Endomorphismes des espaces euclidiens

Chapitre 14

par David Blottière, le 31 janvier 2024 à 07h38

Sommaire

§ 1. ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME

NOTATION. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

THÉORÈME 1 (DE REPRÉSENTABILITÉ DE RIESZ). — *L'application :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \langle x\,,\, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ y & \longmapsto & \langle x\,,\, y \rangle \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels.*

***Remarque 2 (conséquence du théorème de Riesz).* —** Soit f une forme linéaire sur E. D'après le théorème 1 :

$$\exists !\, x \in E, \quad \forall\, y \in E, \quad f(y) = \langle x\,,\, y \rangle.$$

On dit que le vecteur x de E représente la forme linéaire f. ■

DÉFINITION 3 (ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME). — *Soit u un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé adjoint de u, tel que :*

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x)\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, u^*(y) \rangle.$$

PROPOSITION 4 (PROPRIÉTÉS L'ADJOINT). — *Soient u et v deux endomorphismes de E.*

1. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ [*adjoint d'une composée*]
2. $(u^*)^* = u$ [*involutivité de l'adjoint*]

PROPOSITION 5 (MATRICE DE L'ADJOINT DANS UNE BASE ORTHONORMÉE). — *Soit u un endomorphisme de E et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)^\top.$$

EXERCICE 6. — On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, 4x - 3y + 5z, -x + 7y - 2z). \end{array} \right.$$

Calculer, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $u^*(x, y, z)$.

□

PROPOSITION 7 (PROPRIÉTÉ DE STABILITÉ DE L'ADJOINT). — *Soient u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

$$F \text{ est stable par } u \iff F^\perp \text{ est stable par } u^*.$$

§ 2. MATRICES ORTHOGONALES

NOTATION. — Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

DÉFINITION 8 (MATRICE ORTHOGONALE). — *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite orthogonale si :*

$$A^\top A = I_n.$$

***Remarque 9.* —** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1. La matrice A est orthogonale si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = A^\top$.
2. Si A est une matrice orthogonale, alors la matrice $A^{-1} = A^\top$ est orthogonale.

■

DÉFINITION 10 (CARACTÉRISATION DES MATRICES ORTHOGONALES). — *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots, C_n$ et les lignes $L_1, \ldots, L_n$.*

1. *La matrice A est orthogonale si et seulement si $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée l'espace euclidien $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ usuel.*
2. *La matrice A est orthogonale si et seulement si $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ usuel.*

EXERCICE 11. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ et du produit scalaire usuel $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale. On note $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A et on pose $u := \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $v := \sum_{i=1}^{n} C_i$.

1. Calculer $\langle u\,, v\rangle$ et en déduire que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.
2. L'inégalité précédente est-elle optimale ?

□

PROPOSITION 12 (MATRICE ORTHOGONALE VS. MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE ORTHONORMÉE). — *Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.*

1. *Si $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ est une base orthonormée de E, alors la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est orthogonale.*
2. *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice orthogonale, alors l'unique base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E tel que $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = A$ est une base orthonormée de E.*

§ 3. GROUPE ORTHOGONAL

NOTATION. — Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

DÉFINITION 13 (GROUPE ORTHOGONAL). — *L'ensemble :*

$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; A^\top A = I_n\right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$, appelé groupe orthogonal.

***Exemple 14 (matrices orthogonales en format $(2,2)$).* —** Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, les matrices :

