THÉORÈMES DE LEBESGUE ET INTÉGRALES À PARAMÈTRE

par David Blottière, le 11 janvier 2024 à 09h03

CHAPITRE

11

NOTATION. — Dans tout ce document, I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}_{\text{pm}}(I, \mathbf{C})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$, continues par morceaux sur I.

SOMMAIRE

§ 1. Théorème de convergence dominée

THÉORÈME 1 (CONVERGENCE DOMINÉE). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$ telle que :*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{C})$;*

(H2) *il existe une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $f \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{C})$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$;*

(H3) *il existe une fonction dominante $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ *[hypothèse de domination].*

Alors :

(C1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur I ;*

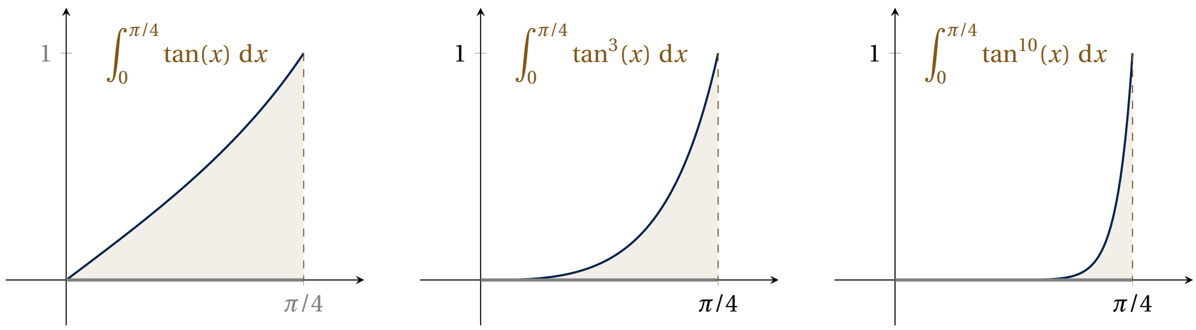
(C2) *f est intégrable sur I ;*

(C3) $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$

Ce théorème est admis.

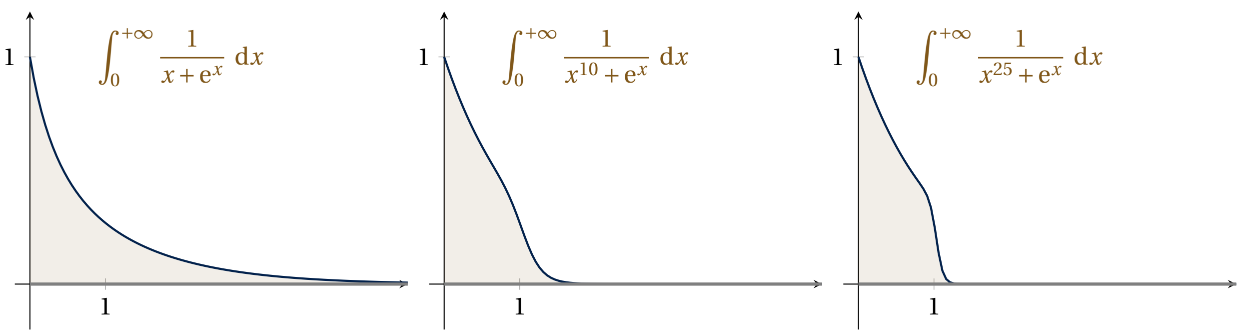
Remarque 2. — Le théorème 1 donne une condition suffisante pour qu'une limite simple de suite de fonctions soit intégrable. ■

EXERCICE 3. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.



□

EXERCICE 4. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.



