# Espaces préhilbertiens

Chapitre 13

par David Blottière, le 29 janvier 2024 à 05h20

## Sommaire

# § 1. PRODUIT SCALAIRE

**DÉFINITION 1 (PRODUIT SCALAIRE). —** *Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Une application*

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle \left|\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x\,,y\rangle \end{array}\right.$$

*est un produit scalaire sur $E$ si elle est linéaire à gauche (LG), linéaire à droite (LD), symétrique (SYM), positive (POS) et définie (DÉF), i.e. si les propriétés suivantes sont vérifiées.*

$$\begin{array}{ll} \textbf{(LG)} & \forall\,(x_1,x_2,y)\in E^3,\quad \forall\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2,\quad \langle \lambda_1x_1+\lambda_2x_2\,,y\rangle=\lambda_1\langle x_1\,,y\rangle+\lambda_2\langle x_2\,,y\rangle \\ \textbf{(LD)} & \forall\,(x,y_1,y_2)\in E^3,\quad \forall\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2,\quad \langle x\,,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\rangle=\lambda_1\langle x\,,y_1\rangle+\lambda_2\langle x\,,y_2\rangle \\ \textbf{(SYM)} & \forall\,(x,y)\in E^2,\quad \langle x\,,y\rangle=\langle y\,,x\rangle \\ \textbf{(POS)} & \forall\,x\in E,\quad \langle x\,,x\rangle\geqslant 0 \\ \textbf{(DÉF)} & \forall\,x\in E,\quad \langle x\,,x\rangle=0\Longrightarrow x=0_E. \end{array}$$

***Remarque 2.* —** Les propriétés (LG) et (SYM) impliquent la propriété (LD) dans la définition 1. Ainsi, pour vérifier qu'une application $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : E\times E\longrightarrow\mathbf{R}$ est un produit scalaire sur $E$, il suffit de vérifier les propriétés (LG), (SYM), (POS) et (DÉF). ■

**DÉFINITION 3 (ESPACE PRÉHILBERTIEN). —** *Un espace préhilbertien est un couple $(E,\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ où $E$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $E$.*

**EXERCICE 4. —** Soit $(E,\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

1. Soit $(x,y)\in E^2$. Démontrer :
$$\langle x+y\,,x+y\rangle=\langle x\,,x\rangle+\langle y\,,y\rangle+2\langle x\,,y\rangle$$
en justifiant chaque étape du calcul à l'aide d'une propriété du produit scalaire.
2. Soient $p\in\mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(x_1,\dots,x_p)\in E^p$. Démontrer :
$$\left\langle \sum_{i=1}^p x_i\,,\sum_{i=1}^p x_i\right\rangle=\sum_{i=1}^p\langle x_i\,,x_i\rangle\;+\;2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}\langle x_i\,,x_j\rangle$$
en justifiant chaque étape du calcul à l'aide d'une propriété du produit scalaire.

□

**EXERCICE 5. —** Soient $(E,\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $x\in E$. Justifier que $\langle x\,,0_E\rangle=0$ et $\langle 0_E\,,x\rangle=0$. □

# § 2. EXEMPLES FONDAMENTAUX DE PRODUITS SCALAIRES

**PROPOSITION 6 (PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR $\mathbf{R}^n$). —** *Soit $n\in\mathbf{N}_{\geqslant 2}$. L'application :*

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \big(x=(x_1,\dots,x_n)\,,\,y=(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & \langle x\,,y\rangle:=\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i \end{array}\right.$$

*définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.*

**Proposition 7 (produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$). —** *Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. L'application :*

$$\langle \cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \left( X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \langle X, Y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{array} \right.$$

*définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.*

**Proposition 8 (produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$). —** *Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. L'application :*

$$\langle \cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \langle A, B\rangle := \operatorname{Tr}\left(A^\top \times B\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j} \cdot [B]_{i,j} \end{array} \right.$$

*définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$.*

**Proposition 9 (produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$). —** *Soient $a < b$ des nombres réels. L'application :*

$$\langle \cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \times \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \langle f, g\rangle := \int_a^b f(t) g(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

*définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$.*

**Exercice 10. —** Démontrer que l'application :

$$\langle \cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \langle P, Q\rangle := \int_0^1 \widetilde{P}(t) \cdot \widetilde{Q}(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$. □

## § 3. Norme associée à un produit scalaire

**Définition 11 (norme d'un vecteur et distance entre deux vecteurs). —** *Soit $(E, \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.*

1. *La norme d'un vecteur $x \in E$ est définie par :*

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

2. *La distance entre deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ est définie par :*

$$\mathrm{d}(x,y) = \left|\left| x - y \right|\right|$$

**Lemme 12 (carré de la norme d'une somme). —** *Soient $(E, \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $(x,y) \in E^2$.*

$$\left|\left| x+y \right|\right|^2 = ||x||^2 + \left|\left| y \right|\right|^2 + 2\left\langle x, y\right\rangle$$

**LEMME 13 (HOMOGÉNÉITÉ DE LA NORME).** — *Soient* $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *un espace préhilbertien,* $x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$|| \lambda \cdot x || = |\lambda| \cdot || x ||$$

**THÉORÈME 14 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ ET CAS D'ÉGALITÉ).** — *Soient* $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *un espace préhilbertien et* $(x, y) \in E^2$.

