Séries entières

Chapitre 12

par David Blottière, le 19 janvier 2024 à 14h59

Sommaire

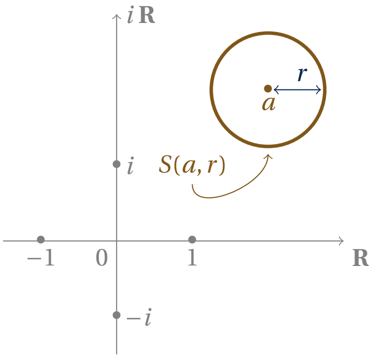
§ 1. Notion de série entière et problématique 2
§ 2. Rayon de convergence d'une série entière 3
§ 3. Calcul pratique du rayon de convergence 5
§ 4. Somme et produit de séries entières 7
§ 5. Limite uniforme et continuité pour la variable complexe 9
§ 6. De la continuité de la somme d'une série entière 10
§ 7. Théorème d'Abel radial 12
§ 8. Dérivation et intégration d'une série entière 13
§ 9. Développement d'une fonction en série entière 15
§ 10. Quelques méthodes et exemples 18
  1. Calculs de DSE par dérivation ou primitivation 18
  2. Calculs de DSE à l'aide d'une équation différentielle 18
  3. Calculs de DSE à l'aide d'un produit de Cauchy 18
  4. Applications de la table des DSE usuels 18
§ 11. Table des développements en série entière usuels 19

§ 1. Notion de série entière et problématique

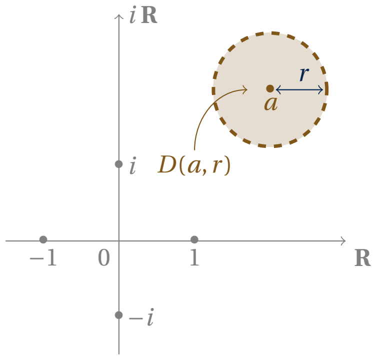
Notation (Disque ouvert et disque fermé dans C). — Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$. On note :

- $S(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r ;
- $D(a,r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r ;
- $\overline{D(a,r)} = D(a,r) \sqcup S(a,r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r.

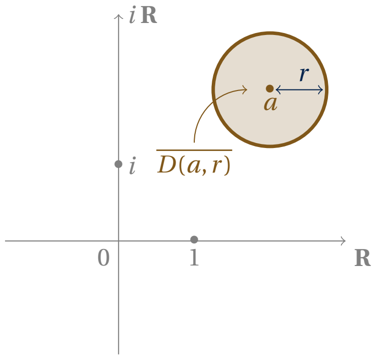
$S(a,r) := \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z-a| = r\}$



$D(a,r) := \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z-a| < r\}$



$\overline{D(a,r)} := \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z-a| \leqslant r\}$



> **Définition 1 (Série entière).** — *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $z \in \mathbf{C}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est appelée série entière de coefficients a_n, $n \in \mathbf{N}$.*

Problématique. — Étant donnée une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, on s'intéresse aux questions suivantes.

(A) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbf{C}$ la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge-t-elle ? L'ensemble :

$$\mathscr{D} := \left\{ z \in \mathbf{C} \,:\, \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

est appelé ensemble de définition de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ (il peut être réduit au singleton $\{0\}$).

(B) Quel est la nature de la convergence de la séries de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n \end{array} \right.$$

sur $\mathscr{D}$, ou sur des parties de $\mathscr{D}$: simple, uniforme, normale ?

(C) Si tous les a_n sont réels, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} \cap \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

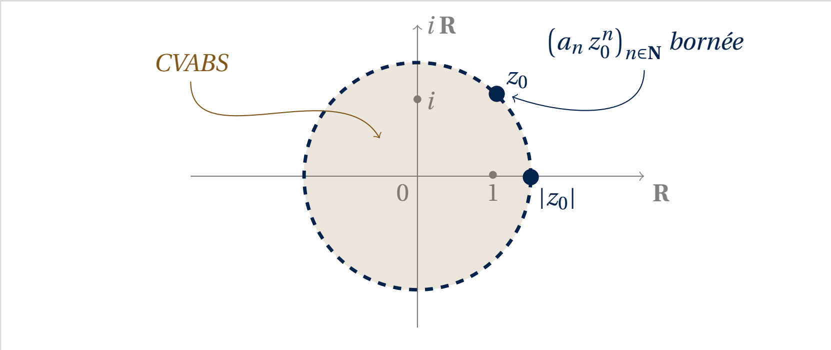
est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} \cap \mathbf{R}$? Si oui, a-t-on pour tout $p \in \mathbf{N}$ et « certains réels » x :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \qquad ?$$