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

appartiennent à $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$. ■

Exemple 15 (construction par blocs de matrices orthogonales). —

1. Soient n_1 et n_2 des nombres entiers naturels non nuls. Soient $A_1 \in \mathrm{O}_{n_1}(\mathbf{R})$ et $A_2 \in \mathrm{O}_{n_2}(\mathbf{R})$. Alors :
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^\top \times \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^\top & 0 \\ 0 & A_2^\top \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^\top \times A_1 & 0 \\ 0 & A_2^\top \times A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = I_{n_1+n_2}$$
Donc $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_{n_1+n_2}(\mathbf{R})$.
2. Plus généralement, soient $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des nombres entiers naturels non nuls et soient $A_1 \in \mathrm{O}_{n_1}(\mathbf{R}), A_2 \in \mathrm{O}_{n_2}(\mathbf{R}), \ldots, A_p \in \mathrm{O}_{n_p}(\mathbf{R})$. Alors :
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_{n_1+n_2+\ldots+n_p}(\mathbf{R})$$
3. En particulier, si $(\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbf{R}^p$, alors la matrice :
$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$
est orthogonale

■

Exercice 16. — Démontrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. □

Exercice 17. — Démontrer que le groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \times)$ n'est pas abélien si $n \geqslant 2$. □

§ 4. Groupe spécial orthogonal

Notation. — Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Proposition 18 (déterminant d'une matrice orthogonale). — *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors :*
$$A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \quad \Longrightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}.$$

La réciproque de l'implication de la proposition 18 est fausse si $n \geqslant 2$. La matrice :
$$\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{2}, 2, 1, \ldots, 1\right)$$
donne un contre-exemple.

Définition 19 (matrice orthogonale positive/directe (resp. négative/indirecte)). — *Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.*

1. *La matrice A est dite positive ou directe si* $\det(A) = 1$.
2. *La matrice A est dite négative ou indirecte si* $\det(A) = 1$.

DÉFINITION 20 (GROUPE SPÉCIAL ORTHOGONAL). — *L'ensemble :*

$$\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \ : \ \det(A) = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \times)$*, appelé groupe spécial orthogonal.*

Exemple 21 (matrices orthogonales positives en format $(2,2)$***).*** — Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, les matrices :

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

appartiennent à $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$. ■

EXERCICE 22. — Démontrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. □

EXERCICE 23. — Démontrer les ensembles $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ et :

$$O_n(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \ : \ \det(A) = -1\}$$

sont équipotents. □

§ 5. ORIENTATION D'UN ESPACE VECTORIEL RÉEL DE DIMENSION FINIE

NOTATION. — Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

LEMME 24 (RELATION D'ÉQUIVALENCE SUR LES BASES DE E). — *On définit la relation $\sim$ sur l'ensemble des bases de E en posant, pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E :*

$$\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0.$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E, qui comporte deux classes d'équivalence.

DÉFINITION 25 (ORIENTATION DE E). — *Une orientation de E est le choix d'une des deux classes d'équivalence pour la relation $\sim$ sur l'ensemble des bases de E définie dans le lemme 24.*

Remarque 26. — En pratique, on oriente E en fixant une base $\mathcal{B}$ de E. L'orientation de E est alors donnée par la classe de $\mathcal{B}$ pour la relation $\sim$ sur l'ensemble des bases de E. ■

DÉFINITION 27 (BASES DIRECTES (RESP. INDIRECTES)). — *Supposons l'espace E orienté par le choix d'une base $\mathcal{B}_0$.*

1. *Une base $\mathcal{B}$ de E est dite directe si :*

$$\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \det\left(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}\right) > 0$$

i.e. si $\mathcal{B}$ définit la même orientation de E.

2. *Une base $\mathcal{B}$ de E est dite indirecte si :*

$$\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \det\left(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}\right) < 0$$

i.e. si $\mathcal{B}$ définit l'autre orientation de E.

Définition 28 (bases directes (resp. indirectes)). — *Supposons ici que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ de sorte que $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ est un espace euclidien. Si deux bases orthonormées $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de E définissent la même orientation de E, alors :*

$$\forall\, (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \det_{\mathscr{B}_1}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathscr{B}_2}(u_1, \dots, u_n).$$

§ 6. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Définition 29 (isométrie vectorielle de E). — *Un endomorphisme u de E est appelé isométrie vectorielle de E (ou automorphisme orthogonal de E) si :*

$$\forall\, x \in R, \quad || u(x) || = || x || \qquad [u \text{ préserve la norme}].$$

Remarque 30. — Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E. ■

Proposition 31 (une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle de E). — *Soit s une symétrie orthogonale de E, i.e. :*

(a) $s \in \mathscr{L}(E)$;

(b) $s^2 = \mathrm{id}_E$;

(c) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Alors s est une isométrie vectorielle de E.

