# Séries numériques et vectorielles

# Chapitre 8

*par David Blottière, le 8 décembre 2023 à 15h51*

## Sommaire

# § 1. RAPPELS SUR NUMÉRIQUES

**NOTATIONS. —** La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $n_0$ est un nombre entier naturel fixé.

## 1. NOTION DE SÉRIE CONVERGENTE/DIVERGENTE

**DÉFINITION 1 (SÉRIE CONVERGENTE/DIVERGENTE). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ définie à partir du rang $n_0$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on pose :*

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad [\textit{somme partielle d'ordre } n].$$

1. *On dit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge (resp. diverge) si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge (resp. diverge). La nature d'une série est donc celle de la suite de ses sommes partielles.*
2. *Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, on définit sa somme par :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n := \lim_{k\to+\infty} S_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad [\textit{somme d'une série convergente}].$$

**EXERCICE 2. —** Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-n}$ converge et calculer sa somme. □

**EXERCICE 3 (LA SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE CONVERGE). —** En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, démontrer que la série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

□

## 2. SÉRIES TÉLESCOPIQUES

**PROPOSITION 4 (SÉRIE TÉLESCOPIQUE). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ définie à partir du rang $n_0$. Alors :*

$$\textit{la série } \sum_{n\geqslant n_0} (u_{n+1}-u_n) \textit{ et la suite } (u_n)_{n\geqslant n_0} \textit{ ont même nature.}$$

*De plus, en cas de convergence :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_{n_0}.$$

**EXERCICE 5. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. □

## 3. SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

**PROPOSITION 6 (SÉRIE GÉOMÉTRIQUE). —** *Soit $q \in \mathbf{K}$. La série $\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Si tel est le cas, alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

**EXERCICE 7. —** Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{2^n}$ converge et calculer sa somme. □

## 4. Série exponentielle

**Proposition 8 (série exponentielle).** — *Soit $z \in \mathbf{K}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

**Exercice 9.** — Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme. □

## 5. Condition nécessaire non suffisante de convergence

**Proposition 10 (condition nécessaire non suffisante de convergence).** — *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ définie à partir du rang $n_0$. Alors :*

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad [\textit{réciproque fausse, cf. série harmonique}].$$

**Exercice 11.** — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ? □

**Exercice 12 (la série harmonique diverge).** — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

□

## 6. De la linéarité des séries convergentes

**Proposition 13 (linéarité des séries convergentes).** — *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{K}$ définies à partir du rang $n_0$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$. Si les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ convergent alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

***Remarque 14.*** — La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente. ■

**Exercice 15.** — Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa somme. □

## 7. Critère de convergence des séries à termes réels positifs

**Proposition 16 (critère de convergence des séries à termes réels positifs). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à termes réels positifs ou nuls définie à partir du rang $n_0$.*
*On pose, pour tout $n \geqslant n_0$ :*

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

1. *La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée.*
2. *Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sup\{S_n \,:\, n \geqslant n_0\}$.*
3. *Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge, alors $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

**Éléments de démonstration. —** Pour tout $n \geqslant n_0$ :

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \in \mathbf{R}_+.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est donc croissante. Les assertions découlent alors du théorème de la limite monotone pour les suites. □

**Exercice 17 (une série de Riemann convergente). —** Justifier que :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et en déduire que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

□

## 8. Théorème de domination pour les séries à termes réels positifs

**Théorème 18 (domination pour les séries à termes réels positifs). —** *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites de réels positifs ou nuls, toutes deux définies à partir du rang $n_0$, telles qu'à partir d'un certain rang :*

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

1. *Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.*
2. *Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ diverge.*

## 9. Série absolument convergente

**Définition 19 (série absolument convergente). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ définie à partir du rang $n_0$. La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geqslant n_0} |u_n|$ converge.*

**Théorème 20 (l'absolue convergence implique la convergence). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ définie à partir du rang $n_0$. Alors :*

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ converge absolument} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ converge} \qquad \left[\textit{réciproque fausse, cf. série harmonique alternée}\right].$$

**Exercice 21. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$. □

## 10. Théorème de comparaison

**Théorème 22 (de comparaison). —** *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels positifs ou nuls, toutes deux définies à partir du rang $n_0$.*

1. *Supposons que $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. Alors :*

$$\sum_{n\geqslant n_0} v_n \text{ converge} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ converge absolument.}$$

2. *Supposons que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Alors $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang et :*

$$\text{les séries } \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant n_0} v_n \text{ ont même nature.}$$