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\left| \langle x, y \rangle \right| \leqslant || x || \cdot \left|\left| y \right|\right|$$

2. **Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\left| \langle x, y \rangle \right| = || x || \cdot \left|\left| y \right|\right| \text{ si et seulement si la famille } (x, y) \text{ est liée.}$$

**DÉMONSTRATION.** — Si les vecteurs $x$ et $y$ sont tous les deux nuls, alors les assertions (1) et (2) sont claires.
Supposons désormais qu'au moins un des vecteurs $x$ et $y$ est non nul. D'après (SYM), les vecteurs $x$ et $y$ ont des rôles symétriques dans les assertions (1) et (2). Nous pouvons donc supposer que $y \neq 0_E$.
**(1)** On introduit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left|\left| x + t \cdot y \right|\right|^2 \end{array} \right.$$

- Soit $t \in \mathbf{R}$. En développant le carré scalaire de la somme $x + t \cdot y$ (cf. 4), il vient :

$$f(t) = \left|\left| x + t \cdot y \right|\right|^2 = \langle x, x \rangle + 2 \cdot \langle x, t \cdot y \rangle + \langle t \cdot y, t \cdot y \rangle$$

  puis, en utilisant (LG) et (LD) :

$$f(t) = || x ||^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle \cdot t + \left|\left| y \right|\right|^2 \cdot t^2$$

  L'application $f$ est donc polynomiale en sa variable $t$.
- Comme $y \neq 0_E$, (POS) et (DÉF) impliquent $\left|\left| y \right|\right| > 0$. L'application $f$ est donc polynomiale de degré 2, avec un coefficient dominant positif.
- D'après (POS), $f \geqslant 0$ et donc le discriminant $\Delta(f)$ de $f$ vérifie $\Delta(f) \leqslant 0$. En effet, si $\Delta(f) > 0$ alors $f$ admet deux racines réelles distinctes $t_1 < t_2$ et est strictement négative sur $]t_1, t_2[$, ce qui n'est pas.

Comme :

$$\Delta(f) = 4 \cdot \langle x, y \rangle^2 - 4 \cdot || x || \cdot \left|\left| y \right|\right|$$

$\Delta(f) \leqslant 0$ livre $\langle x, y \rangle^2 \leqslant || x || \cdot \left|\left| y \right|\right|$ puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$.
**(2) Implication directe** Supposons $\left| \langle x, y \rangle \right| = || x || \; \left|\left| y \right|\right|$. Alors $\Delta(f) = 0$, où $f$ est l'application polynomiale de degré 2 introduite en (1). Cette dernière possède donc une unique racine réelle $t_0$. Comme :

$$0 = f(t_0) = \langle x + t_0 \cdot y, x + t_0 \cdot y \rangle$$

(DÉF) livre $1 \cdot x + t_0 \cdot y = 0_E$, d'où le caractère lié de la famille $(x, y)$.
**(2) Implication réciproque** Supposons la famille $(x, y)$ liée. Alors il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$ tel que :

$$\text{(i)} \qquad \alpha \cdot x + \beta \cdot y = 0_E\,.$$

Le nombre $\alpha$ n'est pas nul (si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$ et (i) livre $y = 0_E$, ce qui n'est pas). De (i) nous déduisons que $x = \lambda . y$, où $\lambda := -\beta / \alpha$.
D'après (LG) et la multiplicativité de la valeur absolue :

$$\text{(ii)} \qquad \left| \langle x, y \rangle \right| = \left| \langle \lambda \cdot y, y \rangle \right| = \left| \lambda \cdot \langle y, y \rangle \right| = |\lambda| \cdot \left| \langle y, y \rangle \right| = |\lambda| \cdot \left|\left| y \right|\right|^2.$$

Par homogénéité de la norme (13) :

$$\text{(iii)} \qquad || x || \cdot \left|\left| y \right|\right| = \left|\left| \lambda \cdot y \right|\right| \cdot \left|\left| y \right|\right| = |\lambda| \cdot \left|\left| y \right|\right|^2.$$

De (ii) et (iii) on déduit $\left| \langle x, y \rangle \right| = || x || \cdot \left|\left| y \right|\right|$. ■

***Exemple 15.*** — Soit un entier $n \geqslant 2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ (cf. 6) livre, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbf{R}^n$ :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

