# Suites et séries de fonctions

*par David Blottière, le 6 mars 2024 à 16h36*

**Chapitre 10**

**Notation. —** Dans tout le document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $X$ est un ensemble non vide.

## Sommaire

# § 1. CONVERGENCE SIMPLE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

**DÉFINITION 1 (CONVERGENCE SIMPLE D'UNE SUITE DE FONCTIONS). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers $f$ sur $X$, et on note $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CS} f$, si :*

$$\forall x \in X, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(x)$$

*i.e. si :*

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon}, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

***Exemple 2 (suite des arcs).* —** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n$ la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array} \right.$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f$ sur $[0,1]$, où $f$ est la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

■

Dans l'exemple ci-dessus :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) \neq \lim_{x\to 1} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

La seule convergence simple ne permet donc pas d'échanger les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to 1}$, en supposant que les différentes limites existent.

**EXERCICE 3 (GAUSSIENNE GLISSANTE). —** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n$ la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-(x-n)^2}. \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbf{R}$. □

**EXERCICE 4 (ÉCHELLE MONTANTE). —** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f_n$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $f_n(1) = 0$ et $f_n$ est affine sur chacun des segments $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

1. Représenter graphiquement les fonctions $f_1, f_2, f_3, f_4$.
2. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
3. Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

□

Dans l'exemple ci-dessus :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La seule convergence simple ne permet donc pas d'échanger les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_0^1$, en supposant que les différentes limites existent.

# § 2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions

**Notation. —** La lettre $X$ désigne un ensemble non vide.

**Définition 5 (convergence uniforme d'une suite de fonctions). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $X$, et on note $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$, si :*

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,N_\varepsilon\in\mathbf{N},\quad \forall\,n\geqslant N_\varepsilon,\quad \forall\,x\in X,\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon.$$

***Remarque 6 (CS versus CU).* —** Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. Alors :

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} f \iff \underline{\forall\,x\in X},\quad \forall\,\varepsilon>0,\quad \underline{\exists\,N_{x,\varepsilon}\in\mathbf{N}},\quad \forall\,n\geqslant N_{x,\varepsilon},\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CU}} f \iff \forall\,\varepsilon>0,\quad \underline{\exists\,N_\varepsilon\in\mathbf{N}},\quad \forall\,n\geqslant N_\varepsilon,\quad \underline{\forall\,x\in X},\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Dans la définition de la convergence uniforme, le rang $N_\varepsilon$ peut être choisi le même pour tous les éléments $x$ de $X$, d'où la terminologie « uniforme ». ■

**Proposition 7 (CU implique CS). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. Alors :*

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f \implies f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CS} f.$$

La convergence simple n'implique par la convergence uniforme. Par exemple :

$$f_n \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right. \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} f \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0\leqslant x<1 \\ 1 & \text{si } x=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Cependant, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction $f$ sur $[0,1]$, sinon :

$$\exists\,N\in\mathbf{N},\quad \forall\,n\geqslant N,\quad \forall\,x\in[0,1],\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{2e}$$

ce qui implique :

$$\forall\,n\geqslant N,\quad \left|f_n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-f\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2e}$$

i.e. :

$$\forall\,n\geqslant N,\quad \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\leqslant\frac{1}{2e}.$$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, il vient alors $\frac{1}{e}\leqslant\frac{1}{2e}$. Contradiction.

**Rappel. — (a)** L'ensemble :

$$\mathscr{B}(X,\mathbf{K}) := \left\{f\in\mathscr{F}(X,\mathbf{K}) \;:\; f \text{ est bornée sur } X\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(X,\mathbf{K})$.

**(b)** L'application :

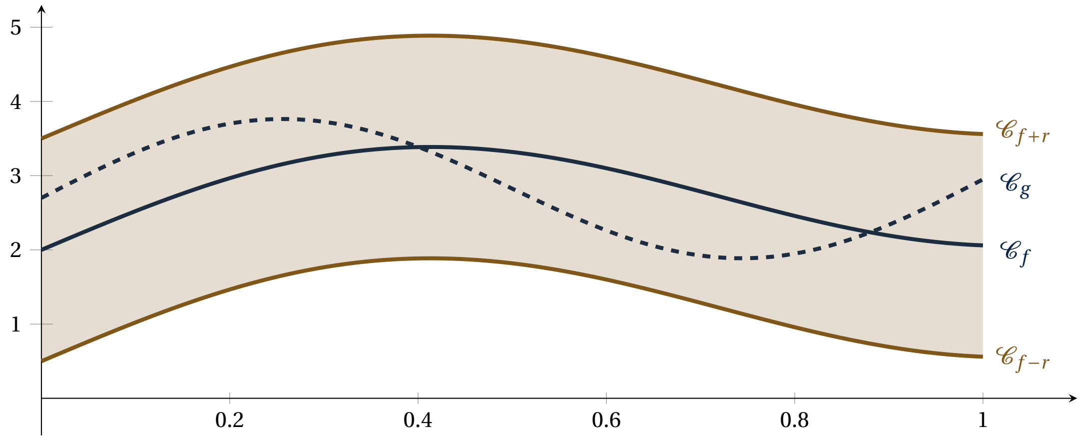
$$||\cdot||_\infty \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{B}(X,\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & ||f||_\infty := \left\{\left|f(x)\right| \;:\; x\in X\right\} \end{array}\right.$$

est une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbf{K})$.

**(c)** Si $X = [0,1]$, $f \in \mathscr{B}([0,1],\mathbf{R})$ et $r > 0$, alors, pour tout $g \in \mathscr{B}([0,1],\mathbf{R})$ :

$$\begin{array}{rcl} g \in \overline{B(f,r)} & \iff & \|f-g\|_\infty \leqslant r \\ & \iff & \forall x \in [0,1], \quad |f(x)-g(x)| \leqslant r \\ & \iff & \forall x \in [0,1], \quad f(x)-r \leqslant g(x) \leqslant f(x)+r \\ & \iff & f-r \leqslant g \leqslant f+r \end{array}$$

Les fonctions $g$ de $\overline{B(f,r)}$ sont donc celles qui ont leur courbe représentative dans le « tube » ci-dessous.