Rappel 32 (projection orthogonale). — On dit que p est une projection orthogonale de E si :

(a) $b \in \mathscr{L}(E)$;

(b) $p^2 = p$;

(c) $\mathrm{Ker}(p) \perp \underbrace{\mathrm{Im}(p)}_{\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)}$.

■

Une projection orthogonale p de E distincte de id_E n'est pas une isométrie vectorielle de E. En effet, une telle projection orthogonale n'est pas injective.

Exercice 33 (symétrie orthogonale géométrique). — Soit F un sous-espace vectoriel de E. On considère la symétrie s_F par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$ définie par :

$$s \left| \begin{array}{ccc} E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_{F^\perp} & \longmapsto & s(x) = x_F - x_{F^\perp}. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que s_F est une symétrie orthogonale.
2. Justifier que s_F est une isométrie vectorielle.
3. Démontrer que $s_F = 2\,p_F - \mathrm{id}_E$, où p_F est la projection orthogonale de E sur F.
4. Déduire du résultat de la question 3 une autre démonstration du résultat de la question 2.

□

EXERCICE 34 (RÉFLEXION ORTHOGONALE). — Soit H un hyperplan de E et a un vecteur unitaire engendrant la droite $H^{\perp}$. La réflexion orthogonale de E par rapport à H est définie par :

$$r \left| \begin{array}{ccc} E = H \oplus \mathrm{Vect}(a) & \longrightarrow & E \\ x = h + \lambda \cdot a & \longmapsto & r(x) = h - \lambda \cdot a. \end{array} \right.$$

Démontrer que :

$$\forall x \in E, \quad r(x) = x - 2 \cdot \langle x, a \rangle \cdot a$$

puis que r est une isométrie vectorielle de E. □

Rappel 35 (identité de polarisation). — Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \cdot \left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 \right)$$

■

THÉORÈME 36 (CARACTÉRISATION DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES). — *Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *u est une isométrie vectorielle.*

(b) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \qquad$ [*u préserve le produit scalaire*]

(c) *Pour toute BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E.*

(d) *Il existe une BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E.*

(e) *u est un automorphisme de E et $u^{-1} = u^*$.*

§ 7. GROUPE ORTHOGONAL D'UN ESPACE EUCLIDIEN

NOTATION. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

DÉFINITION 37 (GROUPE ORTHOGONAL D'UN ESPACE EUCLIDIEN). — *L'ensemble :*

$$\mathrm{O}(E) := \{u \in \mathscr{L}(E) \;:\; u \text{ est une isométrie vectorielle}\}$$

est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, qui est appelé groupe orthogonal de E.

Remarque 38. — Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Alors l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} (\mathrm{O}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \times) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array} \right.$$

est bien définie et est un isomorphisme de groupes. ■

§ 8. GROUPE SPÉCIAL ORTHOGONAL D'UN ESPACE EUCLIDIEN

NOTATION. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

PROPOSITION 39 (DÉTERMINANT D'UNE ISOMÉTRIE VECTORIELLE). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$u \in \mathrm{O}(E) \quad \Longrightarrow \quad \det(u) \in \{-1, 1\}.$$

EXERCICE 40. — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\det(u) \in \{-1, 1\}$. L'endomophisme u de E est-il nécessairement une isométrie vectorielle de E. □

Définition 41 (isométrie directe (resp. isométrie indirecte)). — *Soit $u \in \mathrm{O}(E)$.*

1. *On dit que l'isométrie vectorielle E est directe si* $\det(u) = 1$.
2. *On dit que l'isométrie vectorielle E est indirecte si* $\det(u) = -1$.