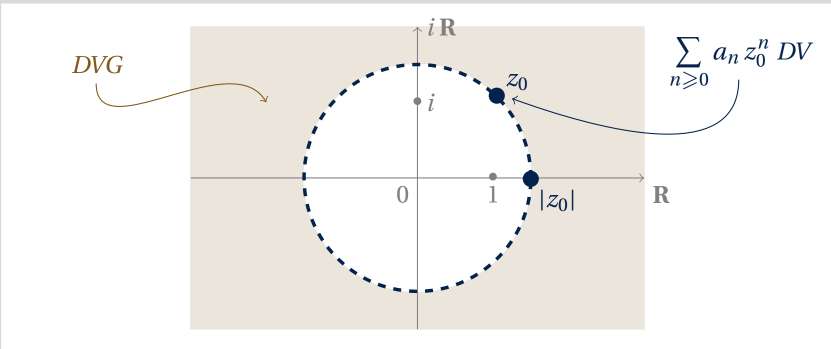
§ 2. RAYON DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

LEMME 2 (ABEL). — *Soient (a_n) une suite de nombres complexes et $z_0 \in \mathbf{C}^*$.*

1. *Supposons que la suite $\left(a_n\, z_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors, pour tout $z \in D(0,|z_0|)$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge absolument.*



2. *Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ diverge. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > |z_0|$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ diverge grossièrement.*



DÉMONSTRATION. —

1. Soit $z_0 \in \mathbf{C}^*$ tel que la suite $\left(a_n\, z_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$a_n\, z^n = a_n\, z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n.$$
Comme $a_n\, z_0^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$, il vient :
$$a_n\, z^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right).$$
Comme $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| < 1$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n$ est absolument convergente. Par théorème de comparaison, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ est également absolument convergente.
2. Soit $z_0 \in \mathbf{C}^*$ tel que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ diverge. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > |z_0|$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ n'est pas grossièrement divergente. Comme :
$$a_n\, z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
la suite $(a_n\, z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. D'après **1**, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ est absolument convergente. Contradiction.

■

Définition 3 (rayon de convergence d'une série entière). — *Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et :*

$$I := \left\{ r \in \mathbf{R}_+ \ : \ \text{la suite } \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\} \qquad [\text{intervalle non vide de } \mathbf{R}].$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, noté $R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)$, est défini par :

$$R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) := \begin{cases} \sup(I) & \text{si } I \text{ est majoré;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

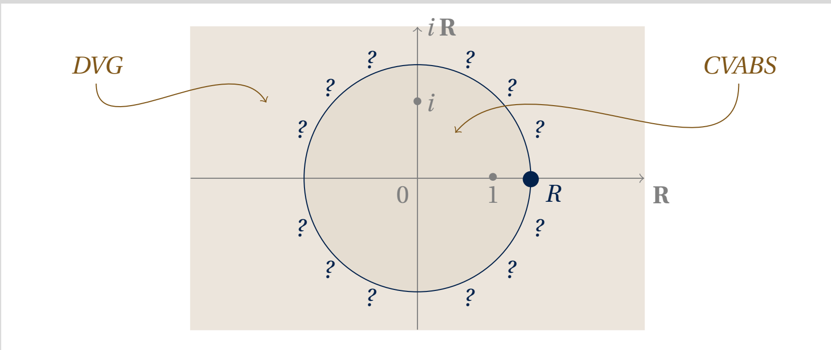
Exercice 4. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$. □

Exercice 5. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$. □

Exercice 6. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$. □

Proposition 7 (caractérisation du rayon de convergence). — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière.*

1. *Son rayon de convergence est $+\infty$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbf{C}$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.*
2. *Si son rayon de convergence n'est pas $+\infty$, alors son rayon de convergence est l'unique $R \in \mathbf{R}_+$ tel que*
   - **(a)** *pour tout $z \in D(0,R)$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument*
   - **(b)** *pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.*



Exercice 8. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{2^n}$. □

Exercice 9. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)\, z^n$. □

Exercice 10. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n!\, z^n$. □

Exercice 11. — Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha z^n$. □

Exercice 12. — Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$. □

Considérons une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_{>0}$. *A priori* on ne peut rien dire quant à la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ lorsque $|z| = R$. Considérons deux exemples, pour observer que différents comportements peuvent apparaître.

