premier chiffre est pair » $\quad B :=$ « le deuxiéme chiffre est impair » $\quad C :=$ « la somme des chiffres est paire » .

Démontrer que les événements A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

□

Proposition 102 (événements mutuellement indépendants et événements contraires). — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Pour tout $i \in I$, notons :*

$$A_{i,0} = A_i \qquad \text{et} \qquad A_{i,1} = \overline{A_i}.$$

Pour toute famille $(\varepsilon_i)_{i\in I} \in \{0,1\}^I$, la famille $\left(A_{i,\varepsilon_i}\right)_{i\in I}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

***Remarque 103 (reformulation de la proposition précédente).* —** Si dans une famille d'événements mutuellement indépendants, on remplace certains des événements par leurs événements contraires alors la mutuelle indépendance est préservée. ■

Exercice 104. — On considère une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ lors d'un lancer. On lance indéfiniment cette pièce. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la probabilité d'obtenir Pile pour la première fois au n-ième lancer.

□

§ 10. Espaces probabilisés discrets

Définition 105 (distribution de probabilités). — *Soit Ω un ensemble. Une distribution de probabilités sur Ω est une famille $\left(p_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ d'éléments de $\mathbf{R}_+$ telle que :*

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$$

Proposition 106 (support d'une distribution de probabilités). — *Soient Ω un ensemble et $\left(p_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω. Alors :*

$$\operatorname{supp}\left(p_\omega\right)_{\omega\in\Omega} := \{\omega \in \Omega \,:\, p_\omega > 0\} \qquad [\textit{support de la distribution}]$$

est au plus dénombrable.

Théorème 107 (probabilité associée à une distribution sur un ensemble au plus dénombrable). — *Soient Ω un ensemble au plus dénombrable et $\left(p_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω. Alors :*

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array} \right.$$

est l'unique probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbf{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

Exercice 108 (vers la loi de Poisson). — Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Posons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad p_n := e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

La famille $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable de somme 1. D'après le théorème 107, il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}))$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = p_n$. Calculer $\mathbf{P}(\{2n+1 \,:\, n \in \mathbf{N}\})$ et $\mathbf{P}(\{3n \,:\, n \in \mathbf{N}\})$.

□

Exercice 109 (vers la loi géométrique). — Soit $p \in]0,1[$. Posons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n := p(1-p)^{n-1}.$$

La famille $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable, de somme 1. D'après le théorème 107, il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\mathbf{N}^*, \mathscr{P}(\mathbf{N}^*))$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(\{n\}) = p_n$. Calculer $\mathbf{P}\left(\{2n \,:\, n \in \mathbf{N}^*\}\right)$. □

§ 11. MODÉLISATION D'UNE SUITE INFINIE DE LANCERS DE PIÈCE

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE. — Nous lançons indéfiniment une pièce équilibrée.

MODÉLISATION D'UNE ISSUE. — Nous représentons une issue de cette expérience aléatoire par une suite :

$$(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$$

où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\omega_n := \begin{cases} 1 & \text{si la pièce est retombée sur Face au } n\text{-ème lancer} \\ 0 & \text{si la pièce est retombée sur Pile au } n\text{-ème lancer.} \end{cases}$$

UNIVERS RETENU. — Nous choisissons donc $\Omega := \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ comme univers pour modéliser cette expérience.

INVERSION DU RÉSULTAT OBTENU AU n-IÈME LANCER. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons l'application « inversion du n-ième résultat », notée T_n, par :

$$T_n \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (\omega_1, \omega_2, \ldots) & \longmapsto & (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 1-\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots). \end{array} \right.$$

PROPOSITION 110 (NON EXISTENCE D'UNE PROBABILITÉ SUR $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ INVARIANTE PAR INVERSION). — *Il n'existe pas de probabilité* $\mathbf{P}$ *sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *vérifiant la propriété d'invariance suivante :*

$$(\star) \qquad \forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(T_n(A)) = \mathbf{P}(A)$$

qui reflète pour partie l'indépendance des différents lancers et le caractère équilibré de la pièce.

DÉMONSTRATION. — (a) Introduction d'une relation d'équivalence. Nous définissons une relation d'équivalence sur Ω en posant :

$$\forall \omega = (\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \Omega, \quad \forall \omega' = \left(\omega'_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \Omega, \quad \omega \sim \omega' :\Longleftrightarrow \left(\exists N \in \mathbf{N}^*, \quad \forall n \geqslant N, \quad \omega_n = \omega'_n\right).$$

(b) Choix d'un représentant dans chaque classe. L'application :

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega/\sim \\ \omega & \longmapsto & \overline{\omega} \end{array} \right.$$

est surjective. D'après l'axiome du choix, il existe une application :

$$\sigma : \Omega/\sim \longhookrightarrow \Omega$$

telle que, pour tout $C \in \Omega/\sim$, $\phi(\sigma(C)) = C$. Si on pose $A := \sigma(\Omega/\sim) \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors :

$$\forall C \in \Omega/\sim, \quad \exists! \omega \in A, \quad C = \overline{\omega}.$$

L'ensemble A contient exactement un représentant de chaque classe d'équivalence.
(c) Dénombrabilité de l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}^*$. Notons :

$$\mathscr{P}\mathscr{F}(\mathbf{N}) := \{S \in \mathscr{P}(\mathbf{N}) \ : \ S \text{ est fini}\}.$$

Comme :

$$\mathscr{P}\mathscr{F}(\mathbf{N}) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathscr{P}([\![1,n]\!])$$

l'ensemble $\mathscr{P}\mathscr{F}(\mathbf{N})$ est dénombrable (union dénombrable d'ensembles finis).
(d) Une écriture de Ω comme réunion dénombrable. Les applications d'inversions T_n $(n \in \mathbf{N}^*)$ commutant les unes avec les autres, on peut définir, pour tout $S \in \mathscr{P}\mathscr{F}(\mathbf{N})$:

$$T_S := \prod_{n\in S} T_n \qquad [\text{le produit est le produit de composition}].$$

Nous démontrons que :

$$\Omega := \bigsqcup_{S\in\mathscr{P}\mathscr{F}(\mathbf{N})} T_S(A).$$

- Justifions que $\bigcup_{S\in\mathscr{PF}(\mathbf{N})} T_S(A)\subset\Omega$. Comme pour tout $A\in\mathscr{PF}(\mathbf{N})$, $T_S(A)$ est une partie de Ω, l'inclusion est claire.
- Démontrons que $\Omega\subset\bigcup_{S\in\mathscr{PF}(\mathbf{N})} T_S(A)$. Soit $\omega\in\Omega$. Il existe (un unique) $\omega'\in A$ tel que $\overline{\omega}=\overline{\omega'}$. Par suite $\omega\sim\omega'$. Nous en déduisons que l'ensemble :
$$S':=\{n\in\mathbf{N}^*\ :\ \omega_n\neq\omega'_n\}$$
est fini. Nous observons alors que :
$$\omega=T_{S'}(\omega')\in T_{S'}(A)\subset\bigcup_{S\in\mathscr{PF}(\mathbf{N})} T_S(A).$$
- Démontrons que l'union est disjointe. Soient S et S' deux parties finies de $\mathbf{N}$ telles que $T_S(A)\cap T_{S'}(A)\neq\varnothing$. Il existe donc $(\omega,\omega')\in A^2$ tel que :
$$T_S(\omega)=T_{S'}(\omega').$$
Comme T_S ne modifie qu'un nombre fini de termes de la suite $\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $T_{S'}$ ne modifie qu'un nombre fini de termes de la suite $\omega'=\left(\omega'_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$:
$$\exists\, N\in\mathbf{N},\quad\forall\, n\geqslant N,\quad \omega_n=\omega'_n.$$
Ainsi $\omega\sim\omega'$. Nous en déduisons que $\overline{\omega}=\overline{\omega'}$, puis $\omega=\omega'$ car $(\omega,\omega')\in A^2$.
Comme $T_S(\omega)=T_{S'}(\omega')$, les indices n tels que ω_n est modifié en $1-\omega_n$ par l'action de T_S sont les mêmes que les indices n tels que ω'_n est modifié en $1-\omega'_n$ par l'action de $T_{S'}$. Ainsi $S=S'$.

(e) Vers une contradiction. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbf{P}(\Omega)\\
&= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{S\in\mathscr{PF}(\mathbf{N})} T_S(A)\right) && [\text{(d)}]\\
&= \sum_{S\in\mathscr{PF}(\mathbf{N})}\mathbf{P}(T_S(A)) && [\sigma\text{-additivité de } \mathbf{P}]\\
&= \sum_{S\in\mathscr{PF}(\mathbf{N})}\mathbf{P}(A) && \left[\text{propriété d'invariance de } \mathbf{P} \text{ par inversion, cf. } (\star)\right].
\end{aligned}$$

Que A soit ou non négligeable, nous obtenons une contradiction. ■

MODIFICATION DE LA TRIBU. — Pour corriger le problème soulevé par la précédente proposition, on remplace la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$ par une autre, nécessairement plus petite, mais contenant suffisamment de « parties intéressantes » pour la modélisation de l'expérience aléatoire.
Posons pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:
$$\pi_n\ \left|\ \begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \{0,1\}\\ (\omega_k)_{k\in\mathbf{N}^*} & \longmapsto & \omega_n.\end{array}\right.$$
Notons $\mathscr{A}$ la plus petite tribu sur Ω qui contient :
$$\mathscr{G}:=\left\{\pi_n^{-1}(\{b\})\ :\ (n,b)\in\mathbf{N}^*\times\{0,1\}\right\}$$
que l'on peut construire comme étant l'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant l'ensemble $\mathscr{G}$ (une intersection de tribus sur Ω est une tribu sur Ω). Cette tribu $\mathscr{A}$ est stable par les applications d'inversions T_n ($n\in\mathbf{N}^*$), essentiellement car $\mathscr{G}$ l'est.

DÉFINITION DE LA PROBABILITÉ. — Le théorème d'extension de Kolmogorov (introduit plus tard, mais admis) assure qu'il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur l'espace de probabilisable $(\Omega,\mathscr{A})$ vérifiant :
$$\forall\,(n,b)\in\mathbf{N}^*\times\{0,1\},\quad \mathbf{P}\left(\pi_n^{-1}(\{b\})\right)=\frac{1}{2}.$$
En outre, cette probabilité vérifie l'analogue de la propriété $(\star)$ suivant :
$$\forall\, A\in\mathscr{A},\quad\forall\, n\in\mathbf{N}^*,\quad \mathbf{P}(T_n(A))=\mathbf{P}(A)$$
qui découle essentiellement de l'unicité de la probabilité $\mathbf{P}$.

CONCLUSION. — Nous disposons à présent d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ offrant un cadre théorique satisfaisant (e.g. la probabilité d'avoir Pile au n-ième lancer vaut $1/2$ ($n\in\mathbf{N}^*$)) pour appliquer les théorèmes des probabilités déjà démontrés. La difficulté réside dans la détermination/construction d'une tribu suffisamment grosse pour contenir des « parties intéressantes pour l'expérience aléatoire » mais pas trop pour que l'on soit en mesure de définir une probabilité. Ces questions délicates ne seront pas discutées ici. On supposera toujours qu'on dispose d'un espace probabilisé lié à notre modèle, mais on pourra garder à l'esprit que construire un tel n'est pas *a priori* chose aisée.

§ 12. Variable aléatoire discrète et loi d'une telle

1. Rappels sur les images réciproques de parties

Soient Ω, E des ensembles et $X : \Omega \longrightarrow E$ une application.

(a) Pour toute partie A de E, définit la partie $X^{-1}(A)$ de Ω par :

$$X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in A\}.$$

(b) L'ensemble des images des éléments de Ω par X est noté $X(\Omega)$, i.e. :

$$X(\Omega) := \{X(\omega) \ : \ \omega \in \Omega\}.$$

L'application :

$$X^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\Omega) \\ A & \longmapsto & X^{-1}(A) \end{array} \right.$$

possède les propriétés suivantes.