Exercice 42. — On munit $\mathbf{R}^2$ de son produit scalaire usuel et on définit les applications u et v par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\,,\, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \end{array} \right. \qquad v \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y\,,\,-x) \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que u et v sont des isométries vectorielles.
2. Préciser la nature géométrique de u et son caractère direct ou indirect.
3. Préciser la nature géométrique de v et son caractère direct ou indirect.

□

Définition 43 (groupe spécial orthogonal de E). — *L'ensemble :*

$$\mathrm{SO}(E) := \{u \in \mathrm{O}(E)\ :\ \det(u) = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$*, appelé groupe spécial orthogonal de E.*

§ 9. Isométrie vectorielle en dimension 2

Notation. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension 2.

Théorème 44 (matrices orthogonales de format (2,2)). — *L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ orthogonales se décompose comme suit :*

$$\mathrm{O}_2(\mathbf{R}) = \underbrace{\left\{R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbf{R}\right\}}_{\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})} \bigsqcup \underbrace{\left\{S(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbf{R}\right\}}_{\mathrm{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})}.$$

Proposition 45 (morphisme canonique de $(\mathbf{R},+)$ vers $(\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}),\times)$). — *L'application R définie par :*

$$R \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}),\times) \\ \theta & \longmapsto & R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes, qui est surjectif et de noyau :

$$2\pi\mathbf{Z} := \{2k\pi\ :\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Exercice 46. — Démontrer que les groupes $(\mathbf{U}, \times)$ et $(\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$ sont isomorphes. □

Exercice 47. — Démontrer que le groupe $(\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$ est abélien et que le groupe $(\mathrm{O}_2(\mathbf{R}), \times)$ n'est pas abélien. □

Exercice 48. — Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E, $\theta \in \mathbf{R}$ et :

$$u := \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e_2.$$

Soit r la réflexion orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(u)$. Calculer la matrice de r dans la base $\mathscr{B}$. □

Théorème 49 (classification des isométries vectorielles d'un plan orienté). — *Soient $u \in \mathrm{O}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E qui l'oriente.*

1. *Si u est une isométrie directe, alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} =: R(\theta).$$

L'application u est la rotation d'angle θ.

2. *Si u est une isométrie indirecte, alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} =: S(\theta).$$

L'application u est la réflexion par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e_2.$$

Remarque 50 (réduction d'une isométrie indirecte d'un plan euclidien). — Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E qui l'oriente et u une isométrie indirecte de E. Du théorème 49 nous déduisons qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

Lemme 51 (base orthonormée directe incomplète). — *Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E qui l'oriente et u un vecteur de E tel que $||u|| = 1$. Alors il existe un unique vecteur v de E tel que (u, v) est une base orthonormée directe de E.*

Angle orienté de deux vecteurs non nuls. — Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E qui l'oriente, u_1, u_2 deux vecteurs non nuls de E.

- Soit v_1 l'unique vecteur de E telle que :
$$\mathscr{B}_1 := \left(\frac{u_1}{||u_1||}, v_1\right)$$
est une base orthonormée directe de E.
- Soit v_2 l'unique vecteur de E telle que :
$$\mathscr{B}_2 := \left(\frac{u_2}{||u_2||}, v_2\right)$$
est une base orthonormée directe de E.
- L'unique endomorphisme f de E tel que :
$$f(u_1) = u_2 \quad \text{et } f(v_1) = v_2$$
est une isométrie directe de E. Donc, il existe $\theta \in \mathbf{R}$, unique à un multiple entier de 2π près, tel que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} =: R(\theta).$$
- Ce réel θ, bien défini modulo 2π, est appelé angle orienté du couple de vecteurs (u, v) et on note :
$$\widehat{(u, v)} = \theta \quad [2\pi].$$

Exercice 52. — Munissons le plan euclidien $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ qui l'oriente.