■

***Exemple 16.*** — Soit un entier $n \geqslant 2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (cf. 8) livre, pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ :

$$\left|\operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)\right| \leqslant \sqrt{\operatorname{Tr}\left(A^\top A\right)} \cdot \sqrt{\operatorname{Tr}\left(B^\top B\right)}$$

qui, lorsque $A$ et $B$ sont de plus symétriques s'écrit encore :

$$|\operatorname{Tr}(AB)| \leqslant \sqrt{\operatorname{Tr}\left(A^2\right)} \cdot \sqrt{\operatorname{Tr}\left(B^2\right)}.$$

■

***Exemple 17.*** — Soient $a < b$ deux nombres réels. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ (cf. 9) livre, pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_a^b g(t)^2\, \mathrm{d}t}.$$

■

**EXERCICE 18.** — Soient $n$ réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Démontrer que :

$$n^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

□

**EXERCICE 19.** — Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ une fonction telle que $f > 0$ sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = 1$. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t \geqslant 1.$$

□

**EXERCICE 20.** — Soient $a < b$ deux nombres réels et $E := \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Soit $C := \left\{ f \in E \,:\, \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0 \right\}$ et

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \left( \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right) \left( \int_a^b \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t \right) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $\varphi(C)$ est minorée.
2. Déterminer la borne inférieure $m := \inf_{f \in C} \varphi(f)$ et démontrer qu'elle est atteinte.
3. Déterminer toutes les fonctions $f \in C$ telles que $\varphi(f) = m$.

□

**COROLLAIRE 21 (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE OU INÉGALITÉ DE MINKOWSKI).** — *Soient $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $(x,y) \in E^2$.*

**(a) Inégalité triangulaire**

$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

**(b) Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire**

$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \iff \left\{ \begin{array}{ll} & \exists \lambda \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}, \quad x = \lambda \cdot y \\ ou & \\ & \exists \lambda \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}, \quad y = \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

**Exercice 22.** — Soit $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Démontrer :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \big|\, ||x|| - ||y|| \,\big| \leqslant ||x + y||$$

□

**Proposition 23 (identité de polarisation).** — *Soit $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme sur $E$ associée. Soit $(x, y) \in E^2$.*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \cdot \left( ||x + y||^2 - ||x - y||^2 \right)$$

***Remarque 24.*** — On conserve les notations de 23. D'après l'identité de polarisation, la seule connaissance de la norme $||\cdot||$ permet de retrouver le produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. ■

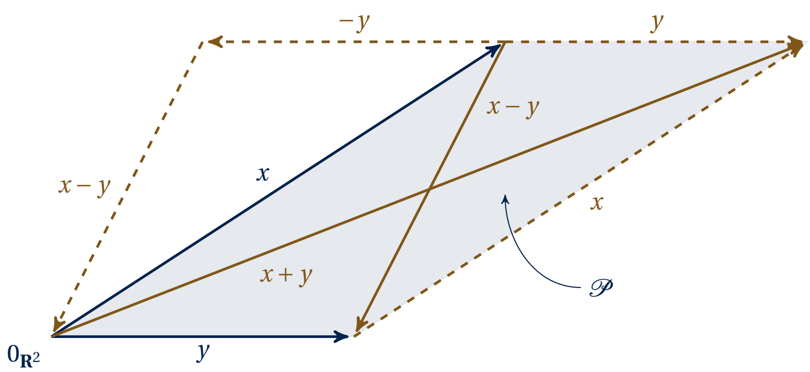
**Proposition 25 (identité du parallélogramme).** — *Soit $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme sur $E$ associée. Soit $(x, y) \in E^2$.*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2 \left( ||x||^2 + ||y||^2 \right)$$

***Remarque 26.*** —
Soient deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbf{R}^2$, muni de son produit scalaire usuel, que nous représentons en l'origine $0_{\mathbf{R}^2}$. Formons le parallélogramme $\mathscr{P}$ supporté par ces deux vecteurs.

Le nombre $2 \left( ||x||^2 + ||y||^2 \right)$ égale la somme des carrés des longueurs de tous les côtés du parallélogramme $\mathscr{P}$.

Le nombre $||x + y||^2 + ||x - y||^2$ est la somme des carrés des longueurs des deux diagonales de $\mathscr{P}$.




D'après 25, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de tous les côtés égale la somme des carrés des longueurs des deux diagonales. ■

## § 4. Orthogonalité

**Notation.** — Dans cette partie, $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$.

**Définition 27 (vecteurs orthogonaux).** — *Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que $x$ et $y$ sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.*

**Définition 28 (familles orthogonales, familles orthonormales).** — *Soit $I$ un ensemble non vide, soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de $E$.*

1. *La famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale si :*

$$\forall (i, j) \in I^2, \qquad i \neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

2. *La famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si de plus pour tout $i \in I$, $||x_i|| = 1$, i.e. si :*

$$\forall (i, j) \in I^2, \qquad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$$

***Exemple 29.*** — Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ (cf. 6). La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ est une famille orthonormale. ■

***Exemple 30.*** — Soient deux entiers $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ (cf. 8). La base canonique $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ est une famille orthonormale. ■

**Exercice 31.** — Considérons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,2\pi], \mathbf{R})$ muni de l'application :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous définissons l'application $c_n$ par :

$$c_n \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(nx) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $E$.
2. Démontrer que la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale.