**PROPOSITION 8 (CONVERGENCE UNIFORME ET NORME INFINIE).** — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{B}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathscr{B}(X,\mathbf{K})$. Alors :*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \quad \iff \quad \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**EXERCICE 9.** — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f_n$ la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\cdot\cos(x). \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbf{R}$. □

**EXERCICE 10.** — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n$ la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \left[0,\dfrac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. □

**EXERCICE 11.** — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f_n$ la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x}. \end{array} \right.$$

□

**PROPOSITION 12 (UN CRITÈRE DE NON-CONVERGENCE UNIFORME). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $I$ telle que :*

$$\text{la suite numérique } (f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbf{N}} \text{ ne converge pas vers } 0$$

*alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction $f$.*

**EXERCICE 13. —** Dans l'exercice 3, nous avons établi une convergence simple d'une suite de fonctions. Démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme pour cette suite de fonctions. □

## § 3. LA CONVERGENCE SIMPLE N'EST PAS ASSOCIÉE À UNE NORME (HP)

**DÉFINITION 14 (TOPOLOGIE SUR UN ENSEMBLE). —** *Une topologie sur un ensemble $X$ est la donnée d'un ensemble $\mathscr{O}$ de parties de $X$, appelées ouverts, vérifiant les trois axiomes suivants.*

**(T1)** *Les ensembles $X$ et $\varnothing$ sont ouverts.*

$$X \in \mathscr{O} \quad \text{et} \quad \varnothing \in \mathscr{O}$$

**(T2)** *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

$$\forall\, p \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\,(U_1,\dots,U_p) \in \mathscr{O}^p, \quad \bigcap_{k=1}^{p} U_k \in \mathscr{O}$$

**(T3)** *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.*

$$\forall (U_i)_{i\in I} \in \mathscr{O}^I, \quad \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathscr{O}$$

***Exemple 15 (topologie grossière). —*** Si $X$ est un ensemble, alors $\{X,\varnothing\}$ est une topologie sur $X$, appelée topologie grossière. ■

***Exemple 16 (topologie discrète). —*** Si $X$ est un ensemble, alors $\mathscr{P}(X)$ est une topologie sur $X$, appelée topologie discrète. ■

***Exemple 17 (topologie d'un espace vectoriel normé). —*** Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie $U$ de $E$ est dite ouverte si :

$$\forall\, x \in U, \quad \exists\, r_x > 0, \quad B(x, r_x) \subset U.$$

L'ensemble $\mathscr{O}$ des parties ouvertes de $E$ définit une topologie sur $E$, i.e. vérifie les axiomes T1, T2 et T3. ■

**PROPOSITION 18 (TOPOLOGIE ENGENDRÉE). —** *Soient $X$ un ensemble et $\mathscr{A}$ un ensemble de parties de $X$. Nous définissons l'ensemble :*

$$\mathscr{B} := \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j \;:\; n \in \mathbf{N}^* \text{ et } (A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{A}^n \right\} \qquad [\text{ensemble des intersections finies d'éléments de } \mathscr{A}]$$

*et l'ensemble :*

$$\mathscr{T} = \left\{ C \in \mathscr{P}(X) \;:\; \exists (B_i)_{i\in I} \in \mathscr{B}^I,\ C = \bigcup_{i\in I} B_i \right\} \qquad [\text{ensemble des réunions quelconques d'éléments de } \mathscr{B}].$$

1. *L'ensemble $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$ est une topologie sur $X$ qui contient $\mathscr{A}$, i.e. dont tous les éléments de $\mathscr{A}$ sont ouverts.*
2. *Parmi toutes les topologies de $X$ contenant $\mathscr{A}$, $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion). On l'appelle topologie engendrée par $\mathscr{A}$.*
3. *Un ouvert de la topologie engendrée par $\mathscr{A}$ est donc $\varnothing$ ou $X$ ou une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{A}$.*

**DÉMONSTRATION. —** • L'ensemble $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$ vérifie l'axiome (T1). Clair.

• L'ensemble $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$ vérifie l'axiome (T2). Soit $U_1, \dots, U_n$ un nombre fini d'éléments de $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$. Nous démontrons que $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

(i) S'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $U_{k_0} = \varnothing$, alors $\bigcap_{k=1}^{n} U_k = \varnothing \in \mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

(ii) S'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $U_{k_0} = X$, alors $\bigcap_{k=1}^{n} U_k = \bigcap_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{k_0\}} U_k$.

(iii) D'après (i) et (ii), nous pouvons supposer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $U_k \in \mathscr{T}$. Ainsi :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \exists \left(B_{k,i_k}\right)_{i_k \in I_k} \in \mathscr{B}^{I_k}, \quad U_k = \bigcup_{i_k \in I_k} B_{k,i_k}.$$

Alors :

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k = \bigcap_{k=1}^{n} \left( \bigcup_{i_k \in I_k} B_{k,i_k} \right) = \bigcup_{(i_1,\dots,i_n) \in I_1 \times \dots \times I_n} \left( \bigcap_{k=1}^{n} B_{k,i_k} \right)$$

Comme $\mathscr{B}$ est stable par intersection finie et $\mathscr{T}$ est stable par réunion quelconque, il vient $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathscr{T}$.

• L'ensemble $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$ vérifie l'axiome (T3). Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$. Nous démontrons que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

(iv) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} = X$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i = X \in \mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$.

(v) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} = \varnothing$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} U_i$.

(vi) D'après (iv) et (v), nous pouvons supposer que, pour tout $i \in I$, $U_i \in \mathscr{T}$. Ainsi :

$$\forall\, i \in I, \quad \exists \left(B_{i,j_i}\right)_{j_i \in J_i} \in \mathscr{B}^{J_i}, \quad U_i = \bigcup_{j_i \in J_i} B_{i,j_i}.$$

Alors :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left( \bigcup_{j_i \in J_i} B_{i,j_i} \right).$$

Comme $\mathscr{T}$ est stable par réunion quelconque, il vient $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathscr{T}$.

• Caractère minimal de la topologie $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$. Tout élément de $\mathscr{A}$ est élément de $\mathscr{B}$ donc, *a fortiori*, appartient à $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$. La topologie $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\}$ contient donc $\mathscr{A}$.