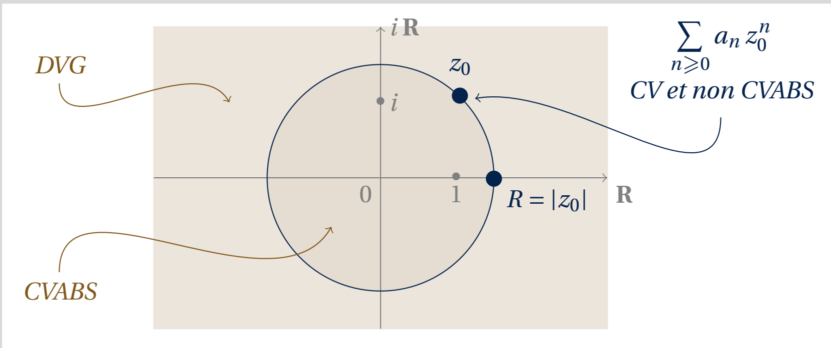
(a) La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1. Elle converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$.

(b) La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n^2}$ a également pour rayon de convergence 1. Elle converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = 1$.

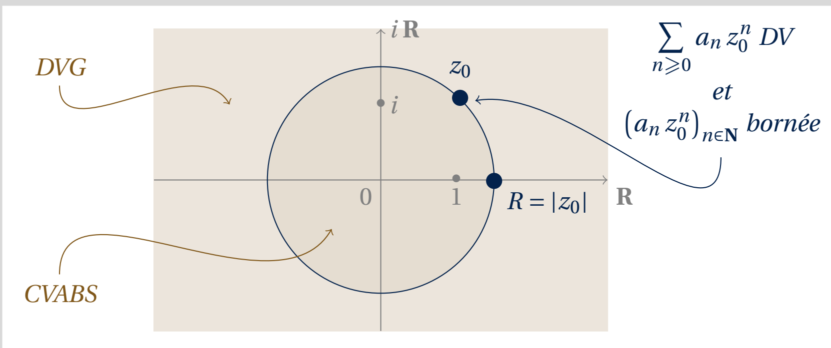
§ 3. Calcul pratique du rayon de convergence

Proposition 13 (détermination du rayon de convergence à partir d'un point atypique). — *Considérons une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence noté R et $z_0 \in \mathbf{C}$.*

1. *Si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ est convergente, mais non absolument convergente, alors $R = |z_0|$.*



2. *Si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ est divergente et la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, alors $R = |z_0|$.*



Convention. — Nous posons $\dfrac{1}{+\infty} := 0$ et $\dfrac{1}{0} := +\infty$.

Théorème 14 (règle de d'Alembert pour les séries entières). — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière dont les coefficients a_n sont supposés tous non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que :*

$$\exists \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{\ell} \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Le théorème 14 n'admet pas de réciproque. Par exemple, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \cos(n) z^n$ a pour rayon de convergence 1 et pourtant la suite de terme général

$$\left|\frac{\cos(n+1)}{\cos(n)}\right| = |\cos(1) + \sin(1)\tan(n)|$$

ne converge pas vers 1, puisqu'elle n'admet pas de limite (assertion à justifier).

Attention aux séries entières lacunaires, qui sont parfois écrites de manière trompeuse. Par exemple les coefficients a_n de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$ sont définis par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La règle de d'Alembert pour les séries entières ne peut pas être appliquée, car les coefficients ne sont pas non nuls à partir d'un certain rang. Toutefois, on peut démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$ est 1, à l'aide de la règle de d'Alembert pour les séries numériques, par exemple.

Exercice 15. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, dont les coefficients d'indices pairs a_{2n} sont non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que :

$$\exists \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$. □

Exercice 16. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{2n}$. □

Le critère de d'Alembert pour les séries entières ou pour les séries numériques est, certes utile en pratique, mais ce n'est pas le seul outil à disposition pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. Nous disposons également :

- du critère via un point atypique (proposition 13) ;
- du critère de comparaison (proposition 17) suivant.