1. $X^{-1}(X(\Omega)) = \Omega$
2. Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E :
$$X^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} X^{-1}(A_i).$$
3. Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E deux à deux disjointes, les parties $X^{-1}(A_i)$ $(i \in I)$ de Ω sont deux à deux disjointes et :
$$X^{-1}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i\in I} X^{-1}(A_i).$$
4. Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E :
$$X^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} X^{-1}(A_i).$$

Soient F est un ensemble et $f : E \longrightarrow F$ une application.

5. Pour toute partie B de F :
$$(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}\big(f^{-1}(B)\big).$$

2. Définition d'une variable aléatoire discrète et des événements associés

Définition 111 (variable aléatoire discrète). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et E un ensemble. Une application $X : \Omega \longrightarrow E$ est appelée variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :*

(a) *l'ensemble $X(\Omega) := \{X(\omega) \ : \ \omega \in \Omega\}$ est au plus dénombrable ;*

(b) *pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.*

Proposition 112 (événements associés à une variable aléatoire discrète). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.*

1. *Soit $x \in E$. Alors :*
$$(X = x) := X^{-1}(\{\omega\}) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}.$$
L'événement $(X = x)$ est également noté $\{X = x\}$.
2. *Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors :*
$$(X \in A) := X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in A\} \in \mathscr{A}.$$
L'événement $(X \in A)$ est également noté $\{X \in A\}$.

Événements définis par des inégalités pour une variable aléatoire discrète réelle. — Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable, $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $x \in \mathbf{R}$. On pose :

(a) $(X \leqslant x) := X^{-1}(\,]-\infty, x]\,) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$;

(b) $(X \geqslant x) := X^{-1}(\,[x, +\infty[\,) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$;

(c) $(X < x) := X^{-1}(\,]-\infty, x[\,) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) < x\} \in \mathscr{A}$;

(d) $(X > x) := X^{-1}(\,]x, +\infty[\,) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) > x\} \in \mathscr{A}$.

Les événements $(X \leqslant x)$, $(X \geqslant x)$, $(X < x)$ et $(X > x)$ sont également notés respectivement $\{X \leqslant x\}$, $\{X \geqslant x\}$, $\{X < x\}$ et $\{X > x\}$.

3. Loi d'une variable aléatoire discrète

Théorème 113 (loi d'une variable aléatoire discrète). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble, et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$. L'application :*

$$\mathbf{P}_X \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$, appelée loi de X.

Proposition 114 (distribution de loi d'une variable aléatoire discrète). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble, et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$. La famille :*

$$(\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$$

est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$, qui détermine entièrement la loi de X :

$$\forall\, A \in \mathscr{P}(X(\Omega)), \quad \mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x).$$

Démonstration. — (a) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x) \geqslant 0$.

(b) Nous calculons :

$$\Omega = X^{-1}(X(\Omega)) = X^{-1}\left(\bigsqcup_{x \in X(\Omega)} \{x\}\right) = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\})$$

Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, nous appliquons la σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$ pour obtenir :

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\left(X^{-1}(\{x\})\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x).$$

(c) Soit $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$. Comme A est une partie de $X(\Omega)$ au plus dénombrable, A est elle-même au plus dénombrable. Ainsi de :

$$X^{-1}(A) = X^{-1}\left(\bigsqcup_{a \in A} \{a\}\right) = \bigsqcup_{a \in A} X^{-1}(\{a\})$$

et de la σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$, nous déduisons :

$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{a \in A} X^{-1}(\{a\})\right) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}\left(X^{-1}(\{a\})\right) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a).$$

■

***Remarque 115 (De l'espace probabilisé sous-jacent à une variable aléatoire discrète).* —** L'étude d'une variable aléatoire discrète consiste, pour partie, à déterminer sa loi. Souvent, l'espace probabilisé de départ $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ n'apparaîtra que de manière implicite, et ne sera pas au cœur de l'étude. ■

Proposition 116 (système quasi-complet d'événements associé à une v.a.d.). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble, et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Alors :*

$$((X = x))_{x \in X(\Omega)}$$

est un système quasi-complet d'événements.

Démonstration. — **(a)** Soit $(x_1, x_2) \in X(\Omega)^2$.

$$(X = x_1) \cap (X = x_2) = X^{-1}(\{x_1\}) \cap X^{-1}(\{x_2\}) = X^{-1}(\{x_1\} \cap \{x_2\}).$$

Si $x_1 \neq x_2$, alors $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \varnothing$ et donc $(X = x_1) \cap (X = x_2) = \varnothing$.
(b) Nous observons :

$$\bigsqcup_{x \in X(\Omega)} (X = x) = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}) = X^{-1}\left(\bigsqcup_{x \in X(\Omega)} \{x\}\right) = X^{-1}(X(\Omega)) = \Omega.$$

■

Exercice 117 (loi hypergéométrique de formule de Vandermonde). — On tire simultanément n boules dans une urne contenant a boules rouges et b boules vertes.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de boules rouges.
2. Justifier l'identité $\mathbf{P}(X \in [\![0, a]\!]) = 1$, puis l'expliciter.
3. Proposer une démonstration alternative de la formule observée en 2.

□

Exercice 118 (loi géométrique). — On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce retombant sur Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier Pile.
2. Justifier l'identité $\mathbf{P}(X \in \mathbf{N}^*) = 1$, puis l'expliciter.
3. Proposer une démonstration alternative de la formule observée en 2.

□

Convention. Nous ne considérerons dans la suite que des variables aléatoires discrètes. Ainsi, désormais, écrirons-nous « variable aléatoire » au lieu de « variable aléatoire discrète ».

4. Égalité en loi de deux variable aléatoire

Définition 119 (égalité en loi de deux variables aléatoires). — *Soient X et Y deux variables aléatoires (non nécessairement définies sur le même espace probabilisé). On dit que X et Y sont égales en loi et on note $X \sim Y$, si :*

(a) *$X(\Omega) = Y(\Omega)$;*

(b) *pour tout $z \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = z) = \mathbf{P}(Y = z)$*

autrement dit si les ensembles $X(\Omega) = Y(\Omega)$ sont égaux et si les deux lois de probabilités $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$ sur $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$ coïncident.

Exercice 120 (égalité en loi versus égalité). — Soient X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y := 1 - X$. Démontrer que $X \sim Y$, bien que $X \neq Y$. □

5. Variable aléatoire image

Théorème 121 (variable aléatoire image). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E, F deux ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :*

1. *L'application $f(X) := f \circ X : \Omega \longrightarrow F$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$.*
2. *Pour tout $A \in \mathscr{P}(f(X(\Omega)))$:*
$$\mathbf{P}_{f(X)}(A) = \mathbf{P}\left(X \in f^{-1}(A)\right)$$
et donc la loi de la variable aléatoire $f(X)$ est entièrement déterminée par la loi de la variable aléatoire X.

DÉMONSTRATION. — (1a) Nous observons que :

$$f \circ X(\Omega) = f(X(\Omega)).$$

Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, il existe une partie A de $\mathbf{N}$ et une application bijective $g\colon A \xrightarrow{\sim} X(\Omega)$. L'application :

$$h \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f \circ X(\Omega) \\ a & \longmapsto & f(g(a)) \end{array} \right.$$

est donc surjective. Il existe donc une application injective :

$$i\colon f \circ X(\Omega) \hookrightarrow A$$

Comme i induit une bijection de $f \circ X(\Omega)$ sur $i(f \circ X(\Omega))$, qui est une partie de $\mathbf{N}$, l'ensemble $f \circ X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
(1b) Soit $y \in f \circ X(\Omega) = f(X(\Omega))$. Comme :

$$(f \circ X)^{-1}(\{y\}) = X^{-1}\left(f^{-1}(\{y\})\right).$$

et $f^{-1}(\{y\}) \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, nous pouvons appliquer la proposition 112 pour obtenir :

$$(f \circ X)^{-1}(\{y\}) \in \mathscr{A}.$$

(2) Soit $A \in \mathscr{P}(f(X(\Omega)))$. Alors :

$$\mathbf{P}_{f(X)}(A) := \mathbf{P}\left((f \circ X)^{-1}(A)\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)\right) =: \mathbf{P}\left(X \in f^{-1}(A)\right).$$

■

COROLLAIRE 122 (ÉGALITÉ EN LOI DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES IMAGES). — *Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \sim Y$, F un ensemble et $f\colon X(\Omega) \longrightarrow F$ une application. Alors :*

$$f(X) \sim f(Y).$$

6. LOI CONDITIONNELLE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

DÉFINITION 123 (LOI CONDITIONNELLE DE X). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A un événement non négligeable, E un ensemble et $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$. La loi conditionnelle de Y sachant A est la loi de X pour la probabilité $\mathbf{P}_A$, qui est définie par :*

$$\forall\, B \subset X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X \in B \mid A) = \frac{\mathbf{P}((X \in B) \cap A)}{\mathbf{P}(A)}.$$

EXERCICE 124 (CONDITIONNEMENT BINOMIAL/BINOMIAL). — Soient $(n, p, q) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[\times]0,1[$, X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que :

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad Y/(X=k) \sim \mathscr{B}(k,q).$$

Déterminer la loi de Y. □

§ 13. Couple de variables aléatoires

Définition 125 (loi conjointe et lois marginales). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E, F des ensembles et $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires.*

(a) *La loi de la variable aléatoire :*

$$Z = (X, Y) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est appelée loi conjointe de X et Y. Cette loi est entièrement déterminée par la distribution de probabilités :

$$\big(\mathbf{P}(X = x,\ Y = y)\big)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

sur l'ensemble au plus dénombrable $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

(b) *Les lois de X et Y sont appelées lois marginales de $Z = (X, Y)$.*

Remarque 126 (un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire). — Nous conservons les mêmes notations que dans la précédente définition. Nous avons affirmé que $Z = (X, Y)$ est une variable aléatoire, ce qui demande quelques vérifications.

(a) Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables, dont $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ également. Comme :

$$Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

l'ensemble $Z(\Omega)$ est au plus dénombrable (une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable).

(b) Soit $(x, y) \in Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

$$Z^{-1}\left(\{(x,y)\}\right) = \left\{\omega \in \Omega \,:\, (X(\omega), Y(\omega) = (x,y)\right\} = X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}\left(\{y\}\right).$$

Comme X et Y sont des variables aléatoires, $X^{-1}(\{x\})$ et $Y^{-1}\left(\{y\}\right)$ appartiennent à la tribu $\mathscr{A}$ et, par propriétés des tribus, leur intersection également.

■

Proposition 127 (la loi conjointe détermine les lois marginales). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E, F des ensembles et $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. Posons $Z = (X, Y)$.*

1. *Pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille $\big(\mathbf{P}(Z = (x,y))\big)_{y \in Y(\Omega)}$ est sommable et :*

$$\mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(Z = (x,y))\,.$$

2. *Pour tout $y \in Y(\Omega)$, la famille $\big(\mathbf{P}(Z = (x,y))\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et :*

$$\mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Z = (x,y))\,.$$

La loi de Z détermine donc entièrement les lois de X et Y.

Les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe, i.e. connaître les lois des variables aléatoires X et Y ne suffit pas *a priori* pour savoir la loi du couple $Z = (X, Y)$, cf. exemple ci-dessous.

Exemple 128 (les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe). — Considérons quatre variables aléatoires X_1, Y_1, X_2, Y_2 à valeurs dans $\{0, 1\}$ tels que les lois des couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) soient donnés par les tables ci-dessous.