Soit $\mathscr{O}$ une topologie qui contient $\mathscr{A}$. Nous démontrons que $\mathscr{T} \cup \{\varnothing, X\} \subset \mathscr{O}$.

D'après (T1), $X$ et $\varnothing$ appartiennent à $\mathscr{O}$.

D'après (T2), $\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$. Alors, d'après (T3), $\mathscr{T} \subset \mathscr{O}$.

■

***Remarque 19.* —** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que $E \neq \{0_E\}$. La topologie $\mathscr{O}$ associée, définie dans l'exemple 17, est la topologie engendrée par :

$$\{B(x, r) \,:\, (x, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}\}$$

i.e. la plus petite topologie contenant toutes les boules ouvertes. Un ouvert de $\mathscr{O}$ est une union quelconque d'intersections finies de boules ouvertes ($E$ et $\varnothing$ peuvent s'écrire ainsi). ■

**DÉFINITION 20 (CONVERGENCE D'UNE SUITE POUR UNE TOPOLOGIE). —** *Soient $X$ un ensemble muni d'une topologie $\mathscr{O}$, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $X$ et $\ell \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\ell$ pour la topologie $\mathscr{O}$, et on note $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{O}} \ell$, si :*

$$\forall\, U \in \mathscr{O}, \quad (\ell \in U \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad x_n \in U).$$

***Exemple 21 (convergence d'une suite pour la topologie grossière).* —** Si $X$ est un ensemble muni de la topologie grossière, alors toute suite d'éléments de $X$ converge vers tout point de $X$. ■

***Exemple 22 (convergence d'une suite pour la topologie discrète).*** — Si $X$ est un ensemble muni de la topologie discrète, alors une suite d'éléments de $X$ converge si et seulement si elle est stationnaire. ■

**Proposition 23 (convergence d'une suite pour une topologie engendrée).** — *Soient $X$ un ensemble, $\mathscr{A}$ un ensemble de parties de $X$, $\mathcal{O}$ la topologie engendrée par $\mathscr{A}$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $X$ et $\ell \in X$. Alors :*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, U \in \mathscr{A}, \quad (\ell \in U \quad\Longrightarrow\quad \exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad x_n \in U).$$

**Démonstration.** —

- Implication directe . Elle est claire car la topologie $\mathcal{O}$ engendrée par $\mathscr{A}$ contient $\mathscr{A}$.
- Implication réciproque . Supposons :

$$(\star) \qquad \forall\, U \in \mathscr{A}, \quad (\ell \in U \quad\Longrightarrow\quad \exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad x_n \in U).$$

Soit $V \in \mathcal{O}$ tel que $\ell \in V$. D'après la proposition 18, $V = X$ ou $V$ est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{A}$. Nous démontrons :

$$\exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad x_n \in V.$$

Si $V = X$, alors $N = 0$ convient. Nous supposons désormais que $V$ s'écrit :

$$V = \bigcup_{i\in I} \left( \bigcap_{j=1}^{p_i} A_{i,j} \right)$$

où, pour tout $i \in I$, $p_i \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $j \in [\![1, p_i]\!]$, $A_{i,j} \in \mathscr{A}$. Comme $\ell \in V$ :

$$\exists\, i_0 \in I, \quad \ell \in \bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} A_{i_0,j}.$$

D'après $(\star)$ :

$$\forall\, j \in [\![1, p_{i_0}]\!], \quad \exists\, N_j \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N_j, \quad x_n \in A_{i_0,j}.$$

En posant $N := \max\{N_j \ : \ j \in [\![1, p_{i_0}]\!]\}$, il vient :

$$\forall\, n \geqslant N, \quad x_n \in \bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} A_{i_0,j}.$$

■

***Exemple 24 (convergence d'une suite pour la topologie d'un espace vectoriel normé).*** — Soit $E$ est un espace vectoriel normé et $\mathcal{O}$ est la topologie associée à une norme $||\cdot||$ sur $E$, qui est engendrée par toutes les boules ouvertes. Alors on vérifie que, pour tout $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, pour tout $\ell \in E$ :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} \ell$$

où :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} \ell \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad ||x_n - \ell|| < \varepsilon) \qquad [\text{cf. chapitre } 6].$$

■

**Définition 25 (partie dense pour une topologie).** — *Soient $X$ un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et $D$ une partie de $X$. L'ensemble $D$ est <u>dense</u> dans $X$ pour la topologie $\mathcal{O}$ si :*

$$\forall\, U \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}, \quad U \cap D \neq \varnothing.$$

**Définition 26 (partie séquentiellement dense pour une topologie).** — *Soient $X$ un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et $S$ une partie de $X$. L'ensemble $S$ est <u>séquentiellement dense</u> dans $X$ pour la topologie $\mathcal{O}$ si :*

$$\forall\, x \in X, \quad \exists\, (s_n)_{n\in\mathbf{N}} \in S^{\mathbf{N}}, \quad s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{O}} x.$$

**PROPOSITION 27 (LA SÉQUENTIELLE DENSITÉ IMPLIQUE LA DENSITÉ). —** *Soient $X$ un ensemble muni d'une topologie $\mathscr{O}$ et $S$ une partie de $X$. Si $S$ est séquentiellement dense dans $X$ pour la topologie $\mathscr{O}$, alors $S$ est dense dans $X$ pour la topologie $\mathscr{O}$.*

**DÉMONSTRATION. —** Supposons $S$ séquentiellement dense dans $X$ pour la topologie $\mathscr{O}$.

Soit $U \in \mathscr{O} \setminus \{\varnothing\}$. Nous démontrons $U \cap S \neq \varnothing$.

Comme $U$ est non vide, il existe $x \in U$.

Par hypothèse sur $S$, il existe $(s_n)_{n\in\mathbf{N}} \in S^n$ telle que $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{O}} x$.

Comme $U$ est un ouvert de $\mathscr{O}$ contenant $x$ :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad s_n \in U.$$

En particulier, $s_N \in U$ et donc $U \cap S \neq \varnothing$.