Proposition 17 (relations de comparaison et rayon de convergence). — *Soient deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.*

1. $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n) \implies R_a \geqslant R_b$
2. $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b_n) \implies R_a \geqslant R_b$
3. $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \implies R_a = R_b$

Exercice 18. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n(n+1)}$. □

Exercice 19. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$. □

Exercice 20. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+2}\, z^n$. □

Exercice 21. — Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} P(n)\, z^n$. □

Exercice 22. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{n!}$. □

Exercice 23. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \text{ premier}} \frac{z^n}{3^n}$. □

Exercice 24. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$. □

Exercice 25. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} e^{i a_n} z^n$. □

Exercice 26. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$. □

Exercice 27. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$. □

§ 4. Somme et produit de séries entières

Proposition 28 (somme de deux séries entières). — *Soient deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de convergence respectifs R_a et R_b. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$.*

1. $R \geqslant \min(R_a, R_b)$
2. *Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.*

Exercice 29. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$ aient même rayon de convergence R. Démontrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R. □

Exercice 30. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et démontrer que :

$$\forall\, x \in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x).$$

□

Exercice 31. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et démontrer que :

$$\forall\, x \in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x).$$

□

Définition 32 (produit de Cauchy de deux séries entières). — *Le produit de Cauchy de deux séries entières* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *est la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ *où, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition 33 (rayon de convergence du produit de Cauchy). — *Soient deux séries entières* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b.

1. *Le rayon de convergence* R *de leur produit de Cauchy* $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ *vérifie* $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
2. *Pour tout* $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ *:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Exercice 34. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} A_n z^n$ est non nul. □

Exercice 35. — Considérons l'ensemble :

$$\mathscr{A} := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \;:\; R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) > 0 \right\}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$. Démontrer que $\lambda \cdot a := (\lambda a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$.
2. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$. Justifier que $a + b := (a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$.
3. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$. Justifier que $a \star b := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$.
4. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$. Justifier que $a \star b := b \star a$.
5. Soit $1_{\mathscr{A}} := \left(\delta_{0,n}\right)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Justifier que $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ puis que, pour tout $a \in \mathscr{A}$, $a \star 1_{\mathscr{A}} = a$.

   D'après 1,2,3, les applications

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda \cdot a \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{A} \times \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{A} \times \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ (a, b) & \longmapsto & a \star b \end{array}\right.$$

   sont bien définies. D'après 4 et 5, la loi interne $\star$ sur $\mathscr{A}$ est commutative et $1_{\mathscr{A}}$ est son élément neutre. On admet que $(\mathscr{A}, \cdot, +, \star)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre.

6. Démontrer que la $\mathbf{C}$-algèbre $(\mathscr{A}, \cdot, +, \star)$ est intègre.

7. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$ un élément inversible. Démontrer que $a_0 \neq 0$.

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}$ tel que $a_0 \neq 0$.

8. Justifier qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|a_n| \leqslant A^n$.

9. Justifier qu'il existe une constante $B > A$ telle que, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{B^k} \leqslant |a_0|$.

10. Supposons qu'il existe $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ tel que $a \star b = 1_{\mathscr{A}}$. Déterminer b_0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer b_{n+1} en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.

11. Soit $b = (b_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ la suite définie par la valeur de b_0 et la relation de récurrence obtenues à la question précédente. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|b_n| \leqslant \dfrac{B^n}{|a_0|}$ et en déduire que $b \in \mathscr{A}$.

12. Conclure quant aux éléments inversibles de $\mathscr{A}$.

□

§ 5. LIMITE UNIFORME ET CONTINUITÉ POUR LA VARIABLE COMPLEXE

NOTATION. — Dans toute cette partie, A désigne une partie non vide de $\mathbf{C}$.

THÉORÈME 36 (CONVERGENCE UNIFORME ET CONTINUITÉ). — *Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(A,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathscr{F}(A,\mathbf{C})$. Supposons que :*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur A ;*

(H2) $f_n \xrightarrow[A]{CU} f$.

Alors la fonction f est continue sur A.

DÉMONSTRATION. — Soient $z_0 \in A$ et $\varepsilon > 0$.

- D'après (H2) :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall z \in A, \quad \left|f_n(z) - f(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et en particulier

$$(\star) \qquad \forall z \in A, \quad \left|f_N(z) - f(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

- D'après (H1), la fonction f_N est continue en z_0 donc :

$$(\star\star) \qquad \exists \alpha > 0, \quad \forall z \in A, \quad |z - z_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f_N(z) - f_N(z_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

- Soit $z \in A$ tel que $|z - z_0| \leqslant \alpha$. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|f(z) - f(z_0)\right| \leqslant \left|f(z) - f_N(z)\right| + \left|f_N(z) - f_N(z_0)\right| + \left|f_N(z_0) - f(z_0)\right| .$$

En appliquant $(\star)$ deux fois et $(\star\star)$ une fois, il vient $\left|f(z) - f(z_0)\right| \leqslant \varepsilon$.