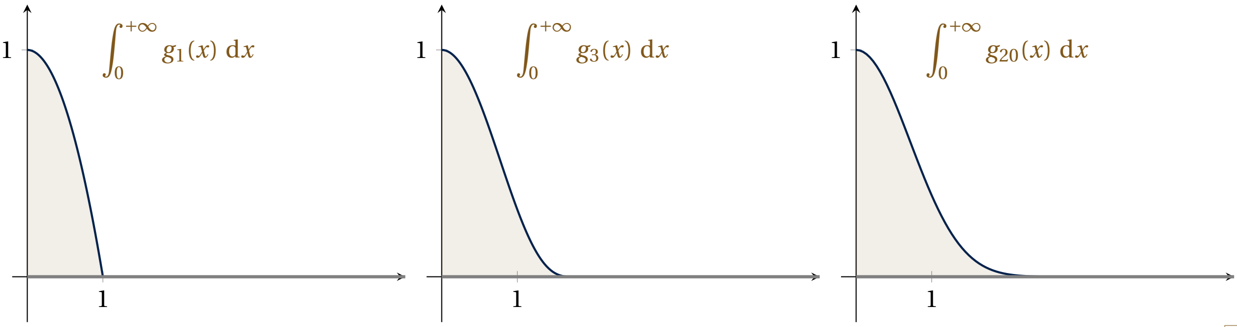
□

EXERCICE 5 (VALEUR DE LA GAUSSIENNE À L'AIDE DU THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE). — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}[}(x). \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

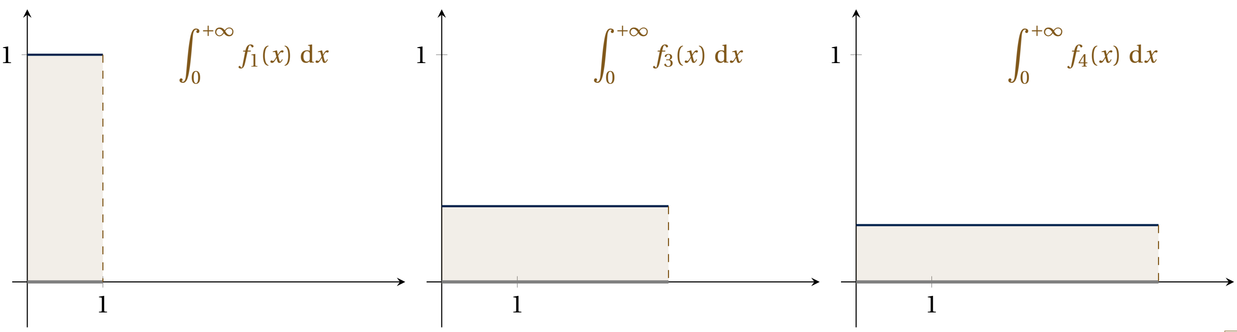


□

Exercice 6 (de l'importance de l'hypothèse de domination). — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x). \end{array} \right.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ ne tend pas vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, quand n tend vers $+\infty$.



□

Exercice 7. — Soit $a > 0$. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t \underset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}.$$

En spécialisant $(\star)$ à $a \in \{1,2\}$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

En spécialisant $(\star)$ à $a \in \{3,4\}$ et en développant les fractions rationnelles $\dfrac{1}{X^3+1}$ et $\dfrac{1}{X^4+1}$ en éléments simples, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\ln(2)}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{\pi + \ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\sqrt{2}}.$$

□

Exercice 8. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$. □

COROLLAIRE 9 (VERSION CONTINUE DU THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE). — *Soient A et I deux intervalles de* $\mathbf{R}$ *d'intérieurs non vides et soit $f: A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ une application. Pour tout $x \in A$, posons :*

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t)\,. \end{array} \right.$$

Soit x_0 un point ou une extrémité de A. Supposons :

(H1) *pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot) \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{C})$;*

(H2) *il existe une fonction $g: I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux, telle que pour tout $t \in I$,*

$$f(x,t) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(t)$$

(H3) *il existe une fonction dominante $\varphi: I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ *[hypothèse de domination].*

Alors :

(C1) *pour tout $x \in I$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ;*

(C2) *g est intégrable sur I ;*

(C3) $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to x_0]{} \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — Ce corollaire est conséquence du théorème de convergence dominée 1 et du critère séquentiel pour les limites. □

§ 2. THÉORÈME D'INTÉGRATION TERME-À-TERME

THÉORÈME 10 (INTÉGRATION TERME-À-TERME). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans* $\mathbf{C}$ *telle que :*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;*

(H2) *la série de fonction $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{C})$;*

(H3) *la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \int_I |f_n|$ converge.*

Alors :

(C1) *la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ;*

(C2) $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Ce théorème est admis.