■

**PROPOSITION 28 (SÉQUENTIELLE DENSITÉ ET DENSITÉ DANS UN E.V.N.). —** *Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, $\mathscr{O}$ la topologie associée sur $E$ et $D$ une partie de $E$. Alors $D$ est séquentiellement dense dans $E$ pour la topologie $\mathscr{O}$ si et seulement si $D$ est dense dans $E$ pour la topologie $\mathscr{O}$.*

**DÉMONSTRATION. —** • Implication directe. Elle a déjà été établie (proposition 27).

• Implication réciproque. Supposons que la partie $D$ est dense dans $E$ pour la topologie $\mathscr{O}$.

Fixons un vecteur $x$ de $E$. Nous démontrons qu'il existe $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in D^{\mathbf{N}}$ telle que $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{O}} x$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La boule ouverte $B(x, 1/n)$ est un ouvert non vide de la topologie $\mathscr{O}$. Par hypothèse sur $D$, il existe donc $d_n \in B(x, 1/n) \cap D$.

Nous disposons ainsi d'une suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in D^{\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $||d_n - x|| \leqslant 1/n$.

Par théorème d'encadrement, la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $x$ pour la norme $||\cdot||$, donc pour la topologie $\mathscr{O}$ associée.

■

***Remarque 29 (critère pour qu'une topologie ne provienne pas d'une norme).* —** D'après la proposition précédente, si $E$ est un espace vectoriel muni d'une topologie $\mathscr{O}$ possédant une partie dense, mais non-séquentiellement dense, alors la topologie $\mathscr{O}$ n'est associée à aucune norme. ■

**DÉFINITION 30 (TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE SIMPLE). —** *Pour tout $(x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$, on note $V(x, z, \varepsilon)$ l'ensemble des fonctions de $X$ dans $\mathbf{K}$ dont la valeur en $x$ est éloignée de $z$ d'au plus $\varepsilon$, i.e. :*

$$V(x, z, \varepsilon) := \left\{g \in \mathscr{F}(X, \mathbf{K}) \;:\; \left|g(x) - z\right| < \varepsilon\right\} \subset \mathscr{F}(X, \mathbf{K})$$

*et on note $\mathscr{T}$ la topologie sur $\mathscr{F}(X, \mathbf{K})$ engendrée par :*

$$\{V(x, z, \varepsilon) \;:\; (x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\}.$$

**PROPOSITION 31 (TOPOLOGIE DE LA CS VS. CS). —** *Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{K})$. Alors :*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{T}} f$$

*où $\mathscr{T}$ est la topologie sur $\mathscr{F}(X, \mathbf{K})$ définie en 30.*

**DÉMONSTRATION. —** • Implication directe. Supposons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$. Nous démontrons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{T}} f$. Comme la topologie $\mathscr{T}$ est engendrée par :

$$\left\{V(x, z, \varepsilon) := \left\{g \in \mathscr{F}(X, \mathbf{K}) \;:\; \left|g(x) - z\right| < \varepsilon\right\} \;:\; (x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\right\}$$

la proposition 23 nous livre qu'il suffit de prouver que :

$$\forall (x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}, \quad \left(f \in V(x,z,\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad f_n \in V(x,z,\varepsilon)\right).$$

Soit $(x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que $f \in V(x,z,\varepsilon)$, i.e. :

$$\left|f(x) - z\right| < \varepsilon.$$

Comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} f(x)$. Puisque $\varepsilon - \left|f(x)-z\right| > 0$ :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon - \left|f(x) - z\right|.$$

Soit $n \geqslant N$. Nous observons que :

$$\left|f_n(x) - z\right| = \left|f_n(x) - f(x) + f(x) - z\right| \leqslant \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - z\right| \leqslant \varepsilon - \left|f(x) - z\right| + \left|f(x) - z\right| = \varepsilon$$

ce qui implique que $f_n \in V(x,z,\varepsilon)$.

• Implication réciproque. Supposons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{T}} f$. Nous démontrons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.
Soit $x \in X$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme :

$$V(x,f(x),\varepsilon) := \left\{g \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ \left|g(x) - f(x)\right| < \varepsilon\right\}$$

est un ouvert de la topologie $\mathscr{O}$ qui contient $f$ :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad f_n \in V(x,f(x),\varepsilon).$$

Par définition de $V(x,f(x),\varepsilon)$, nous en déduisons que :

$$\forall n \geqslant N, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

■

**Terminologie. —** Le support d'une fonction $f \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$ est défini par :

$$\operatorname{supp}(f) := \left\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\right\} \subset X.$$

**Proposition 32 (la topologie de la CS ne provient pas d'une norme). —** *Supposons que $X$ est un ensemble infini non-dénombrable, e.g. $X$ est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$. Alors l'ensemble :*

$$D := \left\{f \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ \operatorname{supp}(f) \textit{ est fini}\right\} \subset \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$$

*est dense pour la topologie $\mathscr{T}$, mais non séquentiellement dense pour la topologie $\mathscr{T}$.*

**Démonstration. —** • L'ensemble $D$ est dense pour la topologie $\mathscr{T}$. Soit $U$ un ouvert non vide de la topologie $\mathscr{T}$. D'après la proposition 18, $U = \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$ ou $U$ est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments

$$\left\{V(x,z,\varepsilon) := \left\{g \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K}) \ : \ \left|g(x) - z\right| < \varepsilon\right\} \ : \ (x,z,\varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\right\}$$

Nous démontrons que $U \cap D \neq \varnothing$
Si $U = \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$ alors $U \cap D = D \neq \varnothing$.
Sinon, $U$ s'écrit :

$$U = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{p_i} V\left(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}\right)\right)$$

où, pour tout $i \in I$, $p_i \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $j \in [\![1,p_i]\!]$, $\left(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}\right) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$.
Fixons $i_0 \in I$. Alors la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p_{i_0}} z_{i_0,j} \cdot \mathbb{1}_{x_{i_0,j}}(x) \end{array} \right.$$

appartient à $\bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} V\left(x_{i_0,j}, z_{i_0,j}, \varepsilon_{i_0,j}\right)$ et a un support fini puisque :

$$\operatorname{supp}(f) \subset \left\{x_{i_0,j} \ : \ j \in [\![1, p_{i_0}]\!]\right\}.$$

Ainsi :

$$f \in \left(\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j=1}^{p_i} V\left(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}\right)\right)\right) \cap D.$$

• L'ensemble $D$ n'est pas séquentiellement dense pour la topologie $\mathscr{T}$. Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $D$ est séquentiellement dense pour la topologie $\mathscr{T}$. Si $f$ est la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right.$$

il existe donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{T}} f$, i.e., d'après la proposition 31, telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} f$.