- Nous avons démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall z \in A, \quad |z - z_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f(z) - f(z_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

i.e. la continuité de f au point z_0. ■

COROLLAIRE 37 (CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS ET CONTINUITÉ). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(A,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$. Supposons que :*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur A ;*

(H2) *la série de fonction $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A.*

Alors la fonction :

$$S \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \end{array} \right.$$

est continue sur A.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème 36 à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(A,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, S_n est la fonction définie par :

$$S_n \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(z) \end{array} \right.$$

qui est continue sur A. ■

§ 6. De la continuité de la somme d'une série entière

Théorème 38 (CN sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence). — *Soit une série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *de rayon de convergence noté* $R > 0$. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *on définit la fonction* f_n *par :*

$$f_n \colon z \longmapsto a_n z^n.$$

1. *Si* $R = +\infty$ *alors, pour tout* $r \in \mathbf{R}$, *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge normalement sur le disque fermé* $\overline{D(0,r)}$.
2. *Si* $R \in \mathbf{R}_+^*$ *alors, pour tout* $0 < r < R$, *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge normalement sur le disque fermé* $\overline{D(0,r)}$.

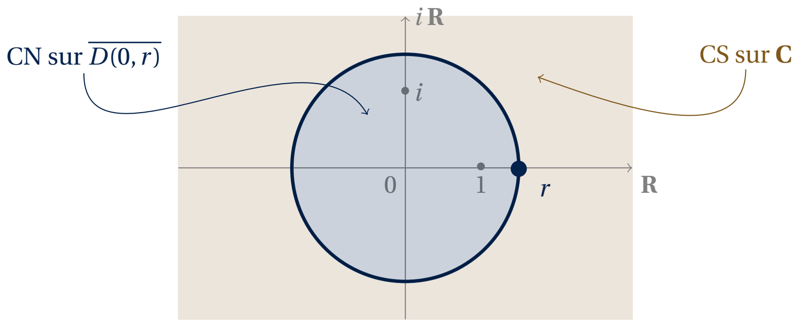
Remarque 39 (modes de convergence d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$***). —*** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} (z \longmapsto a_n z^n)$

(i) converge simplement sur $\mathbf{C}$;

(ii) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$, où $r \in \mathbf{R}_{>0}$;

(iii) ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur $\mathbf{C}$.



Donnons un contre-exemple pour justifier (iii). La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \left(z \longmapsto \frac{z^n}{n!}\right)$ converge uniformément sur $\mathbf{C}$. Alors :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant 1.$$

En particulier :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad 0 \leqslant \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant 1.$$

Ainsi la fonction $x \longmapsto \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$. Contradiction. ■

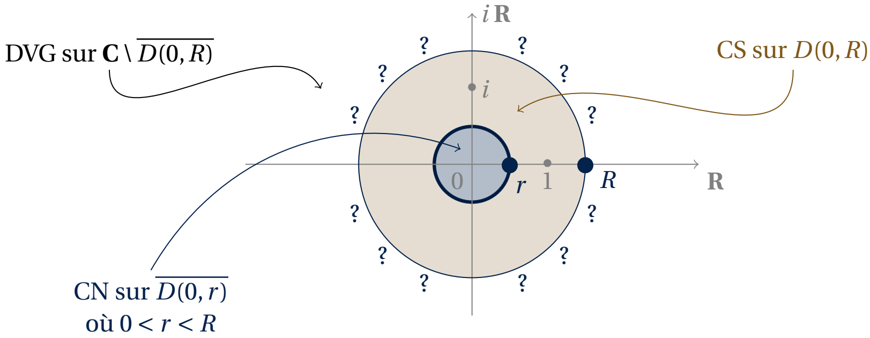
Remarque 40 (Modes de convergence d'une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$***). —*** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$.

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\left(z\longmapsto a_n z^n\right)$

(i) converge simplement sur $D(0,R)$;

(ii) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$, où $0<r<R$;

(iii) ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur $D(0,R)$.



Pour donner un contre-exemple justifiant (iii), considérons la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ de rayon de convergence $R=1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\left(z\longmapsto\frac{z^n}{n}\right)$ converge uniformément sur $D(0,1)$.