1. Soit u un vecteur non nul de E. Justifier :
$$\widehat{(u, u)} = 0 \quad [2\pi].$$

2. Soit u un vecteur non nul de E. Justifier :
$$\widehat{(u,-u)} = \pi \quad [2\pi].$$

3. Soient u, v, w trois vecteurs non nuls de E. Démontrer que :
$$\widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)} = \widehat{(u,w)} \quad [2\pi].$$

□

§ 10. RÉDUCTION DES ISOMÉTRIES

THÉORÈME 53 (EXISTENCE D'UNE DROITE OU D'UN PLAN STABLE). — *Soient E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe un sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2 de E qui est stable par u.*

THÉORÈME 54 (SOUS-ESPACES STABLES PAR UNE ISOMÉTRIE). — *Soient $(E, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $u \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.*

THÉORÈME 55 (RÉDUCTION DES ISOMÉTRIES D'UN ESPACE EUCLIDIEN). — *$(E, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe :*

(a) *une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E ;*

(b) *des nombres réels $\theta_1, \ldots, \theta_r$*

tels que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

où, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

DÉMONSTRATION. — On démontre le résultat par récurrence forte sur $n \geqslant 1$, la dimension de l'espace euclidien ambiant.

- Cas où $n = 1$. Considérons un vecteur unitaire e_1 de E. La base $\mathscr{B} := (e_1)$ de E est orthonormée et, comme u est une isométrie vectorielle de E :
$$\det(u) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \pm 1.$$
On en déduit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, de format $(1,1)$, vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = (\pm 1)$.
- Cas où $n = 2$ et u est une isométrie positive. Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée quelconque de E, alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = R(\theta) \qquad [\text{théorème 49}].$$
- Cas où $n = 2$ et u est une isométrie négative. Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base orthonormée quelconque de E, alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = S(\theta) \qquad [\text{théorème 49}]$$
et u est la réflexion orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}(f_1)$, où $f_1 := \cos(\theta/2) \cdot e_1 + \sin(\theta/2) \cdot e_2$. Si l'on introduit le vecteur $f_2 := -\sin(\theta/2) \cdot e_1 + \cos(\theta/2) \cdot e_2$, qui engendre $\mathrm{Vect}(f_1)^\perp$, alors $\mathscr{C} := (f_1, f_2)$ est une base orthonormée de E et :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Hérédité. Soit un entier $n \geqslant 2$ tel que le résultat est vrai pour tous les espaces euclidiens de dimension $1, 2, \ldots, n$. Considérons le cas où l'espace euclidien E est de dimension $n+1$.
  - D'après le théorème 53, il existe un sous-espace vectoriel F de E, de dimension 1 ou 2, qui est stable par u. D'après l'initialisation à $n=1$ et $n=2$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_F$ de F telle que :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(u_F) = (\pm 1) \text{ ou } R(\theta) \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
  où u_F est l'endomorphisme de F induit par u et $\theta \in \mathbf{R}$.
  - D'après le théorème 54, le sous-espace vectoriel $F^\perp$ de E de dimension n ou $n-1$ est stable par u. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ de $F^\perp$ induit par u. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_{F^\perp}$ de $F^\perp$ et des nombres réels $\theta_1, \ldots, \theta_r$ tels que :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$
  - Comme $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et comme les bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_{F^\perp}$ sont orthonormées, la famille $\mathscr{B} := \mathscr{B}_F \# \mathscr{B}_{F^\perp}$ est une base orthonormée de E.
  - Dans cette base orthonormale de E, la matrice de u s'écrit sous la forme par blocs suivante :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(u_F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp}) \end{pmatrix}$$
  et donc, quitte à permuter l'ordre des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, a la forme requise.