□

**Proposition 32 (une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre).** — *Soient $I$ un ensemble non vide et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille orthogonale telle que, pour tout $i \in I$, $x_i \neq 0_E$.*
*Alors, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.*

**Théorème 33 ( de Pythagore).** — *Soient $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale.*

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2.$$

***Remarque 34.*** —
Soient deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbf{R}^2$, muni de son produit scalaire usuel, que nous représentons en l'origine $0_{\mathbf{R}^2}$. Nous supposons $x$ et $y$ orthogonaux et nous formons le triangle rectangle $\mathscr{T}$ supporté par ces deux vecteurs.

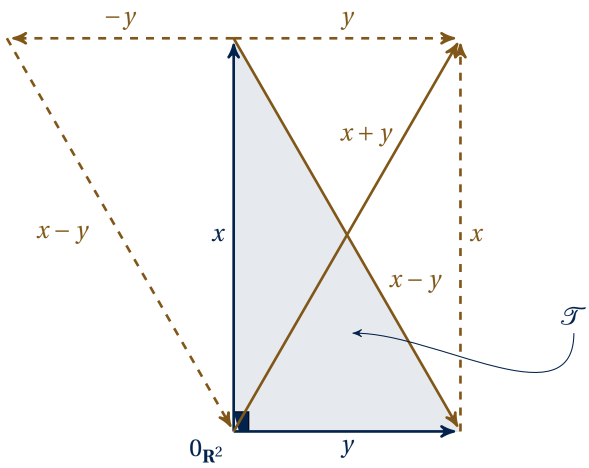
Le théorème de Pythagore 33 livre :

$$\left|\left|x+y\right|\right|^2 = ||x||^2 + \left|\left|y\right|\right|^2.$$

D'après l'identité de polarisation 23 et l'orthogonalité de $x$ et $y$, $\left|\left|x+y\right|\right|^2 = \left|\left|x-y\right|\right|^2$. Des deux dernières identités, nous déduisons :

$$(\star) \qquad \left|\left|x-y\right|\right|^2 = ||x||^2 + \left|\left|y\right|\right|^2.$$

Le nombre $\left|\left|x-y\right|\right|^2$ égale le carré de la longueur de l'hypoténuse de $\mathscr{T}$. L'identité $(\star)$ est donc le théorème de Pythagore rencontré dans les petites classes.




■

**Exercice 35.** — Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $E$. Construire une base orthonormale $\mathscr{C}$ de $E$. □

**Définition 36 (vecteur normalisé d'un vecteur non nul).** — *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*
*Le vecteur normalisé d'un vecteur $x$ non nul de $E$ est $\dfrac{1}{||x||}\cdot x$. Il est colinéaire à $x$, de même sens et de norme 1.*

**Proposition 37 (algorithme d'orthonormalisation de Schmidt). —** *Soient $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ de $E$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $F$. On construit une famille $\left(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_n\right)$ de vecteurs de $F$ de proche en proche comme suit.*

**(i)** *$\varepsilon'_1$ est le vecteur normalisé de $\varepsilon_1 := e_1$.*

**(ii)** *Pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$ :*

$$\varepsilon'_{i+1} \text{ est le vecteur normalisé de } \varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \cdot \varepsilon'_k .$$

*Alors :*

1. *la famille $(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_n)$ est bien définie et forme une base orthonormale de $F$ ;*
2. *pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon'_i \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$ ;*
3. *pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la $i$-ième coordonnée de $\varepsilon'_i$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est un nombre réel strictement positif.*

**Démonstration. — Pierre angulaire.** Commençons par démontrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\mathscr{P}(i) \left| \begin{array}{ll} (\alpha_i) & \forall j \in [\![1,i]\!],\ \varepsilon'_j \text{ existe} \\ (\beta_i) & \forall j \in [\![1,i]\!],\ \varepsilon'_j \in \mathrm{Vect}\left(e_1,\dots,e_j\right) \\ (\gamma_i) & \left(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_i\right) \text{ est une famille orthonormée.} \end{array}\right.$$

en raisonnant par récurrence finie.