Loi du couple (X_1, Y_1)

$\mathbf{P}(X_1 = 0\,,\ Y_1 = 0) = \dfrac{1}{4}$	$\mathbf{P}(X_1 = 0\,,\ Y_1 = 1) = \dfrac{1}{4}$
$\mathbf{P}(X_1 = 1\,,\ Y_1 = 0) = \dfrac{1}{4}$	$\mathbf{P}(X_1 = 1\,,\ Y_1 = 1) = \dfrac{1}{4}$

Loi du couple (X_2, Y_2)

$\mathbf{P}(X_2 = 0\,,\ Y_2 = 0) = \dfrac{1}{6}$	$\mathbf{P}(X_2 = 0\,,\ Y_2 = 1) = \dfrac{1}{3}$
$\mathbf{P}(X_2 = 1\,,\ Y_2 = 0) = \dfrac{1}{3}$	$\mathbf{P}(X_2 = 1\,,\ Y_2 = 1) = \dfrac{1}{6}$

Les variables aléatoires X_1, Y_1, X_2, Y_2 sont de Bernoulli et nous calculons :

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1\,,\ Y_1 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1\,,\ Y_1 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}(Y_1 = 1) = \mathbf{P}(Y_1 = 1\,,\ X_1 = 0) + \mathbf{P}(Y_1 = 1\,,\ X_1 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 1\,,\ Y_2 = 0) + \mathbf{P}(X_2 = 1\,,\ Y_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}(Y_2 = 1) = \mathbf{P}(Y_2 = 1\,,\ X_2 = 0) + \mathbf{P}(Y_2 = 1\,,\ X_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \quad Y_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \quad X_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \quad Y_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Bien que $X_1 \sim X_2$ et $Y_1 \sim Y_2$, les couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont des lois différentes.

■

EXERCICE 129. — Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que :

$$(\star) \quad \forall\,(i,j) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e\,2^{i+1}\,j!}.$$

1. Vérifier que $(\star)$ définit bien une loi pour le couple (X, Y).
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

□

EXERCICE 130. — Soient $p \in]0,1[$ et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\,(k,n) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois de X et Y.

□

DÉFINITION 131 (LOI CONJOINTE DE n VARIABLES ALÉATOIRES). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles et des variables aléatoires :*

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1, \ldots, X_n : \Omega \longrightarrow E_n.$$

(a) *La loi de la variable aléatoire discrète $Z = (X_1, \ldots, X_n)$ est appelée loi conjointe des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$. Cette loi est entièrement déterminée par la distribution de probabilités :*

$$\left(\mathbf{P}(X_1 = x_1\,,\ \ldots\,,\ X_n = x_n)\right)_{(x_1,\ldots,x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)}$$

sur l'ensemble au plus dénombrable $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$.

(b) *Les lois des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont appelées lois marginales de Z.*

§ 14. Indépendance de variables aléatoires

1. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 132 (couple de variables aléatoires indépendantes). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que X et Y sont indépendantes et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$, si :*

$$\forall (A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega)), \quad \mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B).$$

Proposition 133 (critère d'indépendance via les distributions de probabilités). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Alors :*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

Démonstration. — L'implication directe est claire. Démontrons l'implication réciproque. Supposons :

$$(\star) \quad \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$. Comme $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables, les ensembles A et B le sont aussi. L'ensemble $A \times B$ est donc également au plus dénombrable.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) &= \mathbf{P}\left(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup_{a \in A} \{a\}\right) \cap Y^{-1}\left(\bigsqcup_{b \in B} \{b\}\right)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left(\bigsqcup_{a \in A} X^{-1}(\{a\})\right) \cap \left(\bigsqcup_{b \in B} Y^{-1}(\{b\})\right)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left(\bigsqcup_{a \in A} (X = a)\right) \cap \left(\bigsqcup_{b \in B} (Y = b)\right)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{(a,b) \in A \times B} (X = a, Y = b)\right) \\
&= \sum_{(a,b) \in A \times B} \mathbf{P}(X = a, Y = b) \qquad [\sigma\text{-additivité}] \\
&= \sum_{(a,b) \in A \times B} \mathbf{P}(X = a) \times \mathbf{P}(Y = b) \qquad \left[\text{propriété } (\star)\right] \\
&= \left(\sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a)\right) \times \left(\sum_{b \in B} \mathbf{P}(Y = b)\right) \qquad [\text{théorème de Fubini}] \\
&= \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B) \qquad \left[\text{proposition 114}\right].
\end{aligned}$$

■

2. Indépendance d'un nombre fini de variables aléatoires

Définition 134 (famille finie de variables aléatoires indépendantes). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si :*

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \ldots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega)), \quad \mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \times \ldots \times \mathbf{P}(X_n \in A_n).$$

PROPOSITION 135 (CRITÈRE D'INDÉPENDANCE VIA LES DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉS). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbf{P}(X_n = x_n).$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — On raisonne par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$, en appliquant la proposition 133, qui correspond au cas $n = 2$.

□

3. LEMME DES COALITIONS

LEMME 136 (DES COALITIONS). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A})$, $m \in [\![1, n-1]\!]$, E, F des ensembles et deux applications :*

$$f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega) \longrightarrow E \quad , \quad g : X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \longrightarrow F.$$

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes alors :

$$f(X_1, \dots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \dots, X_n).$$

DÉMONSTRATION. — Nous ne considérons que le cas où $n = 1$ et $m = 1$. Nous supposons que $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ et nous démontrons que $f(X_1) \perp\!\!\!\perp f(X_2)$ i.e. que :

$$\forall (B_1, B_2) \in \mathscr{P}(f(X_1(\Omega))) \times \mathscr{P}(g(X_2(\Omega))), \quad \mathbf{P}(f(X_1) \in B_1, g(X_2) \in B_2) = \mathbf{P}(f(X_1) \in B_1) \times \mathbf{P}(g(X_2) \in B_2).$$

Soit $(B_1, B_2) \in \mathscr{P}(f(X_1(\Omega))) \times \mathscr{P}(g(X_2(\Omega)))$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(f(X_1) \in B_1, f(X_2) \in B_2) &= \mathbf{P}\left((f \circ X_1)^{-1}(B_1) \cap (f \circ X_2)^{-1}(B_2)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(X_1^{-1}\left(f^{-1}(B_1)\right) \cap X_2^{-1}\left(g^{-1}(B_2)\right)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(X_1 \in f^{-1}(B_1), X_2 \in g^{-1}(B_2)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(X_1 \in f^{-1}(B_1)\right) \times \mathbf{P}\left(X_2 \in g^{-1}(B_2)\right) \qquad [X_1 \perp\!\!\!\perp X_2] \\
&= \mathbf{P}\left(X_1^{-1}\left(f^{-1}(B_1)\right)\right) \times \mathbf{P}\left(X_2^{-1}\left(g^{-1}(B_2)\right)\right) \\
&= \mathbf{P}\left((f \circ X_1)^{-1}(B_1)\right) \times \mathbf{P}\left((g \circ X_2)^{-1}(B_2)\right) \\
&= \mathbf{P}(f(X_1) \in B_1) \times \mathbf{P}(g(X_2) \in B_2)
\end{aligned}$$

■

4. INDÉPENDANCE D'UNE FAMILLE QUELCONQUE DE VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITION 137 (FAMILLE QUELCONQUE DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On dit que les variables aléatoires X_i $(i \in I)$ si, pour toute partie finie J de I, les variables X_i $(i \in J)$ sont indépendantes.*

5. Théorème d'extension de Kolmogorov

THÉORÈME 138 (D'EXTENSION DE KOLMOGOROV). — *Soient :*

- *E un ensemble au plus dénombrable ;*
- *$\mathscr{L}$ une probabilité sur $(E, \mathscr{P}(E))$.*

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$, indépendantes et de même loi $\mathscr{L}$.

Ce théorème est admis.

***Remarque 139.* —** C'est souvent ce théorème que nous appliquerons pour obtenir un cadre théorique, dans les situations où nous répéterons indéfiniment un jeu (e.g. le lancer d'une pièce, le lancer d'un dé). ■

§ 15. Loi uniforme

DÉFINITION 140 (LOI UNIFORME). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ et on note $X \sim \mathscr{U}(X(\Omega))$ si :*

(a) *$X(\Omega)$ est fini ;*

(b) *si toutes les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, sont égales.*

Dans ce cas :

$$\forall\, x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(X(\Omega))}.$$

PROPOSITION 141 (CALCULS DE PROBABILITÉS POUR UNE LOI UNIFORME). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini. Si $X \sim \mathscr{U}(X(\Omega))$, alors :*

$$\forall\, A \in \mathscr{P}(X(\Omega)), \quad \mathbf{P}(X \in A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(X(\Omega))}.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$. D'après la proposition 114 :

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{x \in A} \frac{1}{\mathrm{Card}(X(\Omega))} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(X(\Omega))}.$$

■

☞ **Situation de reconnaissance de loi uniforme. —** Une variable aléatoire X suit une loi uniforme si et seulement si $X(\Omega)$ est fini et toutes les valeurs de X ont même probabilité. Si tel est le cas, $X \sim \mathscr{U}(X(\Omega))$.

***Exemple 142.* —** On dispose 100 boules numérotées de 0 à 99, indiscernables au toucher, placées dans une urne. On en tire une et on note N le nombre obtenu.
Alors $N(\Omega) = [\![0, 99]\!]$ et, comme les boules sont indiscernables au toucher, toutes les valeurs de N ont la même probabilité d'apparaître. Donc $N \sim \mathscr{U}([\![0, 99]\!])$ et :

$$\forall\, x \in [\![0, 99]\!], \quad \mathbf{P}(N = x) = \frac{1}{100}.$$

■

§ 16. Loi de Bernoulli

Définition 143 (loi de Bernoulli de paramètre p). — *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé,* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *une variable aléatoire. On dit que* X *suit la loi de Bernoulli de paramètre* p*, où* $p \in [0,1]$ *et on note* $X \sim \mathscr{B}(p)$*, si :*

(a) $X(\Omega) = \{0,1\}$;

(b) $\mathbf{P}(X=1) = p$.

Remarque 144 (terminologie liée à une loi de Bernoulli). — Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, où $p \in [0,1]$. L'événement $(X=1)$ est appelé « succès » et l'événement $(X=0)$ est appelé « échec ». Le paramètre p de la loi de X est donc la probabilité d'avoir un succès. ■

Situation de reconnaissance de loi de Bernoulli. — Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli si et seulement si son ensemble de valeurs $X(\Omega)$ est $\{0,1\}$. Si tel est le cas, alors $X \sim \mathscr{B}(p)$, où $p := \mathbf{P}(X=1)$.

Proposition 145 (probabilité de l'échec pour une variable aléatoire de Bernoulli). — *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé,* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *une variable aléatoire telle que* $X \sim \mathscr{B}(p)$*, où* $p \in [0,1]$*. Alors :*

$$\mathbf{P}(X=0) = 1-p.$$

Démonstration. — Comme $X(\Omega) = \{0,1\}$, la famille $((X=0),(X=1))$ est un système quasi-complet d'événements. Donc :

$$\mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(X=1) = 1.$$

Comme $\mathbf{P}(X=1) = p$, $\mathbf{P}(X=0) = 1-p$. ■

Exemple 146. — On lance un dé équilibré, dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient un chiffre multiple de 3 et 0 sinon.
Alors X suite une loi de Bernoulli, puis qu'elle a pour valeurs 0 et 1. Son paramètre est :

$$p = \mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(\{3,6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

où $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme sur $([\![1,6]\!], \mathscr{P}([\![1,6]\!]))$. ■

Proposition 147 (indicatrice d'un événement). — *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé, et* A *un événement. Alors la fonction indicatrice de* A

$$\mathbf{1}_A \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p := \mathbf{P}(A)$.