***Remarque 11.* —** Le théorème 10 donne une condition suffisante pour qu'une somme de série de fonctions convergeant simplement soit intégrable. ■

EXERCICE 12. — Soit $x \in]-1,1[$. Démontrer l'identité :

$$\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{u^2} - x}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

EXERCICE 13. — Démontrer l'identité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis. □

EXERCICE 14. — Démontrer l'identité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis. □

§ 3. INTÉGRALES À PARAMÈTRE : PROBLÉMATIQUE ET EXEMPLES

1. PROBLÉMATIQUE

On considère :

- un intervalle A de $\mathbf{R}$ (ensemble des paramètres) ;
- un intervalle I de $\mathbf{R}$ (intervalle d'intégration) ;
- une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t). \end{array} \right.$$

Nous supposons que, pour tout x fixé dans A, la fonction :

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi, pour tout x fixé dans A :

$$\int_I f(x,t)\, dt$$

est un nombre complexe bien défini.

Nous nous proposons d'étudier ces différents nombres complexes (pour chaque x fixé dans A, nous en avons un à disposition) « ensemble », i.e. nous nous intéressons à la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\, dt \end{array} \right. \qquad \text{[intégrale à paramètre]}.$$

Précisément, nous étudions la régularité de cette fonction g sur A : continuité, dérivabilité et dérivée éventuelle, caractère $\mathscr{C}^k$ et dérivée k-ième éventuelle ($k \in \mathbf{N}^*$).

2. EXEMPLES DE FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE

***Exemple 15 (fonction Γ d'Euler).* —** La fonction Γ d'Euler, qui est définie par :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt. \end{array} \right.$$

Nous démontrerons que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et qu'elle interpole la factorielle, i.e. que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$. ■

***Exemple 16 (transformée de Laplace).* —** Si $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([0,+\infty[,\mathbf{C})$ est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$, alors on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}(f)$ par :

$$\mathscr{L}(f) \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt. \end{array} \right.$$

La transformée de Laplace peut être utilisée pour résoudre des équations différentielles. ■

Exemple 17 (transformée de Fourier). — Si $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, alors on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ par :

$$\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

La transformée de Fourier trouve également des applications dans la résolution d'équations différentielles. ■

§ 4. Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 18 (continuité pour d'intégrale à paramètre). — *Soient A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$. Supposons :*

(H1) *pour tout $x \in A$, l'application :*

$$f(x, \cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur I ;

(H2) *pour tout $t \in I$, l'application :*

$$f(\cdot, t) \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est continue sur A ;

(H3) *il existe une fonction dominante $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors :

(C1) *pour tout $x \in A$, la fonction :*

$$f(x, \cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur I ;

(C2) *la fonction :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est continue sur A.

Remarque 19 (version du théorème 18, avec une hypothèse de domination locale). — Les résultats du théorème 18 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H3), par la version locale en x suivante :

(H3 locale) *pour tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta} : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *$\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t) \in [\alpha, \beta] \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t)$.

qui s'avère être utile dans la pratique.

Démontrons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3 locale) livrent les mêmes conclusions (C1), (C2), i.e. que sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3 locale), pour tout $x_0 \in I$:

- la fonction $f(x_0, \cdot)$ est intégrale sur I ;
- la fonction g est continue en x_0.

Nous établissons, ici, ce résultat uniquement dans le cas particulier où x_0 est intérieur à A, i.e. dans le cas où x_0 n'est pas une extrémité de A. Si x_0 est un point de A, qui n'est pas une extrémité de A, alors il existe $(\alpha, \beta) \in A^2$ tels que $\alpha < x < \beta$. Le segment $[\alpha, \beta]$ est inclus dans A et constitue un voisinage de x_0.

D'après (H1), (H2) et (H3 locale), les hypothèses du théorème 18 sont vérifiées pour la fonction :

$$f_{\alpha,\beta} \left| \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] \times I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right. \qquad \big[\text{restriction de } f \text{ à } [\alpha,\beta]\times I\big].$$

On en déduit que :

(C1) pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, en particulier pour x_0, la fonction $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I

(C2) la fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \qquad \big[\text{restriction de la fonction } g \text{ à } [\alpha,\beta]\big]$$