Alors :

$$\exists N\in\mathbf{N}^*,\quad \forall n\geqslant N,\quad \forall z\in D(0,1),\qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

En particulier :

$$\forall x\in[0,1[,\qquad \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{x^k}{k}\leqslant\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}=\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

d'où :

$$\forall x\in[0,1[,\qquad \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{x^k}{k}\leqslant\frac{1}{3}.$$

En faisant tendre x par valeurs inférieures vers 1, il vient :

$$(\star)\qquad \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{3}.$$

Comme, pour tout $k\in[\![N+1,2N]\!]$, $\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{2N}$ nous avons également :

$$(\star\star)\qquad \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{3}$. Contradiction. ■

COROLLAIRE 41 (CONTINUITÉ DE LA SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE). — *Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.*

1. *Si $R=+\infty$, la fonction :*

$$S\ \left|\ \begin{array}{ccc}\mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\end{array}\right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{C}$.

2. *Si $R\in\mathbf{R}_+^*$, la fonction :*

$$S\ \left|\ \begin{array}{ccc}D(0,R) & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\end{array}\right.$$

est bien définie et continue sur $D(0,R)$.

DÉMONSTRATION. — Nous démontrons le résultat dans le cas où $R>0$.

(1) Nous établissons la continuité de S sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence $D(0,R)$. Soit $r \in]0,R[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n\colon z \longmapsto a_n z^n$ est continue sur $\overline{D(0,r)}$. D'après le théorème 38, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\overline{D(0,r)}$. D'après le corollaire 37, la somme S de la série de fonctions $\sum f_n$ est continue sur $\overline{D(0,r)}$.

(2) Démontrons à présent la continuité de la fonction f en un point z_0 de $D(0,R)$. Comme :

$$|z_0| < r := \frac{|z_0| + R}{2} < R$$

l'ensemble $\overline{D(0,r)}$ est un voisinage de z_0 dans $D(0,R)$. Comme la fonction f est continue sur $\overline{D(0,r)}$, elle est continue sur un voisinage de z_0 dans $D(0,R)$, donc continue au point z_0.

■

***Exemple 42 (continuité de la fonction exponentielle complexe).* —** Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. D'après le corollaire 41, la fonction :

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbf{C}$. ■

§ 7. THÉORÈME D'ABEL RADIAL

EXERCICE 43. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} a_n R^n$ est absolument convergente.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \left(z \longmapsto a_n z^n\right)$ est normalement convergente sur $\overline{D(0,R)}$.
2. Justifier que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

□

> **THÉORÈME 44 (D'ABEL RADIAL). —** *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$.*
>
> *On suppose que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} a_n R^n$ est convergente (non nécessairement absolument convergente).*
>
> *Alors :*
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

EXERCICE 45. —

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$.
2. Expliciter la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \end{array} \right.$$

3. Démontrer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

□

EXERCICE 46. —

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.
2. Expliciter la fonction :
$$f \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \end{array} \right.$$
3. Démontrer :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

□

§ 8. DÉRIVATION ET INTÉGRATION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

THÉORÈME 47 (RAYON DE CONVERGENCE DE LA DÉRIVÉE ET D'UNE PRIMITIVE). — *Soient :*
- $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière;*
- $\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n z^{n-1}$ *sa série entière dérivée;*
- $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ *sa série entière primitive.*

Ces trois séries entières ont même rayon de convergence, i.e. :
$$R\left(\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n z^{n-1}\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right).$$

DÉMONSTRATION. — Nous démontrons :
$$R := R\left(\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n z^{n-1}\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) := R'.$$

Nous en déduirons $R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right)$ puisque la série entière dérivée de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
Posons :
$$I := \left\{ r \in \mathbf{R}_+ \ :\ \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\}$$
et
$$I' := \left\{ r \in \mathbf{R}_+ \ :\ \left(n\, a_n r^{n-1}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\} = \left\{ r \in \mathbf{R}_+ \ :\ \left(n\, a_n r^n\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\}$$
de sorte que $R := \sup(I)$ et $R' := \sup(I')$.

(1) Nous commençons par établir l'inclusion $I' \subset I$, ce qui implique $R' \leqslant R$.
Soit $r \in I'$. D'une part :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \left|a_n r^n\right| = |a_n|\, r^n \leqslant n\, |a_n|\, r^n = \left|n\, a_n r^n\right|$$
et d'autre part la suite $(n\, a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Nous en déduisons que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, i.e. $r \in I$.
Nous avons démontré que $I' \subset I$, ce qui implique $R' \leqslant R$.