Démonstration. — **(a)** Comme $\mathbf{1}_A(\Omega) \subset \{0,1\}$ et :

$$\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega \,:\, \mathbf{1}_A(\omega) = 1\} = A \in \mathscr{A} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{1}_A^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega \,:\, \mathbf{1}_A(\omega) = 0\} = \overline{A} \in \mathscr{A}$$

$\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
(b) Comme $\mathbf{1}_A(\Omega) \subset \{0,1\}$, la variable $\mathbf{1}_A$ est de Bernoulli, de paramètre :

$$p := \mathbf{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \mathbf{P}(\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\})) = \mathbf{P}(A).$$

■

EXERCICE 148. — Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, notons :

$$T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbf{N}^* \,:\, X_n(\omega) = 1\} & \text{si l'ensemble } \{n \in \mathbf{N}^* \,:\, X_n(\omega) = 1\} \text{ est non vide} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que l'application :
$$T \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega & \longmapsto & T(\omega) \end{array} \right.$$
est une variable aléatoire discrète.
2. Démontrer que $(T \in \mathbf{N}^*)$ est un événement presque sûr.

□

§ 17. LOI BINOMIALE

HEURISTIQUE POUR LA LOI BINOMIALE. —

(a) On considère une expérience de Bernoulli, i.e. une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues : 0 (échec) et 1 (succès). La probabilité de succès est notée p (et donc $p \in [0,1]$). On fixe un entier naturel non nul n et on répète n fois cette expérience de Bernoulli de manière indépendante.

(b) On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

(c) L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

(d) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'événement $(X = k)$ correspond à l'obtention de k succès lors des n répétitions indépendantes de l'expérience de Bernoulli. Ainsi :

$$(X = k) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \,:\, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\right\}$$

où x_i représente le résultat de la i-ème répétition de l'expérience de Bernoulli. Comme l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \,:\, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\} & \longrightarrow & \mathscr{P}_k([\![1, n]\!]) \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & \{i \in [\![1, n]\!] \,:\, x_i = 1\} \end{array} \right.$$

est bijective :

$$(\star) \qquad \mathrm{Card}(X = k) = \binom{n}{k}.$$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (X = k)$, alors

$$\mathbf{P}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \mathbf{P}(\text{« } 1^{\text{ère}} \text{ répétition donne } x_1 \text{ »}) \times \ldots \times \mathbf{P}(\text{« } n^{\text{ème}} \text{ répétition donne } x_n \text{ »})$$

car les répétitions sont indépendantes. Ensuite puisqu'il y a k fois le chiffre 1 et donc $(n-k)$ le chiffre 0 dans le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on a :

$$\mathbf{P}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \mathbf{P}(\text{« } 1^{\text{ère}} \text{ répétition donne } x_1 \text{ »}) \times \ldots \times \mathbf{P}(\text{« } n^{\text{ème}} \text{ répétition donne } x_n \text{ »}) = p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

On a donc établi que :

$$(\star\star) \qquad \forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (X = k) \quad \mathbf{P}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

De $(\star)$ et $\star\star)$, on déduit que :

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

☞ Le facteur $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de choix des places des k succès lors des n répétitions.

Définition 149 (loi binomiale). — *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *une variable aléatoire. On dit que* X *suit la loi binomiale de paramètre* (n, p) *où* $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times [0, 1]$ *et on note* $X \sim \mathscr{B}(n, p)$*, si :*

(a) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$;

(b) $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarque 150. — Si $p \in [0, 1]$, alors la loi binomiale $\mathscr{B}(1, p)$ est simplement la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. ■

Remarque 151. — On conserve les notations de la définition 149. Comme $((X = k))_{k \in [\![1, n]\!]}$ est un système complet d'événements :

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} (X = k) \right) = 1.$$

Ainsi, par σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} (X = k) \right) = 1.$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

On retrouve ainsi un cas particulier de la formule du binôme de Newton, car $(p + (1-p))^n = 1$. ■

Exercice 152 (somme de n v.a. de loi $\mathscr{B}(p)$ indépendantes). — Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Démontrer que :

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p).$$

au moyen d'un raisonnement par récurrence. □

Situation de reconnaissance de loi binomiale. — Si l'on répète n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 et 1) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (i.e. de 1) obtenus, alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ où p est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli.

Exemple 153. — Dans une urne, on place une boule rouge et cinq boules noires. On effectue une suite de 10 tirages avec remise et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
On répète donc 10 fois, de manière indépendante (car la boule tirée est remise), une expérience de Bernoulli. Celle-ci consiste à tirer une boule dans l'urne et à prendre comme issue 1 si la boule tirée est rouge et 0 sinon. La variable X compte le nombre de succès. Les boules ayant toutes la même probabilité d'être tirées (hypothèse additionnelle), la probabilité d'avoir un succès lors d'un tirage est $\frac{1}{6}$. La variable X suit donc la loi $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$ et on a :

$$\forall\, k \in [\![0, 10]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}.$$

■

§ 18. Loi de Poisson

Définition 154 (loi de Poisson). — *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *une variable aléatoire. On dit que* X *suit la loi de Poisson de paramètre* λ*, où* $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$ *et on note* $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$*, si :*

(a) $X(\Omega) = \mathbf{N}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Remarque 155 (caractère bien défini de la loi de Poisson). — Fixons $\lambda > 0$.

- La famille $\left(e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de réels positifs ou nuls.
- Nous savons que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ et que :

$$\forall\, x\in\mathbf{R},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ est absolument convergente, de somme 1. Nous en déduisons que la famille $\left(e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable, de somme 1.

La loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ est donc bien une loi. ■

Remarque 156 (pas de situation de reconnaissance pour une loi de Poisson). — Il n'y a pas de situation typique pour reconnaître une loi de Poisson. Cette dernière apparaît comme « une loi limite ». Toutefois, la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ est souvent utilisée pour modéliser des événements rares, i.e. des événements dont la réalisation dans un laps de temps T donné suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, avec p « petit » , de l'ordre de λ/n, avec « n grand ». Cf. théorème suivant. ■

THÉORÈME 157 (APPROXIMATION D'UNE LOI BINOMIALE PAR UNE LOI DE POISSON). — *Soient $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé, et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $X_n\sim\mathscr{B}(n,p_n)$. Supposons que :*

$$n\,p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda>0.$$

Alors pour tout $k\in\mathbf{N}$ fixé :

$$\mathbf{P}(X_n=k)\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

DÉMONSTRATION. — **(a)** Fixons $k\in\mathbf{N}^*$. Soit n un entier tel que $n>k$.

$$\mathbf{P}(X_n=k)=\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{1}{k!}\underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}p_n^k}_{a_n}\;\underbrace{(1-p_n)^{n-k}}_{b_n}.$$

Il suffit de démontrer $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda^k$ et $b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-\lambda}$ pour obtenir le résultat du théorème.

(b) Nous calculons :

$$a_n=\left(\prod_{i=0}^{k-1} n-i\right)p_n^k=\prod_{i=0}^{k-1}((n-i)\,p_n)\qquad [\text{le produit contient } k \text{ facteurs et } k \text{ est fixé}]\,.$$

Soit $i\in[\![0,k-1]\!]$.

$$(n-i)\,p_n\underset{n\to+\infty}{\sim} n\,p_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda.$$

Nous en déduisons que $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda^k$.

(c) De l'hypothèse $n\,p_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda>0$, nous déduisons que $p_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\lambda}{n}$, i.e. :

$$p_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\lambda}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $p_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$:

$$\exists N>k,\quad \forall\, n\geqslant N,\quad p_n<1.$$

Pour tout $n\geqslant N$:

$$b_n=\exp\left((n-k)\ln(1-p_n)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(-\frac{n-k}{n}\lambda+\mathrm{o}(1)\right).$$

Par continuité de la fonction exponentielle, $b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-\lambda}$.

■

EXERCICE 158 (SOMME DE DEUX V.A. DE POISSON INDÉPENDANTES). — Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Supposons $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$. Démontrer :

$$X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu).$$

□

§ 19. LOI GÉOMÉTRIQUE

HEURISTIQUE POUR LA LOI GÉOMÉTRIQUE. —

(a) On considère une expérience de Bernoulli, i.e. une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues : 0 (échec) et 1 (succès). La probabilité de succès est notée p ($p \in]0,1]$). On répète cette expérience de Bernoulli une infinité de fois, de manière indépendante.

(b) On note X la variable aléatoire égale au rang du premier succès.

(c) L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$.

(d) Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n le résultat obtenu lors de la n-ième expérience de Bernoulli. Toutes les variables aléatoires X_n suivent la loi $\mathscr{B}(p)$ et elles sont indépendantes, car les répétitions des expériences de Bernoulli le sont.

(e) Nous observons que :

$$(X = 1) = (X_1 = 1)$$

et donc $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = p$.

(f) Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Comme :

$$(X = n) = (X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1)$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = n) &= \mathbf{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1)` \\
&= \mathbf{P}(X_1 = 0) \ldots \mathbf{P}(X_{n-1} = 0)\, \mathbf{P}(X_n = 1) \qquad [\text{les v.a. } X_1, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes}] \\
&= \underbrace{(1-p) \ldots (1-p)}_{n-1 \text{ facteurs}}\, p \qquad [\text{les v.a. } X_1, \ldots, X_n \text{ suivent toutes la loi } \mathscr{B}(p)] \\
&= (1-p)^{n-1}\, p.
\end{aligned}$$

(g) Les résultats obtenus en (e) et (f) s'unifient :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}\, p.$$

(h) De la σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$ et des résultats sur les séries géométriques ($-1 < 1-p < 1$), nous déduisons :

$$\mathbf{P}(X = +\infty) = 1 - \mathbf{P}(X \neq +\infty) = 1 - \mathbf{P}(X \in \mathbf{N}^*) = 1 - \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{P}(X = n) = 1 - p \times \sum_{n \in \mathbf{N}^*} (1-p)^{n-1} = 1 - p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 0.$$

L'événement $(X = +\infty)$ est donc négligeable.

☞ Comme $(X = +\infty)$ est négligeable, nous considérerons que l'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

DÉFINITION 159 (LOI GÉOMÉTRIQUE). — *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p, où $p \in]0,1]$ et on note $X \sim \mathscr{G}(p)$, si :*

(a) $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$;

(b) $\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = p\,(1-p)^{n-1}$.

☞ **Situation de reconnaissance de loi géométrique. —** Si l'on répète indéfiniment une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 pour un échec et 1 pour un succès) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire égale au rang du premier succès, alors $X \sim \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$ est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli.

Exercice 160 (absence de mémoire). — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire si :

$$\text{(AM)} \qquad \forall\,(k,n) \in \mathbf{N}^2, \quad P\,(X > n+k \,|\, X > n) = \mathbf{P}(X > k).$$

1. Supposons que $X \sim \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$\mathbf{P}(X > n)$$
et en déduire que X vérifie la propriété (AM).
2. En considérant la situation de reconnaissance d'une loi géométrique, expliquer au moyen de quelques phrases l'absence de mémoire pour une telle loi, en motivant la terminologie retenue pour la propriété (AM).
3. On suppose que X vérifie la propriété d'absence de mémoire (AM). Démontrer que X suit une loi géométrique.

□

Exercice 161 (minimum de deux variables géométriques indépendantes). — Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1]$. Démontrer que la variable $\min(X,Y)$ suit une loi géométrique. □

Exercice 162 (reconnaissance de lois usuelles). — On jette une infinité de fois un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de 5 obtenus lors des 20 premiers lancers. Quelle est la loi de X_1 ?
2. On note X_2 le chiffre obtenu lors du $100^{\text{ème}}$ lancer. Quelle est la loi de X_2 ?
3. On note X_3 le rang du premier lancer où le dé a amené un multiple de 3. Quelle est la loi de X_3 ?
4. On note X_4 la variable aléatoire égale à 1 si le $50^{\text{ème}}$ lancer a amené un nombre pair et égale à 0 sinon. Quelle est la loi de X_4 ?