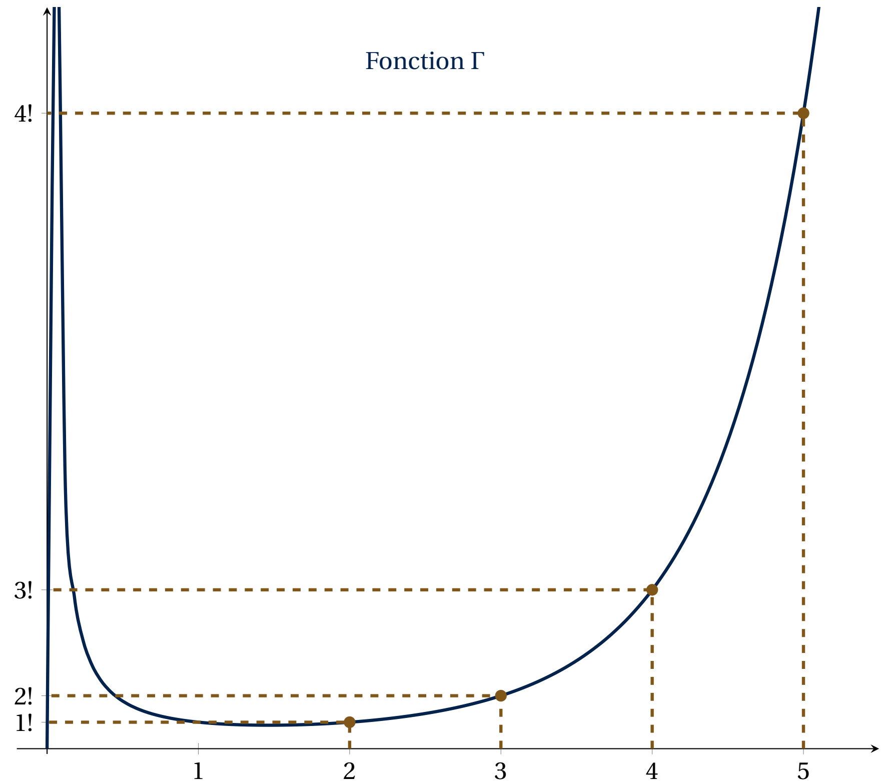
est continue sur $[\alpha, \beta]$, en particulier en x_0.

L'argument repose sur le fait que la continuité d'une fonction est une notion locale. ■

EXERCICE 21 (CONTINUITÉ DE LA FONCTION GAMMA D'EULER). — Soit Γ la fonction définie par :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction Γ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.



□

EXERCICE 22. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$. □

EXERCICE 23. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t x^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$. □

EXERCICE 24. — Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction bornée. Soit g la fonction définie par Posons

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|} f(x-t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbf{R}$. □

§ 5. DÉRIVÉE D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE

THÉORÈME 25 (DÉRIVABILITÉ POUR UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE). — *Soient A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbf{C}$. Supposons :*

(H1) *pour tout $t \in I$, l'application*

$$f(\cdot,t) \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, dont nous notons la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)$;

(H2) *pour tout $x \in A$, les applications :*

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array} \right.$$

sont continues par morceaux sur I ;

(H3) *pour tout $x \in A$, l'application*

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur I ;

(H4) *il existe une fonction dominante $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t) \in A\times I, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$

Alors :

(C1) *pour tout $x \in A$, la fonction :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur I ;

(C3) *la fonction :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et de plus :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 26 (version du théorème 25 avec une hypothèse de domination locale). — Les résultats du théorème 25 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H4), par la version locale en x suivante :

(H4 locale) *pour tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta} : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :*

(a) *$\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*

(b) $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times I, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t).$

qui s'avère être utile dans la pratique.

Démontrons que les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4 locale) livrent les mêmes conclusions (C1), (C2), i.e. que sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4 locale) , pour tout $x_0 \in A$:

- la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, \cdot)$ est intégrale sur I ;
- g est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0 ;
- $g'(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\, \mathrm{d}t.$

Nous établissons, ici, ce résultat uniquement dans le cas particulier où x_0 est intérieur à A, i.e. dans le cas où x_0 n'est pas une extrémité de A. Si x_0 est un point de A, qui n'est pas une extrémité de A, alors il existe $(\alpha, \beta) \in A^2$ tels que $\alpha < x < \beta$. Le segment $[\alpha, \beta]$ est inclus dans A et constitue un voisinage de x_0.

D'après (H1), (H2), (H3) et (H4 locale), les hypothèses du théorème 25 sont vérifiées pour la fonction :

$$f_{\alpha,\beta} \left| \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] \times I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right. \qquad \big[\text{restriction de } f \text{ à } [\alpha,\beta] \times I\big].$$

On en déduit que :

(C1) pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, en particulier pour x_0, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(C2) la fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right. \qquad \big[\text{restriction de } g \text{ à } [\alpha,\beta]\big]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, qui est un voisinage de x_0. De plus, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, en particulier pour x_0 :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

L'argument repose sur le fait que la dérivabilité et la dérivée d'une fonction sont des notions locales. ■