■

§ 11. MATRICES ORTHOGONALEMENT SEMBLABLES

NOTATION. — Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

DÉFINITION 56 (MATRICES ORTHOGONALEMENT SEMBLABLES). — *Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$. On dit que A est orthogonalement semblables à B si :*
$$\exists P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \quad A = P\,B\,P^\top.$$

PROPOSITION 57 (ÊTRE ORTHOGONALEMENT SEMBLABLES EST UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE). — *On définit la relation $\sim$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ en posant, pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:*
$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad A \text{ et } B \text{ sont orthogonalement semblables.}$$
Alors la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

PROPOSITION 58 (MATRICES REPRÉSENTANT LE MÊME ENDOMORPHISME DANS DES BON). — *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ deux bases orthonormées de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)$ sont orthogonalement semblables.*

§ 12. RÉDUCTION DES MATRICES ORTHOGONALES

COROLLAIRE 59 (RÉDUCTION DES MATRICES ORTHOGONALES). — *Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Alors*

$$\exists P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \quad \exists \theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbf{R}, \qquad P^\top M P = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

où, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

EXERCICE 60. — Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

1. Déterminer condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
3. Démontrer que les valeurs propres complexes de A sont de module 1.

□

§ 13. RÉDUCTION D'UNE ISOMÉTRIE VECTORIELLE DIRECTE EN DIM. 3

THÉORÈME 61 (RÉDUCTION D'UNE ISOMÉTRIE VECTORIELLE DIRECTE D'UN ESPACE DE DIMENSION 3). — *Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et u une isométrie vectorielle directe de E. Alors il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E et un nombre réel θ tels que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE ISOMÉTRIE POSITIVE DE $\mathbf{R}^3$. — Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3, $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E qui l'oriente, et u une isométrie vectorielle directe de E. D'après le théorème 61, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ de E et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **L'axe de rotation $\mathrm{Vect}(f_3)$, fixé par u.** Le vecteur f_3 est un vecteur propre pour u, associé à la valeur propre 1. Nous en déduisons $\mathrm{Vect}(f_3) \subset E_1(u)$, i.e. :
$$\forall\, x \in \mathrm{Vect}(f_3) \quad u(x) = x.$$
Les vecteurs de la droite $\mathrm{Vect}(f_3)$ sont fixés par l'isométrie u.
2. **$\mathrm{Vect}(f_3)^\perp$ égale $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.** Comme f_1, f_2 sont orthogonaux à f_3, $f_1 \in \mathrm{Vect}(f_3)^\perp$ et $f_2 \in \mathrm{Vect}(f_3)^\perp$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(f_1, f_2) \subset \mathrm{Vect}(f_3)^\perp$. Par dimensions finies égales :
$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(f_3)^\perp.$$
3. **Le plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ est stable par u et l'endomorphisme induit sur ce plan est la rotation d'angle θ.** La famille orthonormale (f_1, f_2) est une base orthonormée du plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ qui l'oriente. On sait :
$$u(f_1) = \cos(\theta) f_1 + \sin(\theta) f_2 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2) \quad \text{et} \quad u(f_2) = -\cos(\theta) f_1 + \cos(\theta) f_1 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2).$$

On en déduit que le plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ est stable par u et de plus :

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2)}\left(u_{|\,\mathrm{Vect}(f_1,f_2)}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} =: R(\theta)\,.$$

Donc $u_{|\,\mathrm{Vect}(f_1,f_2)}$ est la rotation plane d'angle θ du plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ orienté par (f_1, f_2).

4. **Conclusion.** L'endomorphisme u est la rotation axiale d'axe $\mathrm{Vect}(f_3)$ orienté par f_3 et d'angle θ.

EXERCICE 62. — On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle et on considère sa base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ qui l'oriente. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que u est une isométrie vectorielle directe de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer un vecteur unitaire f_3 de l'axe de la rotation u.
3. Déterminer deux vecteurs f_1 et f_2 tels que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.
4. Quel est l'angle de la rotation u ?