□

§ 20. Espérance

Notation. — Dans toute cette partie, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Toutes les variables aléatoires considérées ici seront définies sur cet espace probabilisé et discrètes.

1. Définition de la notion d'espérance

Définition 163 (espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$. On définit l'espérance de X, notée $\mathbf{E}(X)$, comme étant la somme de la famille $(x\,\mathbf{P}(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ dans $[0,+\infty]$, i.e. :*

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}(X=x) \qquad [\textit{élément de } [0,+\infty]]\,.$$

Proposition 164 (espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Alors :*

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{P}(X \geqslant n).$$

DÉMONSTRATION. — (a) Comme X est à valeurs dans $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{k\in\mathbf{N}} k\,\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k\in\mathbf{N}^*} k\,\mathbf{P}(X=k) \qquad \big[\text{la valeur } k=0 \text{ ne compte pas dans le calcul de l'espérance}\big].$$

(b) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Comme X est à valeurs dans $\mathbf{N}$:

$$(X\geqslant n) = X^{-1}\left(\bigsqcup_{k\in[\![n,+\infty[\![}\{k\}\right) = \bigsqcup_{k\in[\![n,+\infty[\![}\left(X^{-1}(\{k\})\right) = \bigsqcup_{k\in[\![n,+\infty[\![}(X=k).$$

Comme l'ensemble $[\![n,+\infty[\![$ est dénombrable, nous appliquons la σ-additivité de $\mathbf{P}$ pour obtenir :

$$\mathbf{P}(X\geqslant n) = \sum_{k\in[\![n,+\infty[\![}\mathbf{P}(X=k).$$

(c) Posons :

$$\forall\,(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*,\quad u_{k,n} = \begin{cases}\mathbf{P}(X=k) & \text{si } k\geqslant n\\ 0 & \text{si } k<n.\end{cases}$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\mathbf{P}(X\geqslant n) &= \sum_{n\in\mathbf{N}^*}\sum_{k\in[\![n,+\infty[\![}\mathbf{P}(X=k) \qquad \big[\text{d'après (b)}\big]\\
&= \sum_{n\in\mathbf{N}^*}\sum_{k\in[\![n,+\infty[\![}u_{k,n} \qquad \big[\text{pour tout } n\in\mathbf{N}^*,\ u_{k,n}=\mathbf{P}(X=k) \text{ si } k\geqslant n\big]\\
&= \sum_{n\in\mathbf{N}^*}\sum_{k\in\mathbf{N}^*}u_{k,n} \qquad \big[\text{pour tout } n\in\mathbf{N}^*,\ u_{k,n}=0 \text{ si } k<n\big]\\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}^*}\sum_{n\in\mathbf{N}^*}u_{k,n} \qquad [\text{théorème de Fubini}]\\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}^*}\sum_{n\in[\![1,k]\!]}\mathbf{P}(X=k) \qquad \big[\text{pour tout } n\in\mathbf{N}^*,\ u_{k,n}=0 \text{ si } n>k \text{ et } u_{k,n}=\mathbf{P}(X=k) \text{ si } n\leqslant k\big]\\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}^*}k\,\mathbf{P}(X=k)\\
&= \mathbf{E}(X) \qquad \big[\text{d'après (a)}\big].
\end{aligned}$$

■

***Exemple 165 (espérance d'une loi géométrique).* —** Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(p)$, où $p\in]0,1]$. Comme X est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X\geqslant n) &= \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k) \qquad [\sigma\text{-additivité de } \mathbf{P}]\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty}p\,(1-p)^{k-1}\\
&= p\,\frac{(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}\\
&= (1-p)^{n-1}.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 164 :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*}\mathbf{P}(X\geqslant n) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*}(1-p)^{n-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

■

DÉFINITION 166 (ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE À VALEURS COMPLEXES). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs complexes.*

(a) *On dit que X possède une espérance finie, si la famille $(x\,\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, i.e. si :*

$$\sum_{x\in X(\Omega)} |x|\;\mathbf{P}(X=x) < +\infty \qquad [\textit{prêter attention aux modules}].$$

(b) *Si X possède une espérance finie, alors la somme de la famille sommable $(x\,\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est appelée espérance de X et notée $\mathbf{E}(X)$, i.e.*

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}(X=x) \qquad [\textit{moyenne des valeurs } x\in X(\Omega) \textit{ pondérées par } \mathbf{P}(X=x)].$$

Remarque 167 (une v.a. prenant un nombre fini de valeurs possède une espérance finie). — Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors la famille $(x\,\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Ainsi X possède une espérance finie.

■

EXERCICE 168. — Soit X une variable aléatoire à valeurs complexes, bornée. Démontrer que X possède une espérance finie. □

DÉFINITION 169 (VARIABLE ALÉATOIRE CENTRÉE). — *Une variable aléatoire X à valeurs complexes est dite centrée si :*

(a) *si X possède une espérance finie;*

(b) $\mathbf{E}(X)=0$.

2. ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE SUIVANT UNE LOI USUELLE

LEMME 170 (FORMULE DU CAPITAINE). — *Soit $n\in\mathbf{N}^*$ et $k\in[\![1,n]\!]$. Alors :*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

DÉMONSTRATION. — On propose deux démonstrations.

(a) Donnons tout d'abord une preuve combinatoire. On considère un ensemble de n joueurs et on compte le nombre d'équipes de k joueurs dans lesquelles un capitaine est désigné.

- On choisit les k joueurs de l'équipe : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite, parmi ces k joueurs, on désigne un capitaine : il y a k choix. Au total, ce premier comptage donne $k\binom{n}{k}$.
- On peut procéder autrement et, d'abord choisir le capitaine : il y a n choix. Puis, on complète l'équipe avec $k-1$ joueurs choisis parmi les $n-1$ joueurs restants : il y a $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités. Au total, ce deuxième comptage donne $n\binom{n-1}{k-1}$.

En comparant les résultats, obtenus par deux manières de dénombrer différentes, il vient $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(b) Donnons ensuite une preuve algébrique.

$$k\binom{n}{k} = k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

■

THÉORÈME 171 (ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE SUIVANT UNE LOI USUELLE). — *Soit X une variable aléatoire discrète.*

1. *Si X est constante égale à $a \in \mathbf{C}$, alors X possède une espérance finie et $\mathbf{E}(X) = a$.*
2. *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, où $p \in]0,1[$, alors X possède une espérance finie et $\mathbf{E}(X) = p$.*
3. *Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, où $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$, alors X possède une espérance finie et $\mathbf{E}(X) = np$.*
4. *Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors X possède une espérance finie et $\mathbf{E}(X) = \lambda$.*
5. *Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1]$, alors X possède une espérance finie et $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.*

DÉMONSTRATION. — (1) Comme $X(\Omega) = \{a\}$ est un ensemble fini, X possède une espérance finie. Celle-ci est donnée par :

$$\mathbf{E}(X) = a \times \mathbf{P}(X = a) = a.$$

(2) Comme $X(\Omega) = \{0,1\}$ est un ensemble fini, X possède une espérance finie. Celle-ci est donnée par :

$$\mathbf{E}(X) = 0 \times \mathbf{P}(X=0) + 1 \times \mathbf{P}(X=1) = p.$$

(3) Comme $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ est un ensemble fini, X possède une espérance finie. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbf{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbf{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \qquad [\text{formule du capitaine}] \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} n \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np \qquad [\text{formule du binôme de Newton}].
\end{aligned}$$

(4) L'ensemble des valeurs de X est $\mathbf{N}$, qui est inclus dans $[0,+\infty]$. Nous calculons :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbf{P}(X=x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} n\, \mathbf{P}(X=n) = \sum_{n \in \mathbf{N}} n\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbf{N}^*} n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

La série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nous en déduisons :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbf{P}(X=x) = \lambda\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda < +\infty.$$

Donc X possède une espérance finie et $\mathbf{E}(X) = \lambda$.
(5) L'ensemble des valeurs de X est $\mathbf{N}^*$, qui est inclus dans $[0,+\infty]$. Nous calculons :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbf{P}(X=x) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} n\, \mathbf{P}(X=n) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} n\, p\, (1-p)^{n-1} = p \sum_{n \in \mathbf{N}^*} n\, (1-p)^{n-1}.$$

La série entière $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1 et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par dérivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}.$$

Nous en déduisons :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} x\, \mathbf{P}(X=x) = p\, \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} < +\infty.$$

Donc X possède une espérance finie et $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p}$. ■

3. THÉORÈME DE TRANSFERT

THÉORÈME 172 (DE TRANSFERT). — *Soient X une variable aléatoire et une application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{C}$.*

1. *La variable $f(X)$ possède une espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\,\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, i.e. si et seulement si :*

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \left|f(x)\right| \mathbf{P}(X=x) < +\infty.$$

2. *Si $f(X)$ possède une espérance finie alors :*

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbf{P}(X=x) \qquad \left[\textit{formule de transfert}\right].$$

DÉMONSTRATION. — (1) Il s'agit de démontrer l'équivalence :

$$\left(y\,\mathbf{P}(f(X)=y)\right)_{y\in f(X(\Omega))} \text{ est sommable} \quad \Longleftrightarrow \quad (f(x)\,\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)} \text{ est sommable}$$

i.e. :

$$(\star) \qquad \sum_{y\in f(X(\Omega))} |y|\,\mathbf{P}(f(X)=y) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{x\in X(\Omega)} \left|f(x)\right| \mathbf{P}(X=x) < +\infty.$$

Nous observons que :

$$X(\Omega) = \bigsqcup_{y\in f(X(\Omega))} f^{-1}\left(\{y\}\right).$$

D'après le théorème de sommation par paquets pour les familles d'éléments de $[0,+\infty]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X(\Omega)} \left|f(x)\right| \mathbf{P}(X=x) &= \sum_{y\in f(X(\Omega))} \sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} \left|f(x)\right| \mathbf{P}(X=x) \\
&= \sum_{y\in f(X(\Omega))} \sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} |y|\,\mathbf{P}(X=x) \qquad \left[\text{pour tout } x\in f^{-1}\left(\{y\}\right),\ f(x)=y\right] \\
&= \sum_{y\in f(X(\Omega))} |y| \sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} \mathbf{P}(X=x) \\
&= \sum_{y\in f(X(\Omega))} |y|\,\mathbf{P}\left(X\in f^{-1}\left(\{y\}\right)\right) \qquad [\text{proposition } 114] \\
&= \sum_{y\in f(X(\Omega))} |y|\,\mathbf{P}\left(f(X)=y\right)
\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \left|f(x)\right| \mathbf{P}(X=x) = \sum_{y\in f(X(\Omega))} |y|\,\mathbf{P}\left(f(X)=y\right)$$

qui implique l'équivalence $(\star)$.

(2) Supposons que $f(X)$ possède une espérance finie. Alors, d'après (1), la famille $(f(x)\,\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. En appliquant, cette fois, le théorème de sommation par paquets pour les familles sommables d'éléments de $\mathbf{C}$, relativement à la décomposition :

$$X(\Omega) = \bigsqcup_{y\in f(X(\Omega))} f^{-1}\left(\{y\}\right)$$

nous démontrons, comme précédemment (en ôtant les modules) que :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbf{P}(X=x) = \sum_{y\in f(X(\Omega))} y\,\mathbf{P}\left(f(X)=y\right) =: \mathbf{E}(f(X)).$$

■

EXERCICE 173 (MOMENT D'ORDRE 2 D'UNE LOI GÉOMÉTRIQUE). — Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$. Démontrer que X^2 possède une espérance finie et calculer $\mathbf{E}(X^2)$. □

4. ESPACE L^1

DÉFINITION 174 (ESPACE L^1). — *On note L^1 l'ensemble des variables aléatoires à valeurs complexes possédant une espérance finie, i.e. :*

$$L^1 := \left\{ X \in \mathbf{C}^\Omega \ : \ X \text{ est une variable aléatoire vérifiant } \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, \mathbf{P}(X = x) < +\infty \right\}.$$

THÉORÈME 175 (LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE). — *L'ensemble L^1 est un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\Omega^{\mathbf{C}}$. et l'application :*

$$\mathbf{E} \left| \begin{array}{ccc} L^1 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ X & \longmapsto & \mathbf{E}(X) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire.