- **Initialisation à $i = 1$.**
  $(\alpha_1)$ Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, le vecteur $e_1$ est non nul donc $\varepsilon'_1 := \dfrac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$ est bien défini.
  $(\beta_1,\gamma_1)$ Il est clair que $\varepsilon'_1 \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et que $\left\|\varepsilon'_1\right\| = 1$

- **Hérédité.**
  Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(i)$ est vraie, i.e. tel que $(\alpha_i)$, $(\beta_i)$ et $(\gamma_i)$ sont vraies.
  $(\alpha_{i+1})$ D'après $(\alpha_i)$, les vecteurs $\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_i$ et donc le vecteur $\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \cdot \varepsilon'_k$ est bien défini. Si $\varepsilon_{i+1}$ était nul, $(\beta_i)$ impliquerait :

$$e_{i+1} = \sum_{k=1}^{i} \underbrace{\left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \cdot \varepsilon'_k}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$$

  et la famille $(e_1,\dots,e_n)$ serait liée, ce qui n'est pas. Comme $\varepsilon_{i+1} \neq 0_E$, le vecteur $\varepsilon'_{i+1} := \dfrac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|} \cdot \varepsilon_{i+1}$ est bien défini.
  $(\beta_{i+1})$ Toujours d'après $(\beta_i)$ :

$$\varepsilon_{i+1} := \underbrace{e_{i+1}}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1})} - \sum_{k=1}^{i} \underbrace{\left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \cdot \varepsilon'_k}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1})} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1}) .$$

  Le vecteur $\varepsilon'_{i+1} := \dfrac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|} \cdot \varepsilon_{i+1}$ appartient donc également à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1})$.
  $(\gamma_{i+1})$ Soit $j \in [\![1,i]\!]$. Démontrons que $\left\langle \varepsilon'_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle = 0$ ou, de manière équivalente, $\left\langle \varepsilon_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle = 0$. D'après $(\gamma_i)$ :

$$\left\langle \varepsilon_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle = \left\langle e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \cdot \varepsilon'_k , \varepsilon'_j \right\rangle \underset{(\mathrm{LG})}{=} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle - \underbrace{\sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \cdot \underbrace{\left\langle \varepsilon'_k, \varepsilon'_j \right\rangle}_{=\delta_{k,j}}}_{=\left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle} = 0 .$$

  Enfin, le vecteur $\varepsilon'_{i+1} := \dfrac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|} \cdot \varepsilon_{i+1}$ est de norme 1.

**(1)** D'après ce qui précède, la famille $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ est bien définie et forme une famille orthonormale de $F$. Comme elle est libre (orthogonale et formée de vecteurs non nuls) et comme elle contient $n = \dim(F) < \infty$ vecteurs, $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ est une base orthonormale de $F$.
**(2)** Cette assertion correspond à $(\beta_n)$ qui est déjà établie.
**(3)** Comme $\varepsilon'_1 := \dfrac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$, la première coordonnée de $\varepsilon'_1$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $\dfrac{1}{\|e_1\|} > 0$.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. D'après (2),

$$\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{i} \underbrace{\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)}}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)} .$$

La $(i+1)$-ième composante de $\varepsilon_{i+1}$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est donc 1. Par suite, la $(i+1)$-ième composante de $\varepsilon'_{i+1} := \dfrac{1}{\|\varepsilon_i\|} \cdot \varepsilon_i$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $\dfrac{1}{\|\varepsilon_i\|} > 0$. ■

**Exercice 38.** — On munit $\mathbf{R}^4$ de son produit scalaire usuel (cf. 6). On pose

$$H := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

1. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $H$.
2. Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathscr{B}$ de $H$ déterminer en 1 pour obtenir une base orthonormée de $H$.

□

**Exercice 39.** — Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un produit scalaire sur $E$. Soit $\mathscr{B} := \left(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n\right)$ la base orthonormale de $E$ obtenue en lui appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Que dire de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$ ? □

**Exercice 40.** — Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ par

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P, Q \rangle := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}(k) \cdot \widetilde{Q}(k). \end{array} \right.$$

1. Vérifier que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Déterminer une une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$, pour le produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ introduit en début d'énoncé (en spécialisant $n$ à 2).

□

**Exercice 41.** — On définit l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ par :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}) \times \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^1 f(t) \cdot g(t) \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Soient les applications $f_0, f_1, f_2$ définies par :

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. \qquad f_1 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \, . \end{array} \right.$$

Déterminer une base orthonormale de $F := \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, f_2\right)$.

□

## § 5. Orthogonal d'une partie

**Notation. —** Dans cette partie, $(E,\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ désigne un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

**Définition 42 (orthogonal d'une partie). —** *Soit $A$ une partie de $E$. L'orthogonal de $A$ est la partie de $E$, notée $A^\perp$, définie par*

$$A^\perp := \{x \in E \,:\, \forall\, a \in A \quad \langle x\,,a\rangle = 0\}$$

***Exemple 43.* —** $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. ■

**Exercice 44. —** Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$ tels que $A \subset B$. Démontrer que $B^\perp \subset A^\perp$. □

**Exercice 45. —** Soient un entier $n \geqslant 2$ et $x_1, x_2, \dots, x_n, x$ des vecteurs de $E$. Démontrer

$$x \in \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad x \perp x_k$$

□

**Exercice 46. —** On munit $\mathbf{R}^4$ de son produit scalaire canonique (cf. 6). On pose

$$F := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \,:\, \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \end{array}\right.\right\}.$$

1. Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en donner une base.
2. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de $F$.

□

**Proposition 47 (structure de l'orthogonal d'une partie). —** *Si $A$ est une partie $E$ alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Exercice 48. —** On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique (cf. 8). On note $F$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls

$$F := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \,:\, \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ [A]_{i,i} = 0\right\}.$$

1. Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et en donner une base.
2. Déterminer une base de $F^\perp$.

□

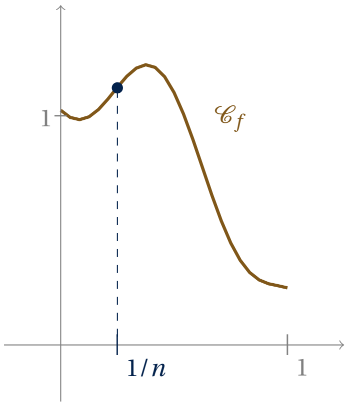
**Proposition 49 (orthogonal de l'orthogonal). —** *Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ alors $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.*

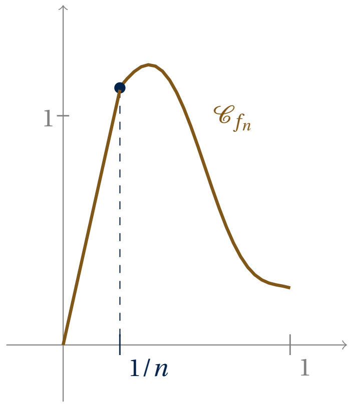
L'inclusion réciproque dans 49 n'est pas nécessairement vraie, d'après les deux exercices ci-dessous. Cependant, lorsque $F$ est **de dimension finie** $F = \left(F^\perp\right)^\perp$. Nous le démontrerons plus tard (cf. 66).

**Exercice 50. —** On munit $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique (cf. 9).

1. Démontrer que $F = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}) \,:\, f(0) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$.

2. Déterminer $F^\perp$. On pourra considérer une fonction $g \in F^\perp$ et démontrer que $g$ est orthogonale à une fonction $f$ quelconque de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, en considérant, pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la fonction $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_n$ coïncide avec $f$ sur $[1/n,1]$, $f_n(0)=0$ et $f_n$ est affine sur $[0,1/n]$.




3. Démontrer que $F \neq \left(F^\perp\right)^\perp$.

□

**EXERCICE 51.** — Soient $F_1, F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

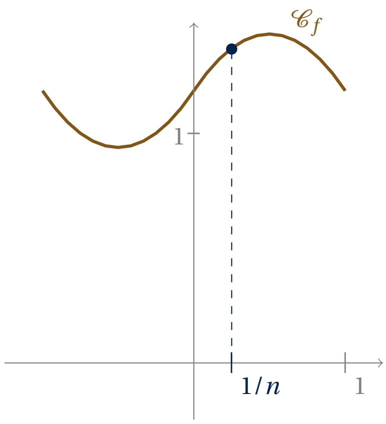
1. Démontrer que $F_1^\perp \cap F_2^\perp = (F_1+F_2)^\perp$.
2. Démontrer que $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$.

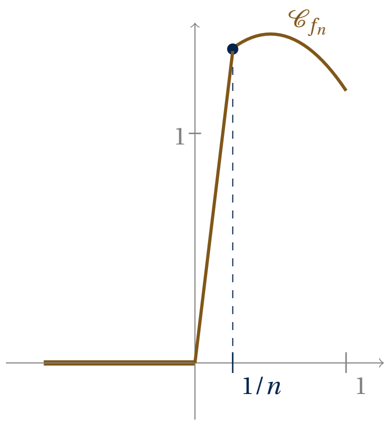
□

**EXERCICE 52.** — On munit $E := \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbf{R})$, muni de son produit scalaire canonique (cf. 9). On pose

$$F_1 = \left\{f \in E \,:\, \forall x \in [-1,0],\ f(x)=0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \left\{f \in E \,:\, \forall x \in [0,1],\ f(x)=0\right\}.$$

1. Démontrer : $F_1^\perp = F_2$. On pourra considérer une fonction $f \in F_1^\perp$, et démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)=0$, en considérant, pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la fonction $f_n\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_n$ est nulle sur $[-1,0]$, $f_n$ coïncide avec $f$ sur $[1/n,1]$, et $f_n$ est affine sur $[0,1/n]$.




2. Démontrer : $F_2^\perp = F_1$.
3. Justifier : $F_1^\perp + F_2^\perp \neq (F_1 \cap F_2)^\perp$.

□

## § 6. Espaces euclidiens et base orthonormées

**Définition 53 (espace euclidien).** — *Un espace euclidien est un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, où $E$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie.*

**Théorème 54 (d'existence d'une base orthonormée dans un espace euclidien).** — *Tout un espace euclidien possède une base orthonormée.*

**Proposition 55 (expression des coordonnées d'un vecteurs dans une base orthonormée).** — *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $x \in E$. Alors :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i.$$

**Proposition 56 (expression du produit scalaire dans une base orthonormée).** — *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $(x, y) \in E^2$. On pose :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = (x_1, \dots, x_n)^{\top} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = (y_1, \dots, y_n)^{\top}$$

*Alors :*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

**Proposition 57 (expression de la norme dans une base orthonormée).** — *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $x \in E$. On pose :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$$

*Alors :*

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

**Théorème 58 (de la base orthonormée incomplète).** — *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $(f_1, \dots, f_p) \in E^p$ une famille orthonormée.*
*Il existe $(f_{p+1}, \dots, f_n) \in E^{n-p}$ tel que $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ est une base orthonormée de $E$.*

**Exercice 59.** — Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in E^* := \mathscr{L}(E, \mathbf{R})$. Alors :

$$\exists!\, a \in E, \quad \forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle \qquad [\text{théorème de représentabilité de Riesz}].$$

□

**Exercice 60.** — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe $n+1$ réels $a_0, \dots, a_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$ :

$$\int_0^1 \widetilde{P}(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \widetilde{P}(k).$$

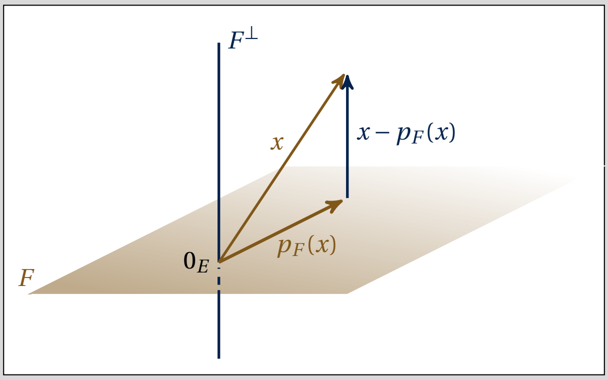
□

## § 7. Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

**notation.** — Dans toute cette partie, $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien et on note $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire. On ne suppose plus $E$ de dimension finie (i.e. $E$ n'est pas nécessairement euclidien). En revanche on imposera parfois une hypothèse de finitude sur la dimension de sous-espaces vectoriels considérés.

**Définition 61 (projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace de dimension finie).** — *Soient $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$ et $x \in E$.*

1. *Il existe un unique vecteur $y$ de $E$ tel que*
$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^{\perp}$$
*Ce vecteur $y$ est noté $p_F(x)$ et est appelé projeté orthogonal de $x$ sur $F$.*
2. *Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de $F$*
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$$




**Théorème 62 (projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie).** — *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$.*

1. **Projection orthogonale de $E$ sur $F$.** *L'application :*
$$p_F \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & p_F(x) \text{ qui est l'unique vecteur } y \in F \text{ tel que } x - y \in F^{\perp} \end{array} \right.$$
*est un projecteur orthogonal, appelé projection orthogonale de $E$ sur $F$.*
2. **Noyau et image de la projection orthogonale de $E$ sur $F$.**
$$\mathrm{Ker}\left(p_F\right) = F^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(p_F\right) = \mathrm{Ker}\left(p_F - \mathrm{id}_E\right) = F.$$
3. **Expression de la projection orthogonale de $E$ sur $F$ à l'aide d'une base orthonormale de $F$.** *Si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base orthonormale de $F$, alors :*
$$\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle f_i.$$

**Exercice 63 (Polynômes de Tchebychev).** — Soit $E = \mathscr{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$. On définit l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ par :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \langle f, g \rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bien définie.
2. Démontrer que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ défini un produit scalaire sur $E$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Le polynôme $T_n$ est appelé $n$-ième polynôme de Tchebychev.
4. Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $F_n := \mathrm{Vect}(T_0, \ldots, T_n)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction $f \in E$ sur $F_n$.

□

**PROPOSITION 64 (SOMME DIRECTE D'UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE ET DE SON ORTHOGONAL). —** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. Alors :*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Si $F$ n'est pas de dimension finie, $F^{\perp}$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de $F$ dans $E$. Dans l'exercice **??**, nous avions considéré $a < b$ deux nombres réels, $E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire canonique (cf. 9) et $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, i.e. :

$$\mathscr{P} := \operatorname{Vect}\left(\left(f_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right)_{n\in\mathbf{N}}\right)$$

Grâce au théorème d'approximation de Weierstraß, nous pouvons établir que $\mathscr{P}^{\perp} = \{0_E\}$. L'identité $E = \mathscr{P} \oplus \mathscr{P}^{\perp}$ livrerait donc $E = F$, i.e. que toute fonction continue sur $[-1,1]$ est polynomiale, ce qui n'est pas.

**EXERCICE 65. —** On munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel (6). On pose $F := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; x - 2y + 3z = 0\right\}$ et $p_F$ la projection orthogonale de $\mathbf{R}^3$ sur $F$.

1. Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, en donner une base et préciser sa dimension.
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Calculer $p_F(u)$ en fonction de $x$, $y$ et $z$.
3. Donner la matrice de $p_F$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ de $\mathbf{R}^3$.

□

**COROLLAIRE 66 (ORTHOGONAL DE L'ORTHOGONAL POUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE). —** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$.*
*Alors $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.*

Si $F$ n'est pas de dimension finie, $F$ peut être strictement inclus dans $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Cf. 50.

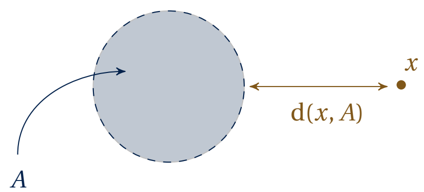
## § 8. DISTANCE D'UN VECTEUR À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE DIM. FINIE

**NOTATION. —** Dans la suite de cette partie, $(E, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ désigne à présent un espace préhilbertien et on note $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire.

**DÉFINITION 67 (DISTANCE D'UN VECTEUR À UNE PARTIE NON VIDE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ). —** *Soient $A$ une partie non vide de $E$ et $x \in E$. On définit la distance de $x$ à $A$ par :*

$$\mathrm{d}(x, A) := \inf_{a \in A} ||x - a|| .$$

***Exemple 68.* —** Si $A$ est une partie non vide de $E$ et $x \in E$, alors la distance de $x$ à $A$ n'est pas nécessairement atteinte, i.e. il peut n'exister aucun $a_0 \in A$ tel que $||x - a_0|| = \mathrm{d}(x, A)$.

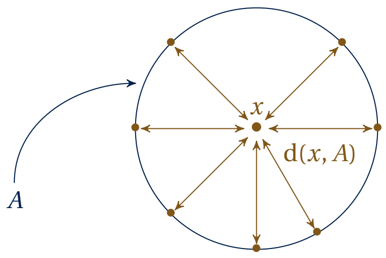


■

***Exemple 69.*** — Si $A$ est une partie non vide de $E$ et $x \in E$, alors la distance de $x$ à $A$ peut être atteinte en une infinité de points i.e. l'ensemble

$$\{a_0 \in A \,:\, ||x - a_0|| = \mathrm{d}(x, A)\}$$

peut être infini. C'est par exemple le cas, lorsque $A$ est une sphère de rayon strictement positif et $x$ le centre de la sphère.




■

**EXERCICE 70.** — Si $A$ est une partie non vide de $E$ l'application :

$$\mathrm{d}(\cdot, A) \left| \begin{array}{ccc} (E, ||\cdot||) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x, A) := \inf\limits_{a \in A} ||x - a|| \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne, i.e. :

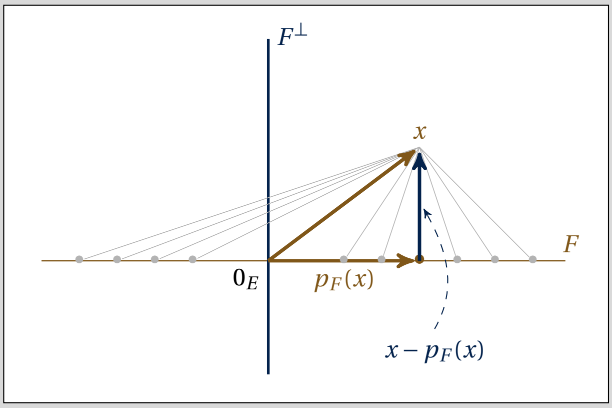
$$\forall (x, y) \in E^2, \left|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)\right| \leqslant \left|\left|x - y\right|\right|.$$

□

**PROPOSITION 71 (DISTANCE D'UN VECTEUR À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE).** —

*Soient $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$ et $x \in E$.*
*On note $p_F : E \longrightarrow E$ la projection orthogonale de $E$ sur $F$.*

1. $\mathrm{d}(x, F) = \left|\left|x - p_F(x)\right|\right|$
2. $\forall y \in F, \quad y \neq p_F(x) \Longrightarrow \left|\left|x - y\right|\right| > \mathrm{d}(x, F)$
3. $||x||^2 = \left|\left|p_F(x)\right|\right|^2 + \mathrm{d}(x, F)^2$




**EXERCICE 72.** — On définit l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}\left(A^\top B\right) \end{array} \right.$$

qui est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ (8). On note :

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,:\, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

1. Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Déterminer une base de $F^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
4. Quelle est la distance de $J$ à $F$ ?

□