(2) Nous démontrons l'inclusion $[0, R[\subset I'$, qui implique $R \leqslant R'$.
Soit $r \in [0, R[$. Nous introduisons un réel ρ tel que $r < \rho < R$. D'une part :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \left|n\, a_n r^n\right| = \underbrace{n \left|\frac{r}{\rho}\right|^n}_{=:u_n} \underbrace{|a_n|\, \rho^n}_{=:v_n}.$$
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 (croissances comparées) et la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée ($\rho \in I$), la suite $(n\, a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, i.e. $r \in I'$.

■

CONVENTION POUR LA SUITE DU COURS. — Désormais, on s'intéresse uniquement aux fonction d'une variable réelle définies comme somme d'une série entière. On restreindra donc les séries entières à la variable réelle et on parlera, par abus de langage, d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, où $x\in\mathbf{R}$, plutôt que d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, où $z\in\mathbf{C}$.

COROLLAIRE 48 (DÉRIVATION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE). — *Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et S la fonction définie par :*

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

1. *La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.*
2. *Pour tout $p\in\mathbf{N}^*$, la série entière $\sum_{n\geqslant p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$ a pour rayon de convergence R et :*

$$\forall x\in]-R,R[,\quad S^{(p)}(x)=\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p)!}a_n x^{n-p}.$$

EXERCICE 49. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$ et démontrer que :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

□

EXERCICE 50. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n^2 x^n$ et démontrer que :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n=-\frac{x^2+x}{(x-1)^3}.$$

□

COROLLAIRE 51 (PRIMITIVATION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE). — *Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et S la fonction définie par :*

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

EXERCICE 52. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et démontrer que :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x).$$

□

Exercice 53. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et démontrer que :

$$\forall\, x \in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan}(x).$$

□

> **Corollaire 54 (coefficients d'une série entière versus nombres dérivées successifs).** — *Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et S la fonction définie par :*
>
> $$S \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n. \end{array}\right.$$
>
> *Alors :*
>
> $$\forall\, n\in\mathbf{N},\quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$
>
> *d'où le « développement de Taylor infini » suivant :*
>
> $$\forall\, x\in]-R,R[,\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Exercice 55. — Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs $R_a>0$ et $R_b>0$. On suppose que :

$$\exists\, \alpha\in\,]0,\min\{R_a,R_b\}[,\quad \forall\, x \in]0,\alpha[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n.$$

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $a_n=b_n$. □

§ 9. Développement d'une fonction en série entière

Problématique. — On s'intéresse dans ce paragraphe à un moyen de déterminer si une fonction donnée peut s'exprimer comme la somme d'une série entière.

> **Définition 56 (fonction développable en série entière).** — *Soient I un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ de rayon de convergence $R>0$ telle que :*
>
> $$\forall\, x\in I\cap\,]-R,R[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n.$$

Exercice 57. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}\right.$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$. □

THÉORÈME 58 (UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE). — *Soient I un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Supposons f est développable en série entière au voisinage de 0.*
Alors :

1. *la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 ;*
2. *son développement en série entière est unique et il est donné par :*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{\text{somme de la série de Taylor de } f} \qquad \left[\text{identité valide sur un voisinage de } 0\right].$$

DÉMONSTRATION. —

(1) Par hypothèse, il existe une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que :

$$\forall x \in I \cap]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'après le corollaire 48, la fonction :

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0. La fonction f, qui coïncide avec S au voisinage de 0, l'est donc aussi.

(2) D'après le corollaire 54 :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Comme f et S coïncident au voisinage de 0, nous en déduisons :

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

puis :

$$\forall x \in I \cap]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

(3) L'unicité du développement en série entière de f est conséquence de $(\star)$.

■

EXERCICE 59. — Soient I un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Que dire de la fonction f si toutes les dérivées itérées s'annulent en 0 ? □

THÉORÈME 60 (CONDITION NÉCESSAIRE/SUFFISANTE POUR ÊTRE DSE AU VOISINAGE DE 0). — *Soient I un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction.*

- **Condition nécessaire.** *Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.*
- **Condition suffisante.** *S'il existe un réel $a > 0$ tel que :*

  (H1) *f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$;*

  (H2) $\exists M \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in]-a, a[, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M \dfrac{n!}{a^n}$ *(condition de croissance de Cauchy)*

  alors f est développable en série entière au voisinage de 0.