**Exercice 23. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$. □

**Exercice 24. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$. □

## 11. Reste d'une série convergente

**Définition 25 (reste d'une série convergente). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ définie à partir du rang $n_0$ telle que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge. On définit, pour tout $n \geqslant n_0$, le reste d'ordre $n$ de la série convergente $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ par :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k := \underbrace{\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k}_{\text{somme de la série}} - \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}_{\text{somme partielle d'ordre } n} \qquad [\text{reste d'ordre } n].$$

***Remarque 26 (comportement asymptotique du reste d'une série convergente).* —** Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ définie à partir du rang $n_0$ telle que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge. Alors :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

■

***Exemple 27 (restes d'une série géométrique convergente).* —** Pour tout $q \in \mathbf{K}$ tel que $|q| < 1$ :

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

■

**Exercice 28 (équivalent du reste d'une série de Riemann convergente). —** Justifier que :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n-1)^2}$$

et en déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. □

## 12. Critère des séries alternées

**Théorème 29 (critère des séries alternées).** — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que :*

- *(H1)* $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n \cdot u_{n+1} \leqslant 0$ ;
- *(H2) la suite* $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante ;*
- *(H3)* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

*Alors :*

- *(C1) la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge ;*
- *(C2)* $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *a le signe de* $u_{n+1}$
- *(C3)* $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.

L'hypothèse (H2) dans le théorème 29 est essentielle. En effet, la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

vérifie (H1) et (H3), mais pas (H2) et la série $\sum u_n$ diverge.

**Exercice 30.** — Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge. □

**Exercice 31.** — Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et calculer sa somme. □

**Exercice 32.** — Soit un réel $\alpha$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge. □

# § 2. Technique de comparaison série-intégrale

**Théorème 33 (comparaison série-intégrale).** — *Soit $f : [n_0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. Alors :*

$$\left(\text{la série } \sum_{n\geqslant n_0} f(n) \text{ converge}\right) \iff \left(\text{l'intégrale } \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}\right).$$

**Corollaire 34 (séries de Riemann).** — *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

**Exercice 35 (séries de Bertrand).** — Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Démontrer :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ converge} \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$$

□

Si $f : [n_0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue par morceaux, positive et monotone alors, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$ :

le nombre $f(n)$ est compris entre les intégrales $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

et, en additionnant membre à membre ces encadrements, on peut :

- obtenir un équivalent des restes $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge ;
- obtenir un équivalent des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ diverge ;

si l'on connaît une primitive explicite de la fonction $f$.

**EXERCICE 36. —** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}$. □

**EXERCICE 37 (QUELQUES ÉQUIVALENTS ASSOCIÉS AUX SÉRIES DE RIEMANN). —** Soit $\alpha$ un réel strictement positif.

1. Supposons $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. Supposons $\alpha = 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
3. Supposons $\alpha < 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

□

**EXERCICE 38 (ÉQUIVALENT DE LA FONCTION $\zeta$ DE RIEMANN EN $1^+$). —** Déterminer un équivalent, lorsque $x$ tend vers $1^+$, de la fonction $\zeta$ définie par :

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc} ]1, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. .$$

□

## § 3. RÈGLE DE D'ALEMBERT POUR LES SÉRIES DE RÉELS STRICTEMENT POSITIFS

**THÉORÈME 39 (RÈGLE DE D'ALEMBERT). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+$ tel que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1. *Si $\ell < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1^+$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge.*

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

alors on ne peut rien dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, comme nous l'apprennent les séries de Riemann.

**Exercice 40 (règle de Raabe-Duhamel). —** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

avec un développement asymptotique de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\alpha\in\mathbf{R}$.

1. Montrer que si $\alpha>1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. Montrer que si $\alpha<1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

□

**Exercice 41 (comparaison logarithmique). —** Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

à partir d'un certain rang.

1. Démontrer que si $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. Quel résultat antérieur peut-on retrouver grâce à la question 1 ?

□

**Exercice 42. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2}$ en fonction du réel $x$. □

**Exercice 43. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n!\,x^{n^2}$ en fonction du réel $x$. □

**Exercice 44. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}$. □

**Exercice 45. —** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$ en fonction du couple $(a,b)\in\mathbf{R}^2$. □

## § 4. Sommation des relations de comparaison

**Théorème 46 (sommation des o). —** *Soient :*

- $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres complexes ;*
- $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels, dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang ;*

*telles que* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\alpha_n)$. *Alors, nous disposons des résultats suivants.*

1. *Supposons que la série* $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ *converge. Alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge absolument et :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k\right).$$

2. *Supposons que la série* $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ *diverge. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right).$$

**THÉORÈME 47 (DE CESÀRO).** — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre réels possédant une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors :*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

**EXERCICE 48 (LEMME DE L'ESCALIER).** — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre réels. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}^*$ tel que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Donner un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. □

**EXERCICE 49 (SUITE RÉCURRENTE).** — Soient un réel $a > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^3}$. Donner un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. □