EXERCICE 28 (DÉRIVABILITÉ ET DÉRIVÉE DE LA FONCTION GAMMA). — Démontrer que la fonction Γ définie par :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

qui est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$ (cf. exercice 21), est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_{>0}, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

□

EXERCICE 29. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

qui est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$ (cf. exercice 22), est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale. □

EXERCICE 30. — Démontrer que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+t^3}\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

qui est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$ (cf. exercice 23), est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale. □

§ 6. Dérivées d'ordre supérieur d'une intégrale à paramètre

Théorème 31 (dérivées d'ordre supérieur pour une intégrale à paramètre). — *Soit A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbf{C}$ et $k\in\mathbf{N}^*$. Supposons :*

(H1) *pour tout $t\in I$, l'application :*

$$f(\cdot\,,t)\;\left|\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ x & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$$

est une application de classe $\mathscr{C}^k$ sur A, dont nous notons la dérivée ℓ-ième $\dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(\cdot\,,t)$ pour tout $\ell\in[\![1,k]\!]$;

(H2) *pour tout $x\in A$, les applications :*

$$f(x,\cdot)\;\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ t & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right. \qquad \text{et, pour tout } \ell\in[\![1,k]\!],\quad \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,\cdot)\;\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t)\end{array}\right.$$

sont continues par morceaux sur I ;

(H3) *pour tout $x\in A$, les applications :*

$$f(x,\cdot)\;\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ t & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right. \qquad \text{et, pour tout } \ell\in[\![1,k-1]\!],\quad \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,\cdot)\;\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t)\end{array}\right.$$

sont intégrables sur I ;

(H4) *il existe une fonction dominante $\varphi\colon I\longrightarrow\mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *φ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t)\in A\times I,\quad \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t).$

Alors :

(C1) *pour tout $x\in A$, la fonction :*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot)\;\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\end{array}\right.$$

est intégrable sur I ;

(C2) *la fonction :*

$$g\;\left|\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et de plus :

$$\forall \ell\in[\![1,k]\!],\quad \forall x\in A,\quad g^{(\ell)}(x)=\int_I \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 32 (version du théorème 31, avec une hypothèse de domination locale). — Comme pour les théorèmes 18 et 25, les résultats du théorème 31 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H4), par la version locale en x suivante.

(H4 locale) *pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta}\colon I\longrightarrow\mathbf{R}_+$ telle que :*

- **(a)** *$\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- **(b)** $\forall (x,t)\in[\alpha,\beta]\times I,\quad \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\varphi_{\alpha,\beta}(t).$

qui s'avère être utile dans la pratique. ■

§ 7. Deux exercices classiques

Exercice 34 (Calcul de la Gaussienne à l'aide d'une équation différentielle). — On se propose de calculer :

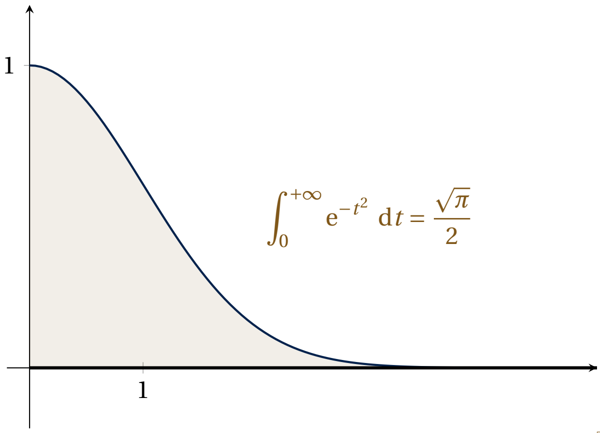
$$I := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

en résolvant une équation différentielle.

Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2. Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. En déduire la valeur de I.



□

Exercice 35 (Étude approfondie de la fonction Gamma). — On se propose d'étudier la fonction :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\, x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$
2. Que dire de la convexité de la fonction Γ ?
3. Démontrer que la fonction Γ' s'annule en un unique point $\alpha \in]1,2[$ et en déduire le sens de variation de la fonction Γ.
4. Déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ du résultat principal de l'exercice 34.
5. Démontrer que :
$$\forall\, x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$
6. Calculer $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$.
7. Démontrer que :
$$\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$
et en déduire la limite de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
8. Démontrer que :
$$\Gamma(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
puis que :
$$\forall\, \beta \in]0,+\infty[, \quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\Gamma(x)\right).$$

□