L'ensemble :

$$E := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{supp}\left(f_n\right)$$

est fini ou dénombrable comme réunion dénombrable d'ensemble finis. Comme $X$ est infini non-dénombrable, $E$ est une partie stricte de $X$. Il existe donc $x_0 \in X \setminus E$. Ce point $x_0$ de $X$ vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad f_n(x_0) = 0$$

et donc :

$$f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} 0 \neq 1 = f(x_0) \qquad [\text{contradiction}].$$

■

## § 4. Convergence simple d'une série de fonctions

**Définition 33 (convergence simple d'une série de fonctions).** — *Soient une suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $S \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$ :*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x). \end{array}\right.$$

*On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ <u>converge simplement</u> vers $S$ sur $X$, si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers $S$ sur $X$. Dans ce cas, la fonction $S$ sera également notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et donc :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = S \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x). \end{array}\right.$$

**Exercice 34.** — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonctions $f_n$ par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} ]-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n+1}\, x^n}{n}. \end{array}\right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[-1,1[$ et reconnaître la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. □

## § 5. CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS

**DÉFINITION 35 (CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $S \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$ :*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x). \end{array} \right.$$

*On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ <u>converge uniformément</u> vers $S$ sur $X$, si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $S$ sur $X$.*

**PROPOSITION 36 (CU IMPLIQUE CS). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $S \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})$. Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ <u>converge uniformément</u> vers $S$, alors elle converge simplement vers $S$.*

**PROPOSITION 37 (CONVERGENCE UNIFORME DES RESTES VERS LA FONCTION NULLE). —** *Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $X$. La série converge uniformément sur $X$ si et seulement si :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right. \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0_{\mathscr{F}(X,\mathbf{K})} \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right. .$$

**EXERCICE 38. —** On considère de nouveau la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ définie dans l'exercice 34.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset ]-1,1]$.
2. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]-1,1]$ ?

□

**EXERCICE 39. —** Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

et la relation de récurrence :

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(f_n + \frac{f_0}{f_n}\right)$$

valable pour tout entier naturel $n$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x > 0$, $f_n(x) \geqslant \sqrt{x}$.
2. Soit $x > 0$. Posons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad g_n(x) = \frac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}.$$

   Exprimer $g_{n+1}(x)$ en fonction de $g_n(x)$.
3. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$ vers la fonction $f$ définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} ]0\,;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

□

## § 6. CONVERGENCE NORMALE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS BORNÉES

**DÉFINITION 40 (CONVERGENCE NORMALE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS BORNÉES). —** *Soit une suite de fonctions bornées $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est dite* <u>*normalement convergente*</u> *sur $X$, si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ est convergente.*

**EXERCICE 41. —** Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n\in\mathbf{N}$ :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{inx}}{n^2}. \end{array} \right.$$

□

**EXERCICE 42. —** Soient $\alpha > 1$ et $A := \{z\in\mathbf{C} : \operatorname{Re}(z) \geqslant \alpha\}$. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n\in\mathbf{N}$ :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ s & \longmapsto & \dfrac{1}{n^s}. \end{array} \right.$$

□

**EXERCICE 43. —** Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n\in\mathbf{N}$ :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^2+\sin(nx)}. \end{array} \right.$$

□

**EXERCICE 44. —** Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on définit la fonction $f_n$ par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n x}{\left(1+x^2\right)^n}. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[\alpha,+\infty[$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

□

**PROPOSITION 45 (CN IMPLIQUE CS). —** *Soit une suite de fonctions bornées $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Alors :*

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge normalement sur } X & \Longrightarrow & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |f_n| \text{ converge simplement sur } X \\ & & \Big\Downarrow \\ & & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } X. \end{array}$$

Une série de fonctions peut converger simplement, sans converger normalement. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f_n$ est la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array} \right.$$

D'après les résultats sur les séries géométriques, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}. \end{array} \right.$$

Soit $n\in\mathbf{N}$. La fonction $f_n$ étant croissante sur $[0,1[$, nous en déduisons $||f_n||_\infty = 1$. La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ est donc grossièrement divergente. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge donc pas normalement sur $[0,1[$.

**THÉORÈME 46 (LA CONVERGENCE NORMALE IMPLIQUE LA CONVERGENCE UNIFORME). —** *Soit une suite de fonctions bornées $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Alors :*

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge normalement sur } X & \Longrightarrow & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ uniformément sur } X \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |f_n| \text{ converge simplement sur } X & \Longrightarrow & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } X. \end{array}$$

Une série de fonctions peut converger normalement sans converger uniformément. Considérons, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, la fonction $f_n$ définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n+1}\,x^n}{n}. \end{array} \right.$$

D'après le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ :

$$\left|\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n \right|\right|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Cependant, elle ne converge par normalement sur $[0,1]$ puisque, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $||f_n||_\infty = \dfrac{1}{n}$.

**EXERCICE 47. —** Pour tout $n\in\mathbf{N}$, soit $f_n$ la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$, où $\alpha > 0$.
2. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.

□

**EXERCICE 48.** — Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan}(n) \end{array} \right.$$

sur tout segment de $\mathbf{R}$. □

**EXERCICE 49.** — Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} \end{array} \right.$$

sur tout segment de $]0,+\infty[$. □

**EXERCICE 50.** — Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} ]-1,1[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \end{array} \right.$$

sur tout segment de $]-1,1[$. □

## § 7. DES LIMITES D'UNE LIMITE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS

**NOTATION.** — La lettre $I$ désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$.

**THÉORÈME 51 (DE LA DOUBLE LIMITE EN UN POINT DE L'INTERVALLE).** — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})$ et un point $a \in I$. Supposons :*

**(H1)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$ ;

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue en $a$.*

*Alors :*

**(C1)** *$f$ est continue en $a$ ;*

**(C2)** $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \lim_{x\longrightarrow a}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)$.

Le théorème 51 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**COROLLAIRE 52 (DE LA DOUBLE LIMITE EN UN POINT DE L'INTERVALLE POUR LES SÉRIES).** — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et $a \in I$. Supposons :*

**(H1)** *la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $I$ ;*

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue en $a$.*

*Alors :*

**(C1)** *la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en $a$ ;*

**(C2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \lim_{x\longrightarrow a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$.

**NOTATION.** — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})$. On note :

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} f$$

pour indiquer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $I$.

**COROLLAIRE 53 (LIMITE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})$ Supposons :*

**(H1)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} f$ ;

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur $I$.*

*Alors :*

**(C)** *$f$ est continue sur $I$.*

**DÉMONSTRATION. —** La fonction $f$ est continue sur $I$ si elle est continue en tout point de $I$. Soit $a \in I$.

• Cas où le point $a$ est intérieur à $I$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $[a-\delta, a+\delta] \subset I$. Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur le segment $[a-\delta, a+\delta]$, le théorème 51 nous livre la continuité de $f$ en sur le voisinage $[a-\delta, a+\delta]$ de $a$ dans $I$, donc la continuité de $f$ en $a$.

• Cas où le point $a$ appartient à la frontière de $I$. Si d'aventure $a$ se trouve être une extrémité de l'intervalle $I$, les arguments du cas où $a$ est intérieur à $I$ s'appliquent *mutatis mutandis.* ■

Le théorème 53 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**COROLLAIRE 54 (SÉRIE UNIFORMÉMENT CONVERGENTE DE FONCTIONS CONTINUES). —** *Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$. Supposons :*

**(H1)** *la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $I$ ;*

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur $I$.*

*Alors :*

**(C)** *la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $I$.*

**EXERCICE 55. —** Démontrer que la suite de fonctions :

$$\left( f_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+t^2+t^n\cdot e^{-t}} \end{array} \right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge simplement sur $\mathbf{R}_+$, mais ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}_+$. □

**EXERCICE 56. —** Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})$, $x \in I$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in I^{\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers $x$. Supposons :

**(H1)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CU}} f$

**(H2)** pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n$ continue sur $I$.

Démontrer que $f_n(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(x)$. □

**THÉORÈME 57 (DE LA DOUBLE LIMITE EN UN POINT AU BORD DE L'INTERVALLE). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})$ et $a$ l'une des extrémités de $I$ ($a = -\infty$ ou $a = +\infty$ est donc possible). Supposons :*

**(H1)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$ ;

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ admet une limite finie, notée $\ell_n$, en $a$.*

*Alors :*

**(C1)** *la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;*

**(C2)** *la fonction $f$ admet une limite finie en $a$ qui égale $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ell_n$ ;*

**(C3)** $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)$.

Ce théorème est admis. Il admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**Corollaire 58 (de la double limite en un point au bord de l'intervalle pour les séries). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $a$ l'une des extrémités de $I$ ($a = -\infty$ ou $a = +\infty$ est donc possible). Supposons :*

**(H1)** *la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $I$ ;*

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ admet une limite finie, notée $\ell_n$, en $a$.*

*Alors :*

**(C1)** *la série $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n$ est convergente ;*

**(C2)** *la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en $a$ qui égale $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ ;*

**(C3)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \lim_{x\longrightarrow a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$.

**Exercice 59. —** Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$. □

**Exercice 60. —** Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que la fonction $f$ est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.
2. Étudier la limite éventuelle de $f$ en $+\infty$.

□

**Exercice 61. —** On rappelle que la fonction $\zeta$ est définie par :

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc} ]1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. .$$

Étudier la limite éventuelle de $\zeta$ en $+\infty$. □

## § 8. Intégration d'une limite uniforme sur un segment

**Théorème 62 (intégration d'une limite uniforme de suite de fonctions continues). —** *Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{K})$. Supposons :*

**(H1)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$ ;

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur $[a,b]$.*

*Alors :*

**(C1)** *l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie ;*

**(C2)** $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**DÉMONSTRATION. —** • Démonstration de (C1). La fonction $f$ est continue sur le segment $[a, b]$, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues (cf. 53). L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc bien définie.

• Démonstration de (C2). Les fonctions $f_n$ et la fonction $f$ sont continues sur $[a, b]$. Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n - f$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc bornée (cf. théorème des bornes atteintes). Ainsi l'hypothèse (H1) se réécrit :

$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\,.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\,\mathrm{d}t\right| && \text{[linéarité de l'intégrale]}\\
&\leqslant \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leqslant ||f_n - f||_\infty}\,\mathrm{d}t && \text{[inégalité triangulaire pour l'intégrale]}\\
&\leqslant \int_a^b ||f_n - f||_\infty\,\mathrm{d}t && \text{[croissance de l'intégrale]}\\
&= (b-a)\cdot ||f_n - f||_\infty
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$ :

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\,||f_n - f||_\infty\,.$$

De $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ et du théorème d'encadrement, on déduit :

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$$

i.e. : $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$ ■

> L'hypothèse de convergence uniforme est importante dans le théorème 62. La seule convergence simple ne suffit pas, cf. exercice 4.

***Remarque 63.*** **—** La conclusion 2 du théorème 62 livre :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n.$$

■

**EXERCICE 64. —** Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$, quand $n$ tend vers $+\infty$. □

**EXERCICE 65. —** Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$, quand $n$ tend vers $+\infty$. □

Le théorème 62 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**THÉORÈME 66 (INTÉGRATION TERME À TERME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS SUR UN SEGMENT). —** *Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}([a, b], \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Supposons :*

**(H1)** *la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ ;*

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur $[a, b]$.*

*Alors :*

**(C1)** *l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie;*

**(C2)** *la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$*

**COROLLAIRE 67 (PRIMITIVATION D'UNE LIMITE UNIFORME DE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})$ et un point $a \in I$. Supposons :*

**(H1)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} f$ ;

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur $I$.*

*Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $F_n$ l'unique primitive de $f_n$ (continue sur $I$) qui s'annule en $a$ :*

$$F_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

*et $F$ l'unique primitive de $f$ (continue sur $I$, cf. 53) qui s'annule en $a$ :*

$$F \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

*Alors :*

**(C)** $F_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} F$.

Le théorème 67 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**COROLLAIRE 68 (PRIMITIVATION TERME À TERME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS CONTINUES SUR UN SEGMENT). —** *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et un point $a \in I$. Supposons :*

**(H1)** *la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $I$ ;*

**(H2)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur $I$.*

*Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $F_n$ l'unique primitive de $f_n$ (continue sur $I$) qui s'annule en $a$ :*

$$F_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

*et $S$ l'unique primitive de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ (continue sur $I$, cf. 54) qui s'annule en $a$ :*

$$S \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

*Alors :*

**(C1)** *la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} F_n$ converge uniformément sur tout segment de $I$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n = S$ ;*

**(C2)** $\forall\, x \in I, \quad \displaystyle\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

**EXERCICE 69. —** Soit $r \in [0,1[$. Justifier l'existence et calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} r^n \cdot n \cdot \cos(nt)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$. □

## § 9. DÉRIVATION DE SUITES/SÉRIES DE FONCTIONS

**NOTATION. —** Dans toute cette partie, la lettre $I$ désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide.

## 1. CRITÈRES $\mathscr{C}^1$ POUR LES SUITES/SÉRIES DE FONCTIONS

**THÉORÈME 70 (DÉRIVATION DE LA LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS). —** *Soient une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ *et* $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^2$.
*Supposons :*

**(H1)** *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* $f_n$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $I$ ;

**(H2)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CS} f$ ;

**(H3)** $f_n' \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} g$.

*Alors :*

**(C1)** $f$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $I$ ;

**(C2)** $f' = g$, *i.e. :*

$$\forall x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

**(C3)** $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} f$.

Le théorème 70 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**THÉORÈME 71 (DÉRIVATION DE LA SOMME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS). —** *Soit une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. *Supposons :*

**(H1)** *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* $f_n$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $I$ ;

**(H2)** *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement sur* $I$ ;

**(H3)** *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ *converge uniformément sur tout segment de* $I$.

*Alors :*

**(C1)** *la fonction :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

*est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $I$ ;

**(C2)** $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n')$, *i.e. :*

$$\forall x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

**(C3)** *la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* $I$

**EXERCICE 72. —** On considère la série de fonctions de terme général $u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad u_n(x) := \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$$

1. Démontrer que $S$ est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

□

**EXERCICE 73.** — Soit $r \in [0,1[$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$ :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{r\sin(t)}{1-r\cos(t)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin(nt)}{n}.$$

□

## 2. CRITÈRES $\mathscr{C}^k$ POUR LES SUITES/SÉRIES DE FONCTIONS, OÙ $k \in \mathbf{N}^*$

**COROLLAIRE 74 (CARACTÈRE $\mathscr{C}^k$ DE LA LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS).** — *Soient $k \in \mathbf{N}^*$, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $(g_0, g_1, \dots, g_k) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{k+1}$.*
*Supposons :*

**(H1)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ ;*

**(H2)** $\forall\, \ell \in [\![0, k-1]\!],\quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CS} g_\ell$ ;

**(H3)** $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} g_k$.

*Alors :*

**(C1)** *$f := g_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ ;*

**(C2)** *pour tout $\ell \in [\![1,k]\!]$, $f^{(\ell)} = g_\ell$, i.e. :*

$$\forall\, \ell \in [\![1,k]\!],\quad \forall\, x \in I,\quad \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} f_n(x)$$

**(C3)** $\forall\, \ell \in [\![0, k-1]\!],\quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} f^{(\ell)}$.

**DÉMONSTRATION.** — On procède par récurrence sur l'entier naturel non nul $k$.

- Initialisation à $k = 1$. La propriété à établir est précisément celle du théorème 70 ($f \leftarrow g_0$, $g \leftarrow g_1$).
- Hérédité. Supposons le résultat établi pour un entier $k$ fixé et considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, et $(g_0, g_1, \dots, g_k, g_{k+1}) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{k+2}$ vérifiant :

(H1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $I$ ;

(H2) $\forall\, \ell \in [\![0,k]\!],\quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} g_\ell$ ;

(H3) $f_n^{(k+1)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_{k+1}$.

Observons :

(H1') pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ ;

(H2') $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} g_k$ ;

(H3') $f_n^{(k+1)} = \left(f_n^{(k)}\right)' \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_{k+1}$.

En appliquant le théorème 70 $\left((f_n)_{n\in\mathbf{N}} \leftarrow \left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbf{N}},\ f \leftarrow g_k,\ g \leftarrow g_{k+1}\right)$, il vient :

(C1') $g_k$ est de classe $\mathscr{C}^1$ ;

(C2') $g_k' = g_{k+1}$ ;

(C3') $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_k$.

Alors (H1), (H2), (H3) et (C3') nous donnent :

(H1") pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ ;

(H2") $\forall\, \ell \in [\![0, k-1]\!],\quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} g_\ell$ ;

(H3") $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_k$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient :

(C1") $f := g_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ ;

(C2") $\forall\, \ell \in [\![0,k]\!],\quad f^{(\ell)} = g_\ell$ ;

(C3") $\forall \ell \in [\![0, k-1]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CUK}} f^{(\ell)}$.

De (C1"), (C2") et (C1'), on déduit :

(C1) $f := g_0$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

De (C2") et (C2'), on déduit :

(C2) $\forall \ell \in [\![0, k+1]\!], \quad f^{(\ell)} = g_\ell$.

De (C3"), (C3') et (C2"), on déduit :

(C3) $\forall \ell \in [\![0, k]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CUK}} f^{(\ell)}$.

La propriété est donc établie au rang $k+1$.

■

Le théorème 74 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**COROLLAIRE 75 (CARACTÈRE $\mathscr{C}^k$ DE LA LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS). —** *Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Supposons :*

**(H1)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ ;*

**(H2)** *pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(\ell)}$ converge simplement sur $I$ ;*

**(H3)** *la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $I$ ;*

*Alors :*

**(C1)** *la fonction :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

*est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ ;*

**(C2)** *pour tout $\ell \in [\![1, k]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(\ell)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(\ell)}\right)$, i.e. :*

$$\forall \ell \in [\![1, k]\!], \quad \forall x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} f_n(x)$$

**(C3)** *pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(\ell)}$ converge uniformément sur tout segment de $I$.*

**ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. —** On applique le corollaire 74, en spécialisant comme suit :

$$(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \leftarrow \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbf{N}}, \; g_0 \leftarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_k, \; g_1 \leftarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n'), \; \ldots, \; g_k \leftarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f_n^{(k)}\right)$$

en remarquant que la dérivée d'une somme finie de fonctions dérivables est la somme des fonctions dérivées. □

**EXERCICE 76 (UN PREMIER EXEMPLE DE SÉRIE ENTIÈRE). —** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, a]$, pour tout réel $a \in [0,1[$.
2. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $[0,1[$.
3. Soit $x \in [0,1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.
4. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^n$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.
5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.

□

## 3. Critères $\mathscr{C}^\infty$ pour les suites/séries de fonctions

**Corollaire 77 (caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la limite d'une suite de fonctions).** — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Supposons :*

**(H1)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ ;*

**(H2)** *pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $I$ vers une fonction $g_k \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})$.*

*Alors :*

**(C1)** *la fonction $f := g_0$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ ;*

**(C2)** *pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$, i.e. :*

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f_n(x)\right).$$

**Éléments de démonstration.** — Les hypothèses (H1), (H2) permettent d'appliquer le corollaire **??** à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et aux fonctions $g_0, g_1, \ldots, g_k$, quelque soit $k \in \mathbf{N}^*$. □

Le théorème 77 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

**Corollaire 78 (caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la limite d'une suite de fonctions).** — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Supposons :*

**(H1)** *pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ ;*

**(H2)** *pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $I$.*

*Alors :*

**(C1)** *la fonction :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

*est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ ;*

**(C2)** *pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}\right)$, i.e. :*

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f_n(x)\right).$$

**Exercice 79 (fonction $\zeta$ de Riemann).** — Soit la fonction :

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc} ]1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x > 1$, le nombre $\zeta^{(k)}(x)$ comme une somme de série convergente.
2. Que dire de la convexité de la fonction $\zeta$ ?
3. Étudier les limites éventuelles de $\zeta$ en $1^+$ et $+\infty$.
4. Démontrer que :
$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$
5. Démontrer que :
$$\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2^x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^x}\right).$$

□

## § 10. APPROXIMATION UNIFORME PAR DES FONCTIONS EN ESCALIERS

**NOTATION.** — On fixe deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$, pour toute cette partie. On rappelle quelques résultats de MP2I et on les interprète à l'aide des notions de convergence introduites en MPI.

**SUBDIVISION D'UN SEGMENT.** — Une subdivision du segment $[a,b]$ est un uplet $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de points de $[a,b]$ tel que :

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

**FONCTION EN ESCALIER SUR UN SEGMENT.** — Une fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la fonction restreinte $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ est constante sur l'ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.

**L'ALGÈBRE DES FONCTIONS EN ESCALIER SUR UN SEGMENT.** — L'ensemble $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions en escaliers définies sur $[a,b]$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$.

**FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT.** — Une fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la fonction restreinte $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ est continue sur l'ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ et admet un prolongement par continuité sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$.

**FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN INTERVALLE.** — Soit $I$ un intervalle. Une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ est dite continue par morceaux si, pour tout segment $[a,b]$ de $I$, la fonction $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ au sens de ce qui précède.

**L'ALGÈBRE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX SUR UN INTERVALLE.** — Soit $I$ un intervalle. L'ensemble $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(I,\mathbf{R})$ des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $I$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$.

**THÉORÈME 80 (APPROXIMATION UNIFORME PAR DES FONCTIONS EN ESCALIERS).** — *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbf{R})$. Alors :*

$$\exists (\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}, \quad \varphi_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f.$$

***Remarque 81 (interprétation topologique du précédent théorème).*** — Nous munissons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$ de la norme définie par :

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup\left\{\left|f(x)\right| \,:\, x \in [a,b]\right\}. \end{array} \right.$$

Alors l'ensemble $\mathscr{E}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$. ■

**EXERCICE 82 (LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE DANS LE CAS C.P.M. SUR UN SEGMENT).** — Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$. Démontrer :

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

□

**EXERCICE 83 (LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE DANS LE CAS INTÉGRABLE SUR $\mathbf{R}_+$).** — Soit une fonction $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$, qui est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Démontrer :

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

□

# § 11. THÉORÈME DE WEIERSTRASS

**THÉORÈME 84 (WEIERSTRASS).** — *Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$. Alors, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en polynomiales définies sur $[a,b]$ telle que :*

$$P_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} f.$$

***Remarque 85 (interprétation topologique du précédent théorème).*** — Nous munissons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ de la norme définie par :

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup\left\{\left|f(x)\right| \,:\, x \in [a,b]\right\}. \end{array} \right.$$

Alors l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[a,b]$ est dense dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$. ■

**EXERCICE 86 (THÉORÈME DES MOMENTS).** — Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ :

$$\int_a^b x^n \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Démontrer que $f = 0$. □

**EXERCICE 87.** — Soit $p \in \mathbf{N}$. Que dire d'une fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à $p$ ? □

**EXERCICE 88.** — Que dire d'une fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales ? □

**EXERCICE 89 (FONCTION CONTINUE NULLE-PART DÉRIVABLE).** — Posons :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,\mathbf{Z}) = \inf\{n \in \mathbf{Z} \,:\, |x-n|\}. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $\varphi$ est continue sur $\mathbf{R}$. Tracer la courbe représentative de $\varphi$.
2. Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi\left(4^n x\right) \end{array} \right. \quad \left[\text{variante de la fonction de Teiji Takagi (1901)}\right].$$

   Démontrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$.
3. Posons, pour $n \in \mathbf{N}$, $h_n = \dfrac{1}{2\cdot 4^n}$. Démontrer que :

$$\left|\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n}\right| \geqslant \frac{3^{n+1}-3}{2}.$$

   En déduire que $f$ n'est pas dérivable en 0.
4. Démontrer que $f$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$.

□

**EXERCICE 90 (DENSITÉ DES FONCTIONS CONTINUES NULLE-PART DÉRIVABLES SUR UN SEGMENT).** — Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. À l'aide de la variante de la fonction de Takagi introduite dans l'exercice 89, démontrer que :

$$\mathscr{M} := \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}) \,:\, f \text{ n'est dérivable en aucun point de } [a,b]\right\}$$

est une partie dense de $(\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$. □