Familles sommables

Chapitre 9

par David Blottière, le 11 décembre 2023 à 15h33

Sommaire

§ 1. ORDRE ET BORNE SUPÉRIEURE DANS $[0,+\infty]$

ADDITION DANS $[0,+\infty]$. — On étend l'addition de $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ à $[0,+\infty]$ en posant :

- $\forall\, x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}, \quad x + (+\infty) = +\infty = (+\infty) + x$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

L'opération $+$, ainsi définie sur $[0,+\infty]$, est associative, commutative, mais elle ne possède aucun élément neutre L'élément $+\infty$ est absorbant.

MULTIPLICATION PARTIELLE DANS $[0,+\infty]$. — On étend partiellement la multiplication de $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ à $[0,+\infty]$ en posant :

- $\forall\, x \in \mathbf{R}_{>0}, \quad x \times (+\infty) = +\infty = (+\infty) \times x$
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$.

Les opérations $0 \times (+\infty)$ et $(+\infty) \times 0$ ne sont pas définies.

ORDRE SUR $[0,+\infty]$. — On étendla relation d'ordre usuelle sur $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ à $[0,+\infty]$ en posant :

- $\forall\, x \in \mathbf{R}_{>0}, \quad x \leqslant +\infty$
- $+\infty \leqslant +\infty$.

La relation ainsi obtenue sur $[0,+\infty]$ est totale et $+\infty$ est le maximum de $[0,+\infty]$. En outre, la relation d'ordre $\leqslant$ sur $[0,+\infty]$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$:

- $\forall\, (x,y,z) \in [0,+\infty]^3, \quad x \leqslant y \implies x + y \leqslant x + z$
- $\forall\, (x,y,z) \in]0,+\infty]^3, \quad x \leqslant y \implies x \times y \leqslant x \times z$.

PROPOSITION 1 (BORNE SUPÉRIEURE DANS $[0,+\infty]$). — *Toute partie A de $[0,+\infty]$ possède un plus petit majorant dans $[0,+\infty]$, appelée borne supérieure de A et notée $\sup(A)$.*

$$\sup(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing\,; \\ \text{borne supérieure de } A \text{ dans } \mathbf{R} & \text{si } A \neq \varnothing \text{ et majorée par un réel}\,; \\ +\infty & \text{si } A \neq \varnothing \text{ et non majorée par un réel.} \end{cases}$$

***Exemple 2.* —** $\sup\left\{1 - \dfrac{1}{n+2} \;:\; n \in \mathbf{N}\right\}$ ■

***Exemple 3.* —** $\sup\left\{n^2 \;:\; n \in \mathbf{N}\right\} = +\infty$. ■

§ 2. FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS POSITIFS

1. SOMME ET SOMMABILITÉ D'UNE FAMILLE DE RÉELS POSITIFS

RAPPEL. — Soient I est un ensemble fini et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un magma $(M,+)$ associatif, commutatif possédant un élément neutre e_M.

- Si $I = \varnothing$, alors on pose :
$$\sum_{i\in I} u_i = e_M.$$
- Si $I \neq \varnothing$ alors :
$$\sum_{i\in I} u_i := \sum_{k=1}^{\operatorname{Card}(I)} u_{\sigma(k)}$$
où $\sigma\colon [\![1, \operatorname{Card}(I)]\!] \longrightarrow I$ est une bijection. L'élément de M ainsi défini ne dépend pas du choix de σ.

LEMME 4 (SOMME D'UNE FAMILLE DE RÉELS POSITIFS INDEXÉE PAR UN ENSEMBLE FINI). — *Soient I un ensemble fini et $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$. Alors :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i \;:\; F \text{ est une partie finie de } I\right\}.$$

Ce lemme nous permet de définir la somme d'une famille quelconque de non vide réels positifs.

DÉFINITION 5 (SOMME D'UNE FAMILLE DE RÉELS POSITIFS). — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$. On définit la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$, notée $\sum_{i\in I} u_i$, par :*

$$\sum_{i\in I} u_i := \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i \;:\; F \text{ est une partie finie de } I\right\} \in [0,+\infty].$$

PROPOSITION 6 (SOMME D'UNE FAMILLE DE RÉELS POSITIFS INDEXÉE PAR $\mathbf{N}$). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$. Alors :*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

***Exemple 7.* —** Pour tout $q \in \mathbf{R}_+$:

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q \geqslant 1\,; \\ \dfrac{1}{1-q} & \text{si } q < 1. \end{cases}$$

■

DÉFINITION 8 (FAMILLE SOMMABLE DE RÉELS POSITIFS). — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < \infty$.*

PROPOSITION 9 (SOMMABILITÉ D'UNE FAMILLE DE RÉELS POSITIFS INDEXÉE PAR $\mathbf{N}$). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$. Alors :*

$$\big(\text{la famille } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est sommable}\big) \iff \left(\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente}\right).$$

***Exemple 10.* —** Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la famille $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$. ■

☞ Les calculs sur les familles de réels positifs sont justifiés par la seule positivité et ils fournissent un moyen efficace d'étudier la sommabilité.