**THÉORÈME 50 (SOMMATION DES O).** — *Soient :*

- *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes ;*
- *$(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, dont les termes sont <u>positifs à partir d'un certain rang</u> ;*

*telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\alpha_n)$. Alors, nous disposons des résultats suivants.*

1. *Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge. Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument et :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k\right).$$

2. *Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ diverge. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right).$$

**THÉORÈME 51 (SOMMATION DES ÉQUIVALENTS).** — *Soient :*

- *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels ;*
- *$(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, dont les termes sont <u>positifs à partir d'un certain rang</u> ;*

*telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors :*

1. *$v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang ;*
2. *les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ont même nature ;*
3. *si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

4. *si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

**EXERCICE 52.** — Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. □

**EXERCICE 53.** — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n := \dfrac{3n^2+5n}{8n^3+4}$. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge et donner un équivalent simple de $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. □

**Exercice 54. —** Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n := \dfrac{2^n + \ln(n)}{5^n + n^2}$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et donner un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. □

**Exercice 55. —** Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n := \dfrac{n + \cos(n)}{n^3 + 1}$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et donner un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. □

# § 5. Séries vectorielles

**Notations. —** La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.

## 1. Extension des concepts des séries numériques aux séries vectorielles

**Définition 56 (série convergente/divergente). —** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $E$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$ :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \in E \qquad [\textit{somme partielle}].$$

*On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $E$ converge. Dans le cas contraire, la suite est dite divergente.*

**Définition 57 (somme et reste d'une série convergente). —** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $E$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.*

1. *La somme de la série convergente $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est définie par :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

2. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le reste d'ordre $n$ de la série convergente $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est défini par :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k := \underbrace{\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k}_{\text{somme de la série}} - \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}_{\text{somme partielle d'ordre } n} \qquad [\textit{reste d'ordre } n].$$

***Remarque 58 (comportement asymptotique du reste d'une série convergente). —*** Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série de vecteurs de $E$, qui converge. Alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$. ■

## 2. De la linéarité des séries de vecteurs convergentes

**Proposition 59 (linéarité des séries convergentes de vecteurs). —** *Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries de vecteurs de $E$, qui convergent, et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

## 3. Condition nécessaire non suffisante de convergence pour les séries de vecteurs

**Proposition 60 (condition nécessaire non suffisante de convergence). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de vecteurs de $E$. Alors :*

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E \qquad \left[\text{réciproque fausse, cf. série harmonique}\right].$$

**Terminologie. —** Une série de vecteurs de $E$ dont le terme général ne converge pas vers le vecteur nul $0_E$ est dite grossièrement divergente.

## 4. Séries télescopiques de vecteurs

**Proposition 61 (série télescopique de vecteurs). —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de vecteurs de $E$. Alors :*

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n) \text{ et la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ ont même nature.}$$

*De plus, en cas de convergence :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

## 5. Séries vectorielles absolument convergentes

**Définition 62 (série convergente/divergente). —** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $E$. On dit que la série vectorielle $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} ||u_n||$ est convergente.*

**Exercice 63 (série vectorielle absolument convergente et divergente). —** On munit $\mathbf{R}[X]$ de la norme :

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \longmapsto & \max\limits_{n\in\mathbf{N}} |[P]_n|. \end{array}\right.$$

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{X^n}{n!}$ est absolument convergente et divergente. □

**Théorème 64 (série convergente/divergente). —** *Si le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$ est de dimension finie, alors toute série absolument convergente est convergente.*

## 6. Exemples de séries matricielles convergentes

**Notation. —** Soit un entier $p\geqslant 1$ et la norme

$$||\cdot|| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ A & \longmapsto & \max\left\{\sum_{i=1}^{p}\left|[A]_{i,j}\right| \;:\; j\in[\![1,p]\!]\right\}. \end{array}\right.$$

qui vérifie :

1. $||I_p|| = 1$ ;
2. pour tout $(A,B)\in\mathscr{M}_p(\mathbf{R})^2$, $||A\times B|| \leqslant ||A||\times||B||$.

**EXERCICE 65 (CARACTÈRE OUVERT DE $\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$). —**

1. Soit $A \in B\left(0_{\mathscr{M}_p(\mathbf{R})}, 1\right)$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \cdot A^n$ converge dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$, puis que $I_p + A$ est inversible, de matrice inverse :
$$\left(I_p + A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot A^n.$$
2. En déduire que $\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$.

□

**EXERCICE 66 (EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE). —** Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R})$.

1. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \cdot A^n$ converge. Sa somme est appelée <u>exponentielle de A</u> et est notée $\exp(A)$.
2. Calculer l'exponentielle des trois matrices suivantes.

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□