□

EXERCICE 63. — On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle et on considère sa base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ qui l'oriente.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/4 & 3/4 \\ -\sqrt{6}/4 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que u est une isométrie vectorielle directe de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer un vecteur unitaire f_3 de l'axe de la rotation u.
3. Déterminer deux vecteurs f_1 et f_2 tels que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.
4. Quel est l'angle de la rotation u ?

□

EXERCICE 64. — On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle et on considère sa base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ qui l'oriente. Décrire géométriquement une isométrie indirecte u de $\mathbf{R}^3$. □

§ 14. ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

NOTATION. — Dans cette partie, $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

DÉFINITION 65 (ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS). — *Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint (ou symétrique) si $u = u^*$, i.e. si :*

$$\forall\,(x, y) \in E^2, \quad \langle\, u(x)\,,\, y\,\rangle = \langle\, x\,,\, u(y)\,\rangle.$$

PROPOSITION 66 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS). — *L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E, défini par :*

$$\mathscr{S}(E) := \left\{u \in \mathscr{L}(E)\ :\ u = u^*\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

PROPOSITION 67 (CARACTÉRISATION DES PROJECTEURS ORTHOGONAUX). — *Soit p un projecteur de E. Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.*

EXERCICE 68 (CARACTÉRISATION DES SYMÉTRIES ORTHOGONALES). — Soit s une symétrie de E. Démontrer que s est une symétrie orthogonale (i.e. $\operatorname{Ker}(s - id_E) \perp \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$) si et seulement si s est un endomorphisme autoadjoint. □

THÉORÈME 69 (CARACTÉRISATION DES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS). — *Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- **(a)** *u est un endomorphisme autoadjoint.*
- **(b)** *Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.*
- **(c)** *Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.*

LEMME 70 (DIMENSION DE $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$). — *Le sous-ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ formé par les matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

COROLLAIRE 71 (DIMENSION DE L'ESPACE DES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS). — *La dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{S}(E)$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

§ 15. THÉORÈME SPECTRAL POUR LES ENDOMORPHISMES

NOTATION. — Dans cette partie, $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

PROPOSITION 72 (SOUS-ESPACES STABLES PAR UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT). — *Soient u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

$$F \text{ est stable par } u \quad \Longrightarrow \quad F^{\perp} \text{ est stable par } u^*.$$

LEMME 73 (RÉDUCTION D'UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT D'UN PLAN EUCLIDIEN). — *Soient $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2 et u un endomorphisme autoadjoint de F. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de F formée de vecteurs propres pour u. En d'autres termes, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de F et des réels λ_1, λ_2 tels que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 74 (SPECTRAL POUR LES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS). — *Soit u un endomorphisme de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'endomorphisme u est autoadjoint.*
2. *Il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres pour u.*
3. *Il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :*

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Remarque 75 (complément sur le théorème spectral pour les endomorphismes). — Soit u un endomorphisme de E. Alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale est sous-espaces propres de u, i.e. si et seulement si :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)}} E_\lambda(u).$$

■

§ 16. Théorème spectral pour les matrices

Théorème 76 (spectral pour les matrices symétriques à coefficients réels). — *Soit M une matrice de format (n, n) et à coefficients réels. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La matrice M est symétrique.*
2. *M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, i.e. :*

$$\exists\, P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \quad \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}, \qquad P^\top M\, P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque 77 (conséquence de la version matricielle du théorème spectral). — Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable. ■

Le fait que les coefficients de la matrices soient réels est fondamental dans le théorème 76. Par exemple la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

est symétrique, mais n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, comme son polynôme caractéristique est X^2, son polynôme minimal serait X et donc M serait la matrice nulle.