DÉMONSTRATION. — La condition nécessaire a déjà été démontrée (cf. théorème 58). Démontrons la condition suffisante et, pour ce faire, supposons qu'il existe un réel $a > 0$ vérifiant (H1) et (H2).

(1) Fixons $x \in]-a,a[\setminus \{0\}$. D'après (H1), la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a,a[$. Nous pouvons lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t}_{=:R_n(x)}.$$

(2) Soit $n \in \mathbf{N}$. Le changement de variable $t = ux$ nous permet d'écrire :

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(ux)\, \mathrm{d}u.$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(ux) \right| \mathrm{d}u \\ &\leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, M\, \frac{(n+1)!}{a^{n+1}}\, \mathrm{d}u \qquad [\text{d'après (H2)}] \\ &\leqslant M \left| \frac{x}{a} \right|^{n+1} \underbrace{\int_0^1 (n+1)(1-u)^n\, \mathrm{d}u}_{=1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement :

$$R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(3) D'après (1) et (2) :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Donc la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = f(x).$$

Ce résultat vaut également pour $x = 0$.

(4) Remarquons que, comme la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(x \longmapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \right)$ converge simplement sur $]-a,a[$, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ est supérieur ou égal à a.

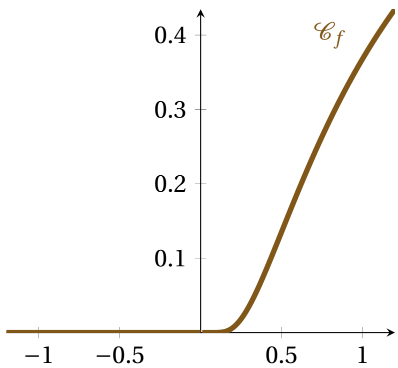
■

Remarque 61 (une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 mais non DSE au voisinage de 0). — La condition nécessaire « f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 » n'est pas suffisante.

La fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas DSE au voisinage de 0. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$, mais la fonction f n'est pas nulle au voisinage de 0.



■

§ 10. QUELQUES MÉTHODES ET EXEMPLES

1. CALCULS DE DSE PAR DÉRIVATION OU PRIMITIVATION

EXERCICE 62. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$. □

EXERCICE 63. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1-x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$. □

EXERCICE 64. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$. □

2. CALCULS DE DSE À L'AIDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

EXERCICE 65. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (1+x)^\alpha \end{array} \right.$$

en utilisant une équation différentielle. □

3. CALCULS DE DSE À L'AIDE D'UN PRODUIT DE CAUCHY

EXERCICE 66. — Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}. \end{array} \right.$$

□

4. APPLICATIONS DE LA TABLE DES DSE USUELS

EXERCICE 67. — Développer les fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1+x^2}{1-x^2} \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{1+x}{(1-x)^2} \qquad f_3 : x \longmapsto \frac{x}{(1-x)(1-2x)^2} \qquad f_4 : x \longmapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

en série entière au voisinage de 0, en précisant les rayons de convergence. □

EXERCICE 68. — Exprimer les sommes des séries entières suivantes :

$$S_1(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n \qquad S_2(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)} \qquad S_3(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n \qquad S_4(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}.$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé les rayons de convergence. □

§ 11. TABLE DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE USUELS

Fonction	DSE	Rayon	Une démarche pour obtenir le DSE
$x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	Cf. résultats sur les séries géométriques.
$x \longmapsto e^x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	Solution du problème de Cauchy : $I = \mathbf{R}$, $y' = y$, $y(0) = 1$.
$x \longmapsto \sin(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie imaginaire de la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = (-1)^n\, i$.
$x \longmapsto \cos(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie réelle de la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = (-1)^n\, i$.
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie impaire de la fonction $x \longmapsto e^x$.
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie paire de la fonction $x \longmapsto e^x$.
$x \longmapsto (1+x)^\alpha$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!}\, x^n$	1	Solution du problème de Cauchy : $I =]-1, 1[$, $(1+x)\, y' = \alpha\, y$, $y(0) = 1$.
$x \longmapsto \ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (-x)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.
$x \longmapsto \arctan(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow \left(-x^2\right)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.
$x \longmapsto \arcsin(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow \left(-x^2\right)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto (1+x)^{-1/2}$, avec une expression de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)$ en termes de factorielles et de puissances de 2, dans le cas $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.