EXERCICE 11. — Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$. □

EXERCICE 12. — Étudier la sommabilité de la famille $(r^2)_{r\in\mathbf{Q}}$. □

EXERCICE 13. — Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{2^n 3^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$. □

EXERCICE 14. — Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{4^n+5^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$. □

2. Invariance de la somme d'une famille de réels positifs par permutation

Proposition 15 (permutation des termes d'une somme de famille de réels positifs). — *Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$. Alors, pour toute bijection $\sigma : I \longrightarrow I$:*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

3. Opérations sur les sommes de familles de réels positifs

Proposition 16 (opérations sur les sommes de familles de réels positifs). — *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$, $(v_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$ et $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$. Alors :*

$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I}(\lambda\, u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

4. caractère fini ou dénombrable du support d'une famille sommable

Définition 17 (ensemble dénombrable). — *Un ensemble E est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbf{N}$, i.e. s'il existe une bijection $f : \mathbf{N} \longrightarrow E$.*

Exemple 18 (ensembles dénombrables et ensembles non-dénombrables). — Nous démontrerons plus tard que les ensembles $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Q}$ sont dénombrables, mais que les ensembles $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ ne sont pas dénombrables. ■

Proposition 19 (union dénombrable d'ensembles finis). — *Soit I un ensemble dénombrable et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles finis. Alors l'ensemble $\bigcup_{i\in I} E_i$ est fini ou dénombrable.*

Démonstration. — À venir, dans le chapitre de probabilités. ■

Définition 20 (support d'une famille sommable). — *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty[^I$ une famille sommable. On définit le support de la famille $(u_i)_{i\in I}$ par :*

$$\operatorname{supp} := \{i \in I \,:\, u_i > 0\}.$$

Proposition 21 (propriétés du support). — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty[^I$ une famille sommable.*

1. *L'ensemble $\operatorname{supp} := \{i \in I \,:\, u_i > 0\}$ est fini ou dénombrable.*
2. $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in \operatorname{supp}} u_i$

Éléments de démonstration. —

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'ensemble :

$$E_n := \left\{ i \in I \,:\, u_i \geqslant \frac{s}{n} \right\}$$

est fini (de cardinal inférieur ou égal à n) et :

$$\operatorname{supp} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} E_n \qquad [\text{propriété d'Archimède}].$$

On conclut à l'aide de la proposition 19.

2. L'assertion découle de l'égalité ensembliste :

$$\left\{\sum_{i\in F} u_i \;:\; F \text{ partie finie de } I\right\} = \left\{\sum_{i\in G} u_i \;:\; G \text{ partie finie de supp}\right\}.$$

□

Remarque 22. — D'après ce qui précède, l'ensemble d'indices d'une famille sommable peut être supposé fini ou dénombrable. ■

5. Suites exhaustives : cas positif

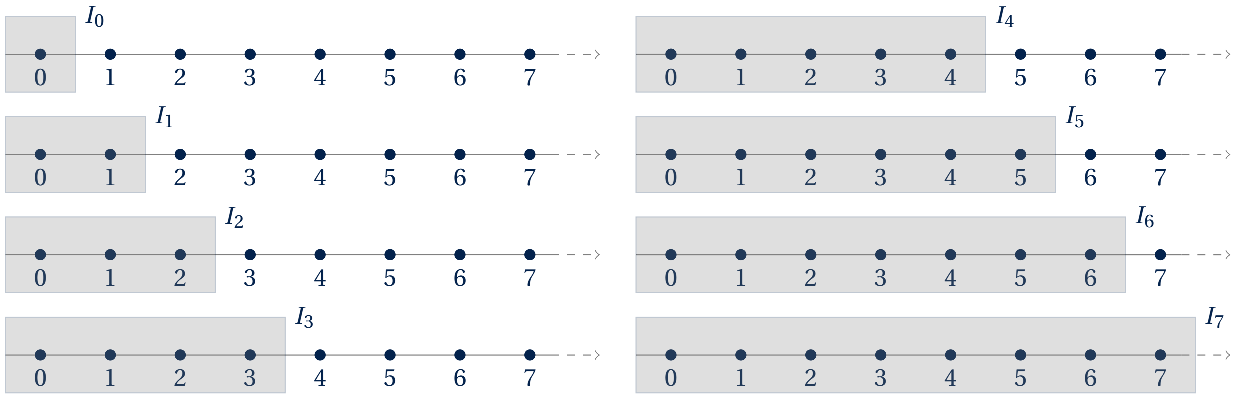
Définition 23 (suite exhaustive). — *Une suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties de I est dite exhaustive si :*