Exercice 78 (réduction d'une matrice symétrique réelle). — Étudier la réduction de la matrice :

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}).$$

□

Exercice 79 (des racines carrées éventuelles d'une matrice réelle symétrique). — Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$. □

Exercice 80 (des matrices réelles symétriques dont une puissance vaut I_n). — Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. Démontrer que $M^2 = I_n$. □

Exercice 81 (Co-orthodiagonalisation). — Soit $(A, B) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2$ tel que $AB = BA$. Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que les matrices $P^\top A\, P$ et $P^\top B\, P$ sont diagonales. □

§ 17. ENDOMORPHISME AUTOADJOINT POSITIF/DÉFINI POSITIF

NOTATION. — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

DÉFINITION 82 (ENDOMORPHISME AUTOADJOINT POSITIF/DÉFINI POSITIF). — *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.*

1. *On dit que u est positif si :*
$$\forall\, x \in E, \quad \langle u(x)\,,\,x \rangle \geqslant 0.$$
2. *On dit que u est défini positif si :*
$$\forall\, x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \langle u(x)\,,\,x \rangle > 0.$$

NOTATION. — L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs est noté $\mathscr{S}^+(E)$, i.e. :

$$\mathscr{S}^+(E) := \left\{u \in \mathscr{S}(E) \,:\, u \text{ est positif}\right\}$$

et l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs est noté $\mathscr{S}^{++}(E)$, i.e. :

$$\mathscr{S}^{++}(E) := \left\{u \in \mathscr{S}(E) \,:\, u \text{ est défini positif}\right\}.$$

THÉORÈME 83 (CARACTÉRISATION SPECTRALE DU CARACTÈRE POSITIF/DÉFINI POSITIF). — *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.*

1. $u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbf{R}_+$
2. $u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbf{R}_+^*$

EXERCICE 84 (RACINE CARRÉE D'UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT POSITIF). — Démontrer que :

$$\forall\, u \in \mathscr{S}^+(E), \quad \exists!\, v \in \mathscr{S}^+(E), \quad v^2 = u.$$

□

§ 18. MATRICES SYMÉTRIQUES POSITIVES/DÉFINIES POSITIVES

NOTATION. — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

DÉFINITION 85 (MATRICE SYMÉTRIQUE POSITIVE/DÉFINIE POSITIVE). — *Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.*

1. *On dit que A est positive si :*
$$\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad X^\top M X \geqslant 0.$$
2. *On dit que A est définie positive si :*
$$\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right\}, \quad X^\top M X > 0.$$

NOTATION. — L'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ qui sont positives est noté $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$, i.e. :

$$\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \,:\, A \text{ est positive}\right\}$$

et l'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ qui sont définies positives est noté $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, i.e. :

$$\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \,:\, A \text{ est définie positive}\right\}.$$

EXERCICE 86 (DES COEFFICIENTS D'UNE MATRICE SYMÉTRIQUE POSITIVE). — Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$. On pose :

$$M := \max\left\{a_{i,i}\ :\ i \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

Démontrer que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \left|a_{i,j}\right| \leqslant M.$$

□

THÉORÈME 87 (MATRICE D'UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT POSITIF/DÉFINI POSITIF DANS UNE BON). — *Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme autoadjoint de E.*

1. $u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$
2. $u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$

THÉORÈME 88 (CARACTÉRISATION SPECTRALE DU CARACTÈRE POSITIF/DÉFINI POSITIF). — *Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.*

1. $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R}) \iff \mathrm{Spec}(A) \subset \mathbf{R}_+$
2. $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \iff \mathrm{Spec}(A) \subset \mathbf{R}_+^*$

EXERCICE 89 (DÉTERMINANT ET TRACE D'UNE MATRICE SYMÉTRIQUE POSITIVE). — Démontrer que :

$$\forall\, A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R}), \qquad \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \frac{\mathrm{Tr}\,(A)}{n}.$$

□

EXERCICE 90 (PRODUIT DE LA TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE PAR ELLE-MÊME). — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et des réels positifs ou nuls $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que :

$$A^\top A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^\top.$$

□

EXERCICE 91 (PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE DE $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$). — Démontrer que $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ est une partie fermée de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Est-elle compacte ? □

EXERCICE 92 (PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$). — Démontrer que $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, puis déterminer son adhérence dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. □