DÉMONSTRATION. — (a) Il est clair que la fonction nulle sur Ω appartient à L^1.
(b) Soient $(X_1, Y_1) \in L^1 \times L^1$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$. Considérons l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{array} \right.$$

de sorte que $f(X_1, X_2) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$.

- D'après la remarque 126, (X_1, X_2) est une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. D'après la proposition 121, $f(X_1, X_2) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Par théorème de transfert, $f(X_1, X_2)$ possède une espérance finie si la famille :

$$((\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2))_{(z_1, z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)}$$

est sommable. Comme :

$$\begin{aligned} \sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} |\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2| \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2) &\leqslant \sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} (|\lambda_1| \, |z_1| + |\lambda_2| \, |z_2|) \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2) \\ &= |\lambda_1| \sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} |z_1| \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2) \\ &\quad + |\lambda_2| \sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} |z_2| \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2) \end{aligned}$$

il suffit de démontrer que les deux sommes :

$$\sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} |z_1| \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2) \quad \text{et} \quad \sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} |z_2| \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2)$$

sont finies. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} |z_1| \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2) &= \sum_{z_1 \in X_1(\Omega)} |z_1| \sum_{z_2 \in X_2(\Omega)} \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2) && \text{[théorème de Fubini]} \\ &= \sum_{z_1 \in X_1(\Omega)} |z_1| \, \mathbf{P}(X_1 = z_1) && \text{[formule des probabilités totales]} \\ &< +\infty && [X_1 \in L^1]. \end{aligned}$$

De même, nous établissons que la deuxième somme est finie. Ainsi, $f(X_1, X_2)$ est d'espérance finie et, d'après la formule de transfert :

$$\mathbf{E}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \sum_{(z_1,z_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \, \mathbf{P}(X_1 = z_1 \, , \, X_2 = z_2).$$

En reprenant les calculs précédents (en ôtant les modules), nous démontrons que :

$$\begin{aligned}\sum_{(z_1,z_2)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)} (\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)\,\mathbf{P}(X_1=z_1\,,\,X_2=z_2) &= \lambda_1 \sum_{z_1\in X_1(\Omega)} z_1\,\mathbf{P}(X_1=z_1)+\lambda_2 \sum_{z_2\in X_2(\Omega)} z_2\,\mathbf{P}(X_1=z_2)\\ &= \lambda_1\,\mathbf{E}(X_1)+\lambda_2\,\mathbf{E}(X_2)\end{aligned}$$

grâce au théorème de Fubini pour les familles sommables d'éléments de $\mathbf{C}$ et à deux applications de la formule des probabilités totales, une fois par rapport au système quasi-complet d'événements associé à X_1, l'autre fois par rapport au système quasi-complet d'événements associé à X_2.
Cette étude nous livre, non seulement la stabilité de L^1 par combinaisons linéaires, mais encore la linéarité de l'application $\mathbf{E}$.

■

EXERCICE 176 (CENTRAGE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE POSSÉDANT UNE ESPÉRANCE FINIE). — Soit $X\in L^1$.

1. Justifier que la variable aléatoire $aX+b\in L^1$ et que $\mathbf{E}(aX+b)=a\,\mathbf{E}(X)+b$.
2. Démonter que $X-\mathbf{E}(X)\in L^1$ et que $X-\mathbf{E}(X)$ est centrée.

□

THÉORÈME 177 (DE DOMINATION POUR L'ESPÉRANCE). — *Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{C}$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$. Alors*

$$\left.\begin{array}{rc} & |X|\leqslant Y\\ \textit{et} & \\ & Y\in L^1\end{array}\right\}\Longrightarrow X\in L^1.$$

DÉMONSTRATION. — Supposons $|X|\leqslant Y$ et $Y\in L^1$.
(a) Si $Z:=(X,Y)$, alors $Z(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et, par hypothèse :

$$\forall\,(x,y)\in Z(\Omega),\quad |x|\leqslant y.$$

On prêtera attention au fait que l'inégalité $|x|\leqslant y$ n'est pas nécessairement vraie pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
(b) Nous introduisons l'application :

$$f\left|\begin{array}{ccc} Z(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ (x,y) & \longmapsto & |x|\end{array}\right.$$

de sorte que $f(Z)=|X|$. Par théorème de transfert, $X\in L^1$ si et seulement si la famille :

$$\big(f(x,y)\,\mathbf{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}=\big(|x|\,\mathbf{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$$

est sommable.
(c) Nous introduisons à présent l'application :

$$g\left|\begin{array}{ccc} Z(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ (x,y) & \longmapsto & y\end{array}\right.$$

de sorte que $g(Z)=Y$. Comme $Y\in L^1$, nous savons, d'après le théorème de transfert, que la famille

$$\big(g(x,y)\,\mathbf{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}=\big(y\,\mathbf{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$$

est sommable et que, de plus :

$$\mathbf{E}(Y)=\sum_{(x,y)\in Z(\Omega)} y\,\mathbf{P}(Z=(x,y)).$$

(d) Comme :

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in Z(\Omega)} |x|\,\mathbf{P}(Z=(x,y)) &\leqslant \sum_{(x,y)\in Z(\Omega)} y\,\mathbf{P}(Z=(x,y)) \qquad \big[\text{d'après (a)}\big]\\ &=\mathbf{E}(Y)\qquad \big[\text{d'après (c)}\big]\\ &<+\infty\end{aligned}$$

la famille :

$$\big(|x|\,\mathbf{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$$

est sommable. D'après (b), $X \in L^1$. ■

THÉORÈME 178 (PROPRIÉTÉS DE L'ESPÉRANCE). —

1. **Positivité.**
$$\forall X \in L^1, \quad X \geqslant 0 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0 \qquad [\textit{les valeurs de } X \textit{ sont réelles}]$$
2. **Variable aléatoire positive d'espérance nulle.**
$$\forall X \in L^1, \quad X \geqslant 0 \implies \left(\mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0 \textit{ presque sûrement}\right) \qquad [\textit{les valeurs de } X \textit{ sont réelles}]$$
3. **Croissance.**
$$\forall (X, Y) \in L^1 \times L^1, \quad (X \leqslant Y) \implies \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y) \qquad [\textit{les valeurs de } X \textit{ et } Y \textit{ sont réelles}]$$
4. **Inégalité triangulaire.**
$$\forall (X, Y) \in L^1 \times L^1, \quad |\mathbf{E}(X+Y)| \leqslant \mathbf{E}(|X|) + \mathbf{E}(|Y|).$$

DÉMONSTRATION. — (1) Clair.
(2) Soit $X \in L^1$ à valeurs réelles telle que $X \geqslant 0$. Nous démontrons que $\mathbf{E}(X) = 0$ si et seulement si $(X \neq 0)$ est négligeable.

- Supposons que $\mathbf{E}(X) = 0$ et considérons $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$. Comme $X \geqslant 0$:
$$0 \leqslant x\,\mathbf{P}(X = x) \leqslant x\,\mathbf{P}(X = x) + \sum_{y \in X(\Omega)\setminus\{x\}} y\,\mathbf{P}(X = y) = \mathbf{E}(X) = 0.$$
Comme $x \neq 0$, nous en déduisons $\mathbf{P}(X = x) = 0$. Par suite, grâce à la σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$:
$$\mathbf{P}(X \neq 0) = \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \neq 0\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{x \in X(\Omega)\setminus\{0\}} X^{-1}(\{x\})\right) = \sum_{x \in X(\Omega)\setminus\{0\}} \underbrace{\mathbf{P}(X = x)}_{=0} = 0.$$
- Supposons que $(X \neq 0)$ est négligeable. Pour tout $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$:
$$(X = x) \subset (X \neq 0)$$
et donc $\mathbf{P}(X = x) = 0$. Nous calculons :
$$\mathbf{E}(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)\setminus\{0\}} x\,\underbrace{\mathbf{P}(X = x)}_{=0} = 0.$$

(3) Soient $X \in L^1$ et $Y \in L^1$ à valeurs réelles telles que $X \leqslant Y$. Alors $Y - X \in L^1$ (proposition 175) et :
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathbf{E}(Y - X) && [\text{cf. (1)}] \\ &= \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X) && [\text{proposition 175}]. \end{aligned}$$
Nous en déduisons que $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
(4) Nous démontrons seulement le résultats pour $X \in L^1$ et $Y \in L^1$ à valeurs réelles. Comme :
$$X + Y \leqslant |X + Y| \leqslant |X| + |Y|$$
la croissance et la linéarité de l'espérance livrent :
$$(\star) \qquad \mathbf{E}(X + Y) \leqslant \mathbf{E}(|X|) + \mathbf{E}(|Y|).$$
En spécialisant $(\star)$ à $X \leftarrow -X$ et à $Y \leftarrow -Y$ et en appliquant la linéarité de l'espérance, il vient :
$$(\star\star) \qquad -\mathbf{E}(X + Y) \leqslant \mathbf{E}(|X|) + \mathbf{E}(|Y|).$$
De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit :
$$|\mathbf{E}(X + Y)| = \max\{-\mathbf{E}(X + Y), \mathbf{E}(X + Y)\} \leqslant \mathbf{E}(|X|) + \mathbf{E}(|Y|).$$
■

5. Espérance du produit de deux variables indépendantes

Théorème 179 (espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes). — *Soit* $(X,Y) \in L^1 \times L^1$. *Alors :*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \begin{cases} XY \in L^1 \\ \text{et} \\ \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y). \end{cases}$$

Démonstration. — Supposons $X \perp\!\!\!\perp Y$. Considérons l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & z_1 z_2 \end{array} \right.$$

de sorte que $f(X,Y) = XY$.
(a) Remarquons que (X,Y) est une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ (remarque 126) et donc que $f(X,Y) = XY$ est une variable aléatoire (proposition 121).
(b) D'après le théorème de transfert, $XY \in L^1$ si et seulement si la famille $\big(xy\,\mathbf{P}(X=x,\, Y=y)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |x|\,|y|\,\mathbf{P}(X=x,\, Y=y) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |x|\,|y|\,\mathbf{P}(X=x)\,\mathbf{P}(Y=y) && [X \perp\!\!\!\perp Y] \\ &= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} |x|\,\mathbf{P}(X=x) \right) \left(\sum_{y\in X(\Omega)} |y|\,\mathbf{P}(Y=y) \right) && [\text{théorème de Fubini}] \\ &< +\infty && \big[X \text{ et } Y \text{ possèdent une espérance finie}\big]. \end{aligned}$$

Donc $XY \in L^1$.
(c) D'après la formule de transfert :

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbf{P}(X=x,\, Y=y).$$

En reprenant les calculs précédents (en ôtant les modules), nous démontrons que :

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbf{P}(X=x,\, Y=y) = \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}(X=x) \right) \left(\sum_{y\in X(\Omega)} y\,\mathbf{P}(Y=y) \right) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$$

grâce à l'indépendance des variables aléatoires X, Y et au théorème de Fubini pour les familles sommables d'éléments de $\mathbf{C}$. ■

§ 21. Variance, écart type et covariance

Notation. — On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Toutes les variables aléatoires considérées ici seront définies sur cet espace probabilisé et supposées discrètes.

Dans cette partie, L^1 désigne les variables aléatoires **à valeurs réelles** possédant une espérance fini. C'est un sous-$\mathbf{R}$-espace vectoriel de $\mathbf{R}^\Omega$.

1. Espace L^2

Définition 180 (espace L^2). — *On note L^2 l'ensemble des variables aléatoires à valeurs réelles telles que X^2 possède une espérance finie, i.e. :*

$$L^2 := \left\{ X \in \mathbf{R}^\Omega \;:\; X \text{ est une variable aléatoire vérifiant } \mathbf{E}\left(X^2\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\,\mathbf{P}(X=x) < +\infty \right\}.$$

Remarque 181 (une variable aléatoire finie est dans L^2). — Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles telle que $X(\Omega)$ est fini. La famille $\left(x^2\,\mathbf{P}(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est finie et *a fortiori* sommable. Ainsi $X \in L^2$. ■

PROPOSITION 182 (INCLUSION DE L^2 DANS L^1). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. Alors :*

$$X \in L^2 \implies X \in L^1.$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — Le résultat est conséquence de l'inégalité :

$$|X| = |X| \times \mathbf{1}_{(|X|>1)} + |X| \times \mathbf{1}_{(|X|\leqslant 1)} \leqslant X^2 + 1$$

et du théorème de domination. □

EXERCICE 183. — Soient $(n,m) \in \mathbf{N}^2$ tel que $n \leqslant m$ et X une variable aléatoire à valeurs réelles. Démontrer que :

$$X^m \in L^1 \implies X^n \in L^1.$$

□

LEMME 184 (PRODUIT DE DEUX VARIABLES DANS L^2). — *Soit $(X,Y) \in L^2 \times L^2$. Alors :*

$$XY \in L^1.$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — De :

$$(|X|-|Y|)^2 \geqslant 0$$

nous déduisons :

$$|XY| \leqslant \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2}.$$

Nous concluons avec le théorème de domination. □

PROPOSITION 185 (STRUCTURE DE L^2). — *L^2 est un sous-$\mathbf{R}$-espace vectoriel de L^1.*

2. INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

PROPOSITION 186 (UNE PREMIÈRE FORME BILINÉAIRE, SYMÉTRIQUE ET POSITIVE SUR L^2). — *L'application :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} L^2 \times L^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & \mathbf{E}(XY) \end{array} \right.$$

est bien définie, bilinéaire, symétrique et positive. De plus :

$$\forall X \in L^2, \quad \varphi(X,X) = 0 \iff X = 0 \text{ presque sûrement.}$$

THÉORÈME 187 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ ET CAS D'ÉGALITÉ). — *Soit $(X,Y) \in L^2$. Alors :*

$$XY \in L^1 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(XY)^2 \leqslant \mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right).$$

De plus si Y n'est pas nulle presque sûrement :

$$\mathbf{E}(XY)^2 = \mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad X = \lambda Y \text{ presque sûrement}\right).$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — Supposons que Y n'est pas nulle presque sûrement. Alors l'application :

$$f \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \lambda & \longmapsto & \varphi(X+\lambda Y, X+\lambda Y) = \lambda^2\,\mathbf{E}\left(Y^2\right) + 2\lambda\,\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}\left(X^2\right) \end{array} \right.$$

est polynomiale de degré 2 et prend des valeurs positives ou nulles. Son discriminant :

$$\Delta := 4\,\mathbf{E}(XY)^2 - 4\,\mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right)$$

est donc négatif ou nul. □

3. VARIANCE ET ÉCART TYPE

DÉFINITION 188 (VARIANCE ET ÉCART TYPE). — *Soit $X \in L^2$.*

(a) *On définit alors la variance $\mathbf{V}(X)$ de X par :*

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2 \right) \geqslant 0 \qquad [\textit{moyenne des écarts quadratiques à l'espérance}]$$

(b) *L'écart type de X est défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$$

***Remarque 189 (variable de variance nulle).* —** Soit $X \in L^2$. Alors :

$$\mathbf{V}(X) = 0 \iff X = \mathbf{E}(X) \text{ presque sûrement.}$$

■

PROPOSITION 190 (FORMULE DE KÖNIG-HUYGHENS). — *Soit $X \in L^2$.*

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2\,.$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — On développe :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2 \right)$$

grâce à la linéarité de l'espérance et on prend appui sur $\mathbf{E}(a) = a$, si a est un nombre réel. □

***Remarque 191.* —** Si $X \in L^2$ alors :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X)^2.$$

■

THÉORÈME 192 (VARIANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE SUIVANT UNE LOI USUELLE). — *Soit X une variable aléatoire.*

1. *Si X est constante égale à $a \in \mathbf{R}$, alors $X \in L^2$ et $\mathbf{V}(X) = 0$.*
2. *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, où $p \in]0,1[$, alors $X \in L^2$ et $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.*
3. *Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, où $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$, alors $X \in L^2$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.*
4. *Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors $X \in L^2$ et $\mathbf{V}(X) = \lambda$.*
5. *Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$, alors $X \in L^2$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.*

PROPOSITION 193 (EFFET D'UNE TRANSFORMATION AFFINE SUR LA VARIANCE). — *Soit $X \in L^2$. Alors :*

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad aX + b \in L^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(aX+b) = a^2\,\mathbf{V}(X).$$

Définition 194 (variable aléatoire réduite). — *Une variable aléatoire X à valeurs complexes est dite réduite si :*

(a) *si $X \in L^2$;*

(b) $\mathbf{V}(X) = 1$.

Exercice 195 (centrage et réduction d'une variable aléatoire d'espérance finie). — Soit $X \in L^2$. Démontrer que la variable aléatoire :

$$\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée et réduite. □

4. Covariance de deux variables aléatoires

Définition 196 (covariance de deux variables aléatoires). — *Soit $(X, Y) \in L^2 \times L^2$. Alors :*

$$(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)) \in \mathbf{L}^1$$

et on définit la covariance de X et Y par :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) := \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))) \qquad [\textit{moyenne des produits des écarts aux moyennes}].$$

Remarque 197 (covariance versus variance). **—** Si $X \in L^2$, alors :

$$\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X).$$

■

Proposition 198 (la covariance est une application bilinéaire symétrique positive). — *L'application :*

$$\mathbf{Cov} \left| \begin{array}{ccc} L^2 \times L^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \mathbf{Cov}(X, Y) \end{array} \right.$$

est bilinéaire, symétrique et positive, mais non nécessairement définie.

Exercice 199 (coefficient de corrélation). — Soit $(X, Y) \in L^2 \times L^2$ tel que X et Y sont non constantes presque sûrement. Le coefficient de corrélation de X et Y est défini par :

$$\rho(X, Y) := \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}.$$

1. Démontrer que :

$$-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1.$$

2. On suppose que $\rho(X, Y) = -1$ ou $\rho(X, Y) = 1$. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$X = a\,Y + b \text{ presque sûrement.}$$

□

Proposition 200 (calcul pratique de la covariance). — *Soit $(X, Y) \in L^2 \times L^2$. Alors :*

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y).$$

Proposition 201 (covariance de deux variables indépendantes). — *Soit* $(X,Y)\in L^2\times L^2$. *Alors :*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathbf{Cov}(X,Y)=0.$$

La réciproque de la proposition précédente est fausse : des variables peuvent être décorrélées, sans pour autant être indépendantes. Cf. exercice suivant.

Exercice 202 (variables décorrélées, non indépendantes). — Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}(\{-1,0,1\})$. On note Y la variable aléatoire définie par :

$$Y := \begin{cases} 1 & \text{si } X=0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de Y.
2. Calculer la loi du couple (X,Y).
3. Justifier que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Démontrer que $\mathbf{Cov}(X,Y)=0$.

□

5. Variance d'une somme

Proposition 203 (variance d'une somme de variables aléatoires). — *Soient un entier* $n\geqslant 2$ *et* $(X_1,\ldots,X_n)\in\left(L^2\right)^n$.

1. *La variance de la somme* $\sum_{i=1}^n X_i$ *est égale à :*

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)\;+\;2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{Cov}(X_i,X_j).$$

2. *Si de plus les variables* $X_1,\ldots,X_n$ *sont deux à deux indépendantes, alors :*

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i).$$

§ 22. Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Proposition 204 (inégalité de Markov). — *Soient* X *une variable aléatoire telle que :*

$$X\geqslant 0 \quad \textit{et} \quad X\in L^1.$$

Alors :

$$\forall \in \mathbf{R}_+,\quad a\,\mathbf{P}(X\geqslant a)\leqslant \mathbf{E}(X).$$

Démonstration. — Soit $a\in\mathbf{R}^+$. Comme $X\geqslant 0$:

$$X = X\times \mathbf{1}_{(X\geqslant a)}+X\times\mathbf{1}_{(X<a)}\geqslant X\times\mathbf{1}_{(X\geqslant a)}\geqslant a\times\mathbf{1}_{(X\geqslant a)}$$

et, par croissance et linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X)\geqslant a\,\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X\geqslant a)}\right)=a\,\mathbf{P}(X\geqslant a).$$

■

PROPOSITION 205 (INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV). — *Soit $X \in L^2$. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme :

$$(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \left((X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right)$$

nous avons :

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}\left((X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right).$$

Comme $(X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant 0$ et $(X - \mathbf{E}(X))^2 \in L^1$, nous pouvons appliquer l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\varepsilon^2\, \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \varepsilon^2\, \mathbf{P}\left((X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{V}(X).$$

■

THÉORÈME 206 (LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES). — *Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, de même loi et appartenant à L^2. Notons :*

- **(a)** $m := \mathbf{E}(X_1)$;
- **(b)** *pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

DÉMONSTRATION. — Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$. La variable $\dfrac{S_n}{n}$ appartient à L^2.

(a) Par linéarité de l'espérance :

$$(\star) \qquad \mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = m.$$

(b) Par effet d'une transformation affine sur la variance et par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$:

$$(\star\star) \qquad \mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_1) = \frac{\mathbf{V}(X_1)}{n}.$$

(c) Nous calculons :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) && [\text{d'après } (\star)] \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) && [\text{inégalité de Biénaymé-Tchebychev}] \\ &= \frac{1}{n\,\varepsilon^2}\mathbf{V}(X_1) && [\text{d'après } (\star\star)] \end{aligned}$$

et nous concluons en appliquant le théorème d'encadrement.

■

Remarque 207 (interprétation fréquentielle de la loi faible des grands nombres). — La loi faible des grands nombres peut s'interpréter comme suit. Si l'on répète « un très grand nombre de fois » une même expérience aléatoire, de manière indépendante, on s'attend à ce que le résultat moyen de ces expériences soit proche de l'espérance du résultat de chaque expérience. Ainsi, après « un très grand nombre » de lancers d'une pièce équilibrée, on s'attend à avoir presque autant de piles que de faces. ■

§ 23. FONCTIONS GÉNÉRATRICES

NOTATION. — Dans toute cette partie, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$. Toutes les variables aléatoires considérées ici seront définies sur cet espace probabilisé et elles seront toutes à valeurs dans $\mathbf{N}$.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE

DÉFINITION 208 (SÉRIE GÉNÉRATRICE). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On appelle série génératrice de X la série entière*

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(X = n)\, z^n.$$

***Remarque 209.* —** La série génératrice est entièrement déterminée par la loi de X. Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ de même loi ont donc même série génératrice. ■

PROPOSITION 210 (RAYON DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Le rayon de convergence de la série génératrice de X est supérieur ou égal à 1.*

DÉMONSTRATION. — Comme la suite :

$$\left(\mathbf{P}(X = n)\, 1^n\right)_{n \in \mathbf{N}}$$

est bornée, nous savons :

$$R\left(\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(X = n)\, z^n\right) := \sup\left\{r \in \mathbf{R}_+ \;:\; \left(\mathbf{P}(X = n)\, r^n\right)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée}\right\} \geqslant 1.$$

■

PROPOSITION 211 (CONVERGENCE NORMALE DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE SUR LE DISQUE FERMÉ). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. La série génératrice converge normalement sur le disque fermé :*

$$\overline{D(0,1)} := \{z \in \mathbf{C} \;:\; |z| \leqslant 1\}.$$

DÉMONSTRATION. — (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \overline{D(0,1)} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \mathbf{P}(X = n)\, z^n. \end{array} \right.$$

Nous observons que, pour tout $z \in \overline{D(0,1)}$:

$$\left|\mathbf{P}(X = n)\, z^n\right| \leqslant \mathbf{P}(X = n) \qquad [\text{indépendant de } z].$$

L'inégalité ci-dessous est une égalité pour $z = 1$ (plus généralement pour tout $z \in \mathbf{U}$). Donc :

$$\|f_n\|_{\infty, \overline{D(0,1)}} = \mathbf{P}(X = n).$$

(b) Comme X est à valeurs dans $\mathbf{N}$:

$$\Omega = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (X = n).$$

Par σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$, la famille $(\mathbf{P}(X = n))_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable (de somme $\mathbf{P}(\Omega) = 1$). Nous en déduisons que la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(X = n)$ converge.

■

2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE

DÉFINITION 212 (FONCTION GÉNÉRATRICE). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. La fonction génératrice de X, notée $\mathbf{G}_X$, est définie par :*

$$\mathbf{G}_X : t \longmapsto \mathbf{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\, t^n \qquad \left[\textit{formule de transfert}\right].$$

PROPOSITION 213 (PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.*

1. *La fonction $\mathbf{G}_X$ est au moins définie sur $\overline{D(0,1)}$ (mais son domaine de définition peut être plus grand).*
2. $\mathbf{G}_X(1) = 1$
3. *La fonction $\mathbf{G}_X$ est continue sur $\overline{D(0,1)}$.*
4. *La fonction $\mathbf{G}_X$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.*

DÉMONSTRATION. — (1) La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence simple. Le résultat est alors conséquence de la proposition 211.
(2) Ce résultat a déjà été établi au point (b) de la démonstration de la proposition 211.
(3) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \overline{D(0,1)} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \mathbf{P}(X=n)\, z^n \end{array} \right.$$

est continue sur $\overline{D(0,1)}$. Comme la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\overline{D(0,1)}$ (proposition 211), sa somme $\mathbf{G}_X$ est continue sur $\overline{D(0,1)}$.
(4) Nous savons que le rayon de convergence R de la série génératrice de X est au moins 1. D'après le cours sur les séries entières, nous savons que sa somme $\mathbf{G}_X$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[\supset]-1,1[$.

■

3. LA FONCTION GÉNÉRATRICE DÉTERMINE LA LOI

THÉORÈME 214 (LA FONCTION GÉNÉRATRICE DÉTERMINE LA LOI DE LA VARIABLE ALÉATOIRE). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Alors :*

$$\mathbf{P}(X=n) = \frac{\mathbf{G}_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

DÉMONSTRATION. — D'après le cours sur les séries entières, si $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R>0$, alors la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 De plus :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Nous appliquons ce résultat à la série génératrice de X, pour obtenir le résultat du théorème. ■

Remarque 215. — Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. Du théorème précédent, nous déduisons que :

$$\mathbf{G}_X = \mathbf{G}_Y \implies X \sim Y.$$

■

4. FONCTIONS GÉNÉRATRICES ET LOIS USUELLES

PROPOSITION 216 (FONCTION GÉNÉRATRICE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE SUIVANT UNE LOI USUELLE). — *Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ et R le rayon de convergence de sa série génératrice.*

1. *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, où $p \in]0,1[$, alors $R = +\infty$ et :*
$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{G}_X(t) = 1 - p + pt.$$
2. *Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, où $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$, alors $R = +\infty$ et :*
$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{G}_X(t) = (1 - p + pt)^n.$$
3. *Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors $R = +\infty$ et :*
$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{G}_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$
4. *Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$, alors $R = \dfrac{1}{1-p} > 1$ et :*
$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{G}_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

5. FONCTION GÉNÉRATRICE ET ESPÉRANCE

THÉORÈME 217 (FONCTION GÉNÉRATRICE ET ESPÉRANCE). — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.*

1. *La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si la fonction $\mathbf{G}_X$ est dérivable en 1 à gauche.*
2. *Si $\mathbf{G}_X$ est dérivable en 1 à gauche alors :*
$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{G}_X'(1).$$

DÉMONSTRATION. — (a) Soit $t \in [0,1[$. Nous calculons :
$$\frac{\mathbf{G}_X(1) - \mathbf{G}_X(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\, \frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \qquad [\text{expression sommatoire du taux d'accroissement}].$$
Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, la fonction :
$$t \longmapsto \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k$$
est croissante sur $[0,1[$. Nous en déduisons que la fonction :
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\mathbf{G}_X(1) - \mathbf{G}_X(t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \end{array} \right.$$
est elle aussi croissante sur $[0,1[$.

(b) Supposons que X possède une espérance finie, i.e. que la série $\sum_{n \geqslant 1} n\,\mathbf{P}(X=n)$ converge. Soit $t \in [0,1[$. Comme :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \leqslant n\,\mathbf{P}(X=n)$$
nous savons que :
$$\varphi(t) = \frac{\mathbf{G}_X(1) - \mathbf{G}_X(t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X=n) = \mathbf{E}(X) < +\infty.$$
La fonction φ est croissante et majorée sur $[0,1[$. Par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite finie en 1^-, i.e. la fonction $\mathbf{G}_X$ est dérivable en 1 à gauche. De plus :
$$\mathbf{G}_X'(1) := \lim_{t \to 1^-} \varphi(t) \leqslant \mathbf{E}(X).$$

(c) Supposons que $\mathbf{G}_X$ est dérivable en 1 à gauche, i.e. que la fonction φ possède une limite finie en 1^-. Comme la fonction φ est croissante sur $[0,1[$, le théorème de la limite monotone nous livre :

$$\mathbf{G}'_X(1) := \lim_{t\to 1^-} \varphi(t) = \sup\left\{\varphi(t)\ :\ t\in[0,1[\right\}.$$

De (a), nous déduisons alors que :

$$\forall\, t\in[0,1[,\quad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \leqslant \mathbf{G}'_X(1).$$

Fixons un entier $N\in\mathbf{N}^*$. Alors :

$$\forall\, t\in[0,1[,\quad \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k}_{\geqslant 0} \leqslant \mathbf{G}'_X(1)$$

et donc :

$$\forall\, t\in[0,1[,\quad \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \leqslant \mathbf{G}'_X(1).$$

En faisant tendre t vers 1^- dans la somme finie de gauche, il vient :

$$\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbf{P}(X=n) \leqslant \mathbf{G}'_X(1).$$

La suite $\left(\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbf{P}(X=n)\right)_{N\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée par $\mathbf{G}'_X(1)$. Par théorème de la limite monotone, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} n\,\mathbf{P}(X=n)$ est donc convergente, i.e. X possède une espérance finie. De plus :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X=n) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbf{P}(X=n)\ :\ N\in\mathbf{N}^*\right\} \leqslant \mathbf{G}'_X(1).$$

(d) Supposons que G_X soit dérivable en 1 à gauche. Alors X possède une espérance finie. Les résultats obtenus en (b) et (c) s'appliquent. Ainsi :

$$\mathbf{G}'_X(1) \underset{\text{(b)}}{\leqslant} \mathbf{E}(X) \underset{\text{(c)}}{\leqslant} \mathbf{G}'_X(1).$$

■

Remarque 218 (autre mode de calcul des espérances pour les lois usuelles). — Grâce au théorème 217, on peut retrouver l'espérance et la variance de variables suivant une loi de Bernoulli, une loi binomiale, une loi de Poisson ou une loi géométrique, à partir des fonctions génératrices des lois usuelles 216. ■

EXERCICE 219 (VARIANCE ET SÉRIE GÉNÉRATRICE SI LE RAYON EST STRICTEMENT PLUS GRAND QUE 1). — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que le rayon de convergence R de sa série génératrice vérifie $R>1$.

1. Justifier que la fonction $\mathbf{G}_X$ est infiniment dérivable au voisinage de 1.
2. Démontrer que $X\in L^2$ et que :
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{G}''_X(1) + \mathbf{G}'_X(1) - \left(\mathbf{G}'_X(1)\right)^2.$$
3. En déduire un autre mode de calcul des variances d'une variable aléatoire de loi binomiale (resp. de Poisson, géométrique).
4. Démontrer que X possède des moments de tout ordre, i.e. que, pour tout $p\in\mathbf{N}$, $X^p\in L^1$.

□

EXERCICE 220 (VARIANCE ET FONCTION GÉNÉRATRICE DANS LE CAS GÉNÉRAL). — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

1. Démontrer que $X\in L^2$ si et seulement si $\mathbf{G}_X$ est deux fois dérivable en 1 à gauche.
2. Démontrer que, si $\mathbf{G}_X$ est deux fois dérivable en 1 à gauche, alors :
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{G}''_X(1) + \mathbf{G}'_X(1) - \left(\mathbf{G}'_X(1)\right)^2.$$

□

6. FONCTION GÉNÉRATRICE D'UNE SOMME DE VARIABLES INDÉPENDANTES

THÉORÈME 221 (FONCTION GÉNÉRATRICE D'UNE SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES). — *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes. Alors :*

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad \mathbf{G}_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{G}_{X_n}(t).$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — (a) On démontre le résultat dans le cas où $n = 2$. Soit $t \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned} X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 &\Longrightarrow t^{X_1} \perp\!\!\!\perp t^{X_2} && \text{[lemme des coalitions]} \\ &\Longrightarrow \mathbf{E}\left(t^{X_1}\, t^{X_2}\right) = \mathbf{E}\left(t^{X_1}\right) \mathbf{E}\left(t^{X_2}\right) && \text{[proposition 179]} \\ &\Longrightarrow \mathbf{E}\left(t^{X_1+X_2}\right) = \mathbf{E}\left(t^{X_1}\right) \mathbf{E}\left(t^{X_2}\right) \\ &\Longrightarrow \mathbf{G}_{X_1+X_2}(t) = \mathbf{G}_{X_1}(t)\, \mathbf{G}_{X_2}(t). \end{aligned}$$

(b) On raisonne par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$ pour établir le résultat de l'énoncé. □

EXERCICE 222 (SOMME DE VARIABLES DE BERNOULLI INDÉPENDANTE ET DE MÊME LOI). — Soient $p \in]0,1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables de loi $\mathscr{B}(p)$, indépendantes. On pose $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Calculer la fonction génératrice $\mathbf{G}_S$ de la variable S.
2. En déduire la loi de S.
3. Justifier que $S \in L^2$, puis calculer $\mathbf{E}(S)$ et $\mathbf{V}(S)$ à l'aide de la relation $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$, de l'espérance et de la variance de X_1.

□

EXERCICE 223. — Une urne contient quatre boules numérotées $0, 1, 1, 2$. On effectue n tirages avec remise. On suppose les tirages mutuellement indépendants. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n égale à la somme des numéros obtenus. □

EXERCICE 224 (FORMULE DE WALD). — Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, de même loi. On suppose toutes ces variables aléatoires indépendantes. On note :

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k \qquad \text{[le nombre de terme de la somme est aléatoire]}\,.$$

1. Démontrer que :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(S = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k)\, \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_k = n).$$
2. En déduire
$$\forall\, t \in [-1,1], \quad \mathbf{G}_S(t) = \mathbf{G}_N\left(\mathbf{G}_{X_1}(t)\right).$$
3. Supposons que N et X_1 possèdent une espérance finie. Démontrer que S possède une espérance finie et que :
$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\, \mathbf{E}(X_1) \qquad \text{[formule de Wald]}\,.$$
4. On lance une pièce équilibrée. Tant que l'on obtient pile, on lance on dé équilibré à six faces. Dès que l'on obtient face, on s'arrête. Déterminer l'espérance du nombre total de points accumulés au cours d'une partie.

□