(a) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble I_n est fini ;*

(b) *la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion, i.e. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n \subset I_{n+1}$;*

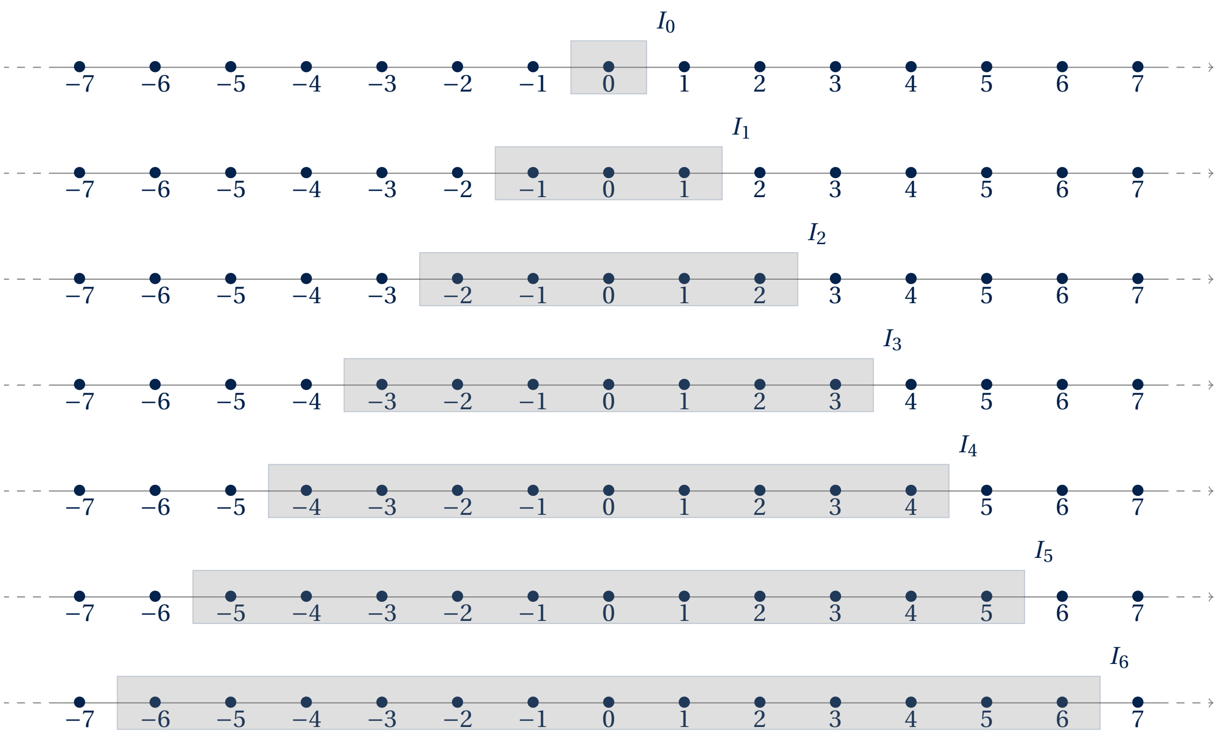
(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n = I$.

Exemple 24 (suite exhaustive de parties de $\mathbf{N}$). — La famille $\left(I_n := [\![0, n]\!]\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de parties de $\mathbf{N}$.



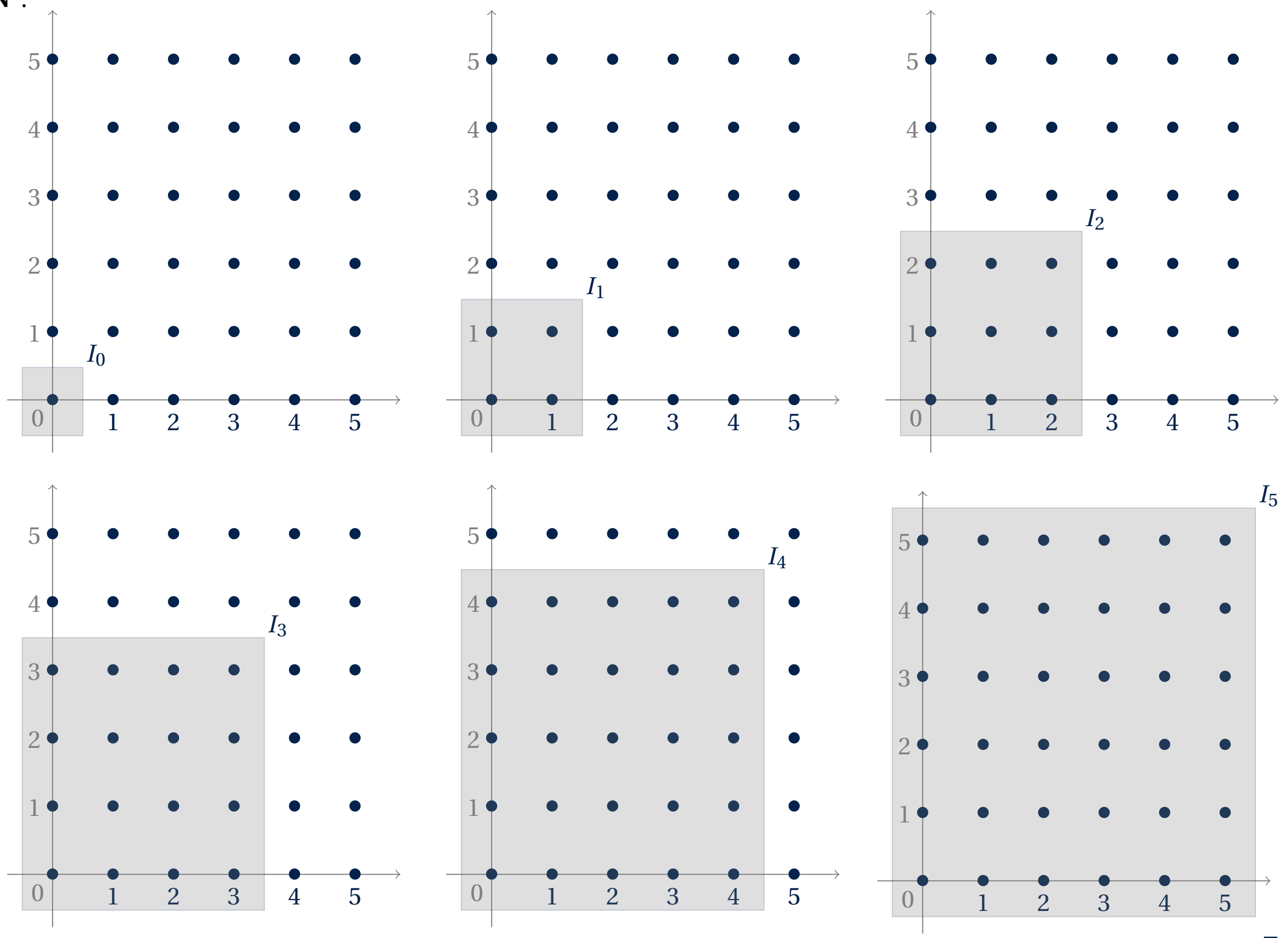
■

Exemple 25 (suite exhaustive de parties de $\mathbf{Z}$). — La famille $\left(I_n := [\![-n, n]\!]\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de parties de $\mathbf{Z}$.



$\blacksquare$

Exemple 26 (suite exhaustive de parties de* $\mathbf{N}^2$*). — La famille $\left(I_n := [\![0,n]\!]^2\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de parties de $\mathbf{N}^2$.



$\blacksquare$

> **PROPOSITION 27 (EXISTENCE D'UNE SUITE EXHAUSTIVE DE PARTIES D'UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE).** — *Tout ensemble dénombrable possède une suite exhaustive de parties.*

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — Considérons une bijection $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow E$. Alors $\left(f\left([\![0,n]\!]\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de parties de I. $\square$

> **THÉORÈME 28 (CRITÈRE DE SOMMABILITÉ VIA UNE SUITE EXHAUSTIVE : CAS POSITIF).** — *Soient I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty[^I$. On suppose donnée une suite exhaustive $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties de I.*
>
> 1. *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la suite $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.*
> 2. *Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors la suite $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et $\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i$.*

EXERCICE 29. — Soient a et b des nombres réels strictement positifs.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\left(\dfrac{1}{a^n b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$ soit sommable.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbf{N}^2} \frac{1}{a^n b^m}$.

$\square$

EXERCICE 30. — Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n^2+m^2}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ n'est pas sommable. $\square$

6. Théorème de sommation par paquets : cas positif

Définition 31 (partition d'un ensemble). — *Soient E un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides de E. On dit que $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E si :*

(a) $\bigcup_{i\in I} E_i = E$;

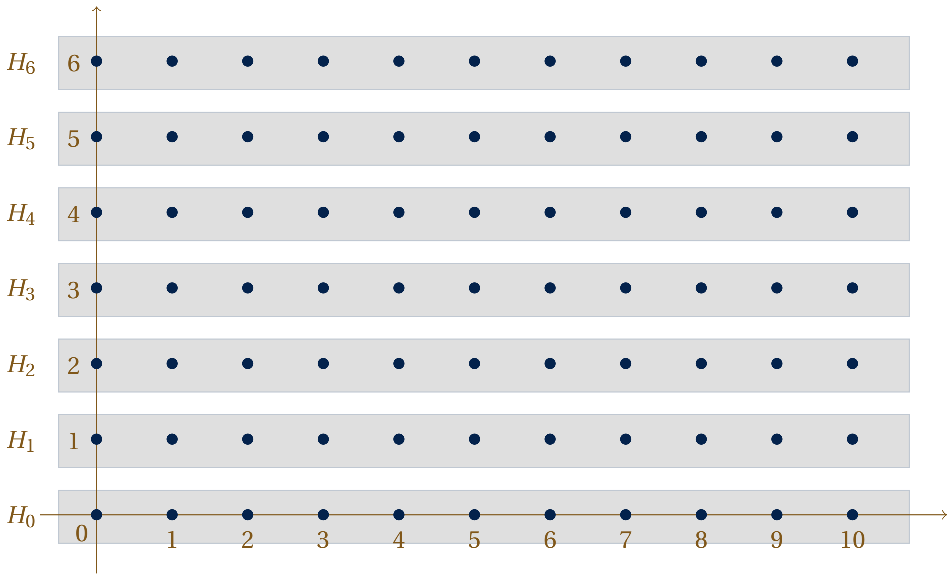
(b) *les ensemble E_i sont deux à deux disjoints, i.e. :*

$$\forall (i,j)\in I^2, \quad i\neq j \Longrightarrow E_i\cap E_j = \varnothing.$$

Exemple 32 (partition horizontale de $\mathbf{N}^2$). — Si on pose, pour tout $j\in\mathbf{N}$:

$$H_j := \{(i,j) \ : \ i\in\mathbf{N}\}$$

alors $\left(H_j\right)_{j\in\mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^2$, appelée partition horizontale de $\mathbf{N}^2$.

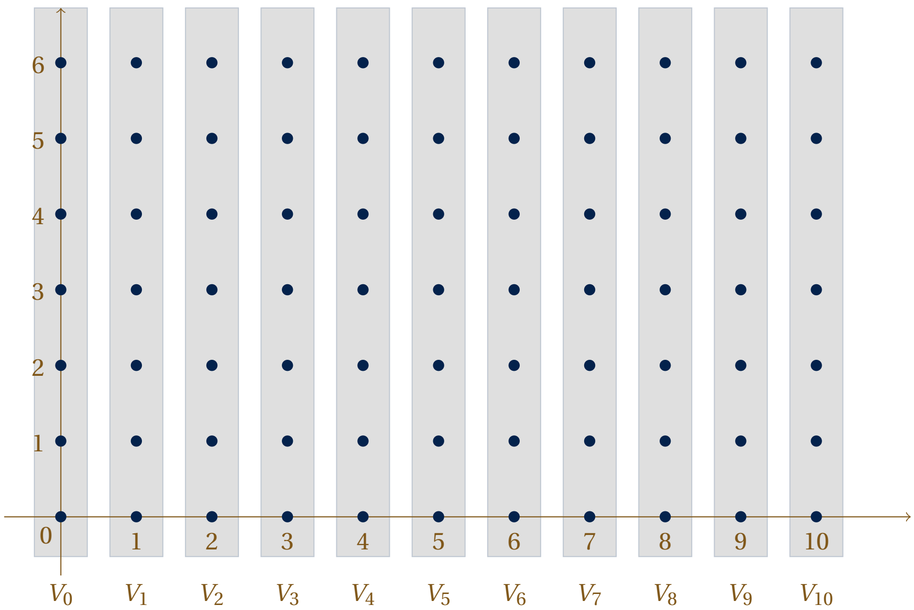


■

Exemple 33 (partition verticale de $\mathbf{N}^2$). — Si on pose, pour tout $i\in\mathbf{N}$:

$$V_i := \{(i,j) \ : \ j\in\mathbf{N}\}$$

alors $(V_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^2$, appelée partition verticale de $\mathbf{N}^2$.

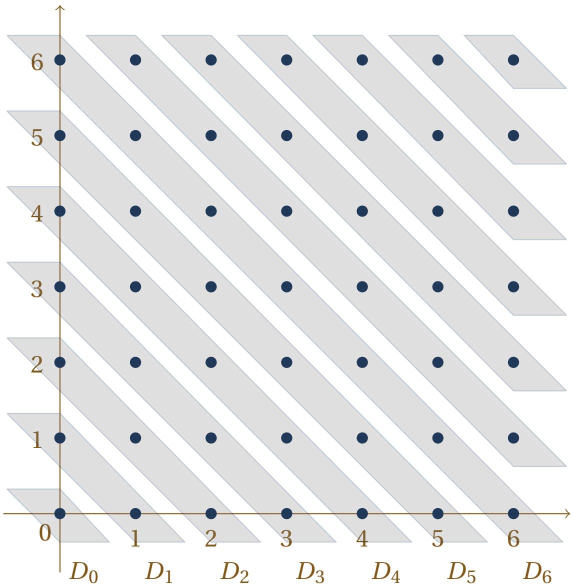


■

Exemple 34 (partition diagonale de $\mathbb{N}^2$). — Si on pose, pour tout $s \in \mathbf{N}$

$$D_s := \{(i, s-i) \ : \ i \in [\![0, s]\!]\}$$

alors $(D_s)_{s\in\mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^2$, appelée partition diagonale de $\mathbf{N}^2$. Remarquons que, pour tout $s \in \mathbf{N}$, l'ensemble D_s est fini de cardinal $s+1$.



■

THÉORÈME 35 (SOMMATION PAR PAQUETS : CAS POSITIF). — *Soit I un ensemble, $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$ et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de l'ensemble d'indices I. Alors :*

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

DÉMONSTRATION. — Nous scindons l'étude en deux parties.

• Démontrons $\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$, l'inégalité facile. Considérons une partie finie F de I. Comme :

$$F = \bigsqcup_{j\in J} F\cap I_j$$

et comme F est finie :

$$G := \{j \in J \ : \ F\cap I_j \neq \varnothing\}$$

est une partie finie de J. De $F = \bigsqcup_{j\in G} F\cap I_j$ et de la relation de Chasles pour les sommes finies, nous déduisons :

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in F\cap I_j} u_i\right).$$

Soit $j \in G$. Comme $F\cap I_j$ est fini, nous obtenons :

$$\sum_{i\in F\cap I_j} u_i \leqslant \sum_{i\in I_j} u_i$$

puis, comme G est fini :

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in F\cap I_j} u_i\right) \leqslant \sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Toujours par finitude de G, il vient :

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \underbrace{\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)}_{\text{indépendant de } F}.$$

Par passage au sup sur les parties finies F de I, nous obtenons finalement :

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{j\in I}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

• Démontrons $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i$, l'inégalité délicate. Soit G une partie finie non vide de J. Pour chaque $j\in G$, soit F_j une partie finie de I_j. L'ensemble $F := \displaystyle\bigsqcup_{j\in G} F_j$ est une partie finie de I. La relation de Chasles pour les sommes finies livre alors :

$$(\star)\qquad \sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right) = \sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Nous démontrons par récurrence finie que, pour tout $k\in[\![0,|G|]\!]$:

$$\mathscr{P}(k) := \text{« pour toute partie } A \text{ de } G \text{ de cardinal } k,\ \sum_{j\in A}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) + \sum_{j\in G\setminus A}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i \text{ ».}$$

— Initialisation à $k=0$. La seule partie de G à 0 élément est l'ensemble vide. L'assertion $\mathscr{P}(0)$ correspond alors à l'inégalité $(\star)$, déjà établie.

— Hérédité. Soit $k\in[\![0,|G|-1]\!]$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soient A une partie de G à $(k+1)$ éléments et a un élément fixé de A. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la partie $A\setminus\{a\}$ de G, qui compte k élements, il vient :

$$(\star\star)\qquad \sum_{j\in A\setminus\{a\}}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) + \sum_{j\in G\setminus A}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right) + \sum_{j\in F_a} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Si $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$, alors l'inégalité :

$$\sum_{j\in A}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) + \sum_{j\in G\setminus A}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

que nous cherchons à établir, est triviale. Nous supposons donc que $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, ce qui implique :

$$\sum_{j\in A\setminus\{a\}}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) + \sum_{j\in G\setminus A}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right) < +\infty.$$

Alors $(\star\star)$ livre :

$$\sum_{j\in F_a} u_i \leqslant \underbrace{\sum_{i\in I} u_i - \sum_{j\in A\setminus\{a\}}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \sum_{j\in G\setminus A}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right)}_{\text{indépendant de } F_a}.$$

En passant au sup sur toutes les parties finies F_a de I_a, il vient :

$$\sum_{j\in I_a} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i - \sum_{j\in A\setminus\{a\}}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \sum_{j\in G\setminus A}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right)$$

puis :

$$\sum_{j\in A}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) + \sum_{j\in G\setminus A}\left(\sum_{i\in F_j} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

L'assertion $\mathscr{P}(|G|)$, qui est établie, s'écrit :

$$\sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \leqslant \underbrace{\sum_{i\in I} u_i}_{\text{indépendant de } G}.$$

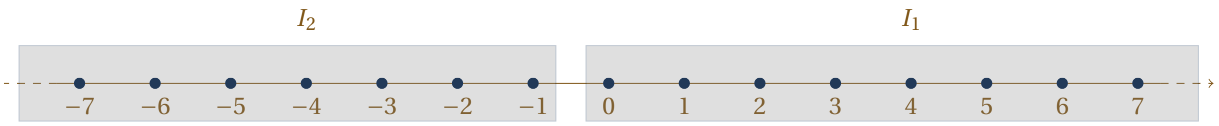
En passant au sup sur toutes les parties finies G de J, il vient :

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

■

***Exemple 36 (sommabilité d'une famille de réels positifs indexée par* Z*).* —** Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{Z}}$. Équippons $\mathbf{Z}$ de la partition formée des deux parties :

$$I_1 := \mathbf{N} \qquad \text{et} \qquad I_2 := \{-n \,:\, n\in\mathbf{N}^*\}.$$



D'après le théorème **??**, la famille $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont sommables. En appliquant la proposition 6, on en déduit les deux résultats suivants.

(a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$;

(b) la famille $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_{-n}$ convergent.

■

EXERCICE 37. — Soit q un réel strictement positif. La famille $\displaystyle\left(\frac{1}{q^n}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est-elle sommable ? □

EXERCICE 38. — Considérons l'ensemble :

$$I = \{2n+1 \,:\, n\in\mathbf{N}\}$$

des entiers naturels impairs. Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in I}$ est sommable et calculer sa somme. □

EXERCICE 39. — Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable. □

EXERCICE 40. — Soit α un réel strictement positif.

1. Pour quelles valeurs de α la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est-elle sommable ?
2. Pour quelles valeurs de α la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{n^\alpha+m^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est-elle sommable ?

□

7. THÉORÈME DE FUBINI : CAS POSITIF

THÉORÈME 41 (DE FUBINI : CAS POSITIF). — *Soiet I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in [0,+\infty]^{I\times J}$. Alors :*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

EXERCICE 42. — Soient $a>1$ et $b>1$. Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{a^n+b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable. □

EXERCICE 43. — Pour tout entier $p\geqslant 2$, posons $\displaystyle\zeta(p) := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2}\big(\zeta(p)-1\big)$ converge et calculer sa somme. □

§ 3. Familles sommables de nombres complexes

1. Sommabilité d'une famille de nombres complexes

Définition 44 (famille sommable de nombres complexes). — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$. La famille $(ai)_{i\in I}$ est sommable si $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.*

Proposition 45 (espace des familles sommables). — *Soit I un ensemble non vide. Alors :*

$$\ell^1(I) := \left\{(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I \ :\ \text{la famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^I$.

***Remarque 46.* —** Soit I un ensemble non vide. L'application :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{ccc} \ell^1(I) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (u_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} |u_i| \end{array} \right.$$

est une norme. ■

Proposition 47 (famille sommable de nombres complexes indexées par N). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Alors :*

$$\big(\text{la famille } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est sommable}\big) \iff \Big(\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est absolument convergente}\Big).$$

Proposition 48 (sommabilité d'une sous-famille de famille sommable). — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable. Alors, pour toute partie J de I, la sous-famille $(u_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ est sommable.*

Exercice 49. — Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)_{(a,b,c)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ n'est pas sommable. □

Théorème 50 (de domination pour les familles sommables). — *Soient I un ensemble et deux familles $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$, $(v_i)_{i\in I} \in [0,+\infty[^I$ telles que :*

$$\forall\, i \in I, \quad |u_i| \leqslant v_i.$$

Alors :

$$\big(\text{la famille } (v_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\big) \implies \big(\text{la famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\big).$$

Exercice 51. — Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n^4+m^4}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable. □

2. Somme d'une famille sommable de nombres complexes

Définition 52 (somme d'une famille sommable de nombres complexes). — *Soient J un ensemble et $(u_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ une famille sommable. On pose, pour tout $j \in J$:*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(u_j)^+ = \max\{\mathrm{Re}(u_j), 0\} \geqslant 0 & \mathrm{Re}(u_j)^- = \min\{\mathrm{Re}(u_j), 0\} \leqslant 0 \\ \mathrm{Im}(u_j)^+ = \max\{\mathrm{Im}(u_j), 0\} \geqslant 0 & \mathrm{Im}(u_j)^- = \min\{\mathrm{Im}(u_j), 0\} \leqslant 0 \end{array}$$

de sorte que :

$$\mathrm{Re}(u_j) = \mathrm{Re}(u_j)^+ - \left(-\mathrm{Re}(u_j)^-\right) \qquad \mathrm{Im}(u_j) = \mathrm{Im}(u_j)^+ - \left(-\mathrm{Im}(u_j)^-\right)$$

et

$$u_j = \left(\mathrm{Re}(u_j)^+ - \left(-\mathrm{Re}(u_j)^-\right)\right) + i\left(\mathrm{Im}(u_j)^+ - \left(-\mathrm{Im}(u_j)^-\right)\right).$$

Alors les familles de réels positifs :

$$\left(\mathrm{Re}(u_j)^+\right)_{j\in J} \qquad \left(-\mathrm{Re}(u_j)^-\right)_{j\in J} \qquad \left(\mathrm{Im}(u_j)^+\right)_{j\in J} \qquad \left(-\mathrm{Im}(u_j)^-\right)_{j\in J}$$

sont sommables et on pose :

$$\sum_{j\in J} u_j := \left(\sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j)^+ - \sum_{j\in J}\left(-\mathrm{Re}(u_j)^-\right)\right) + i\left(\sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)^+ - \sum_{j\in J}\left(-\mathrm{Im}(u_j)^-\right)\right) \in \mathbf{C}.$$

Proposition 53 (approximation de la somme d'une famille sommable de nombres complexes). — *Soient J un ensemble et $(u_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ une famille sommable. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists F \text{ partie finie de } I, \quad \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 54 (somme d'une famille sommable de nombres complexes et suite exhaustive). — *Soient I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties de I et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable. Alors la suite $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i.$$

3. Invariance de la somme d'une famille sommable de complexes par permutation

Proposition 55 (invariance de la somme par permutation). — *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable et $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection. Alors la famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ est sommable et :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Proposition 56 (somme d'une famille sommable de nombres complexes et suite exhaustive). — *Soient I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties de I et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable. Alors la suite $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i.$$

4. Linéarité de la somme d'une famille sommable de nombres complexes

Proposition 57 (somme d'une famille sommable de nombres complexes et suite exhaustive). — *Soient I un ensemble dénombrable, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$, $(v_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ deux familles sommables. Alors la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et :*

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

5. Théorème de sommation par paquets : cas complexe

Théorème 58 (sommation par paquets : cas complexe). — *Soit I un ensemble, $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de l'ensemble d'indices I. Alors :*

1. *pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable;*
2. *la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable;*
3. $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$

☞ Pour vérifier l'hypothèse de sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ dans le théorème 58, nous pourrons appliquer le théorème de sommation par paquets dans le cas positif (théorème 35).

6. Théorème de Fubini : cas complexe

Théorème 59 (de Fubini : cas complexe). — *Soiet I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbf{C}^{I\times J}$ une famille sommable.*

1. (a) *Pour tout $i \in I$, la famille $\left(u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable.*
   (b) *La famille $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.*
   (c) $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right).$
2. (a) *Pour tout $j \in J$, la famille $\left(u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.*
   (b) *La famille $\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable.*
   (c) $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$

☞ Pour vérifier l'hypothèse de sommabilité de la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbf{C}^I$ dans le théorème 59, nous pourrons appliquer le théorème de Fubini dans le cas positif (théorème 41).

Exercice 60. — Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| < 1$. Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-a^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n-1}}{1-a^{2n-1}}$$

en justifiant l'existence de ces deux sommes en cours d'étude. □

Exercice 61 (importance de l'hypothèse de sommabilité dans le théorème de Fubini). — Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{+\infty}\frac{1}{n^2-m^2} \neq \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{+\infty}\frac{1}{n^2-m^2}$$

après avoir justifié de l'existence de toutes les quantités en jeu. □

> **Corollaire 62 (familles doubles multiplicatives).** — *Soient des ensembles I, J et des familles sommables $(a_i)_{i\in I}\in\mathbf{C}^I$, $(b_j)_{j\in J}\in\mathbf{C}^J$. Alors la famille $\left(a_ib_j\right)_{(i,j)\in I\times J}\in\mathbf{C}^{I\times J}$ est sommable et :*
>
> $$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i\, b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Exercice 63. — Soient $\alpha\in]1,+\infty[$ et $q\in\mathbf{C}$ tel que $|q|<1$. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{q^n}{m^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable, puis exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann. □

7. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

> **Théorème 64 (produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).** — *Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{m\geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Alors la série :*
>
> $$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} \qquad \left[\text{produit de Cauchy des deux séries } \sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ et } \sum_{m\geqslant 0} b_n\right]$$
>
> *est absolument convergente et :*
>
> $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}.$$

Exercice 65. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série absolument convergente de complexes. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k a_k\right)$ converge et a pour somme $2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. □

Exercice 66 (importance de l'hypothèse d'absolue convergence dans le théorème précédent). — Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et étudier la convergence son produit de Cauchy avec elle-même. □

8. Exponentielle complexe

> **Définition 67 (exponentielle complexe).** — *Pour tout $z\in\mathbf{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et on définit l'exponentielle de z par :*
>
> $$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

COROLLAIRE 68 (PROPRIÉTÉ ALGÉBRIQUE DE L'EXPONENTIELLE). — *L'application :*

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{C}, +) & \longrightarrow & (\mathbf{C}^*, \